CORRIGÉ DM N°1 : POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

PARTIE 1 : Polynômes de Tchebychev

1. a) $\cos(n\theta) = \mathcal{R}e(e^{in\theta}) = \mathcal{R}e((e^{i\theta})^n) = \mathcal{R}e((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n-k}\right)$

d'où : $\cos(n\theta) = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} i^k(\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n-k} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2p}(-1)^p(\sin^2\theta)^p(\cos\theta)^{n-2p}$

(en ayant posé $k = 2p$), et finalement, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ avec $\boxed{T_n(X) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-X^2)^pX^{n-2p}}$

(c'est bien un polynôme !).

b) Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et S_n vérifiant $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = S_n(\cos\theta)$. Alors, pour tout $x \in [-1,1]$ on aura $T_n(x) = S_n(x)$ soit $(T_n - S_n)(x) = 0$.

Le polynôme $T_n - S_n$ ayant une infinité de racines est le polynôme nul, donc $T_n = S_n$, ce qui prouve l'unicité.

2. a) Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta$ (on utilise la formule de trigonométrie bien connue $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$).

Donc $T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta)$ pour tout θ réel, d'où, pour tout $x\in[-1,1]$, $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.
Cette égalité entre fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $\boxed{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).}$

b) $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et la formule de récurrence précédente donne $T_2 = 2X^2-1$ puis $T_3 = 4X^3-3X$.

c) La relation de récurrence précédente permet de démontrer facilement par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n \\ \text{son coefficient dominant est } 2^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1\end{cases}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies, puis de montrer l'implication $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{H}_{n+2}$, ce qui est une conséquence facile de la relation de récurrence précédente.

d) En utilisant l'expression obtenue en 1.a., on obtient immédiatement : $T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)$, c'est-à-dire que $\underline{T_n \text{ est de la parité de } n}$.

3. Pour $n\geqslant 1$: $T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

Or, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, les nombres $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ sont n réels distincts de l'intervalle $]0,\pi[$. La fonction cos étant une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, on en déduit que les nombres $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ sont n réels distincts tels que $T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0$.
Il s'agit donc de n racines distinctes de T_n.
Celui-ci étant de degré n, ce sont exactement les n racines de T_n.

4. a) On peut procéder comme dans la question 1.a :
Pour tout entier n et tout réel θ :

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) &= \mathscr{I}m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}) = \mathscr{I}m((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n+1}) = \mathscr{I}m((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{n+1})\\ &= \mathscr{I}m\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{i}^k(\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n+1-k}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\theta) &= \mathscr{I}m\left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mathrm{i}^k(\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n+1-k}\right)\\ &= \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n+1}{2p+1}(-1)^p(\sin^2\theta)^p\sin\theta(\cos\theta)^{n-2p} \quad \text{(en ayant posé } k=2p+1)\end{aligned}$$

et finalement, $\sin((n+1)\theta) = \sin\theta\,\mathrm{U}_n(\cos\theta)$ avec $\boxed{\mathrm{U}_n(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n+1}{2p+1}(-1)^p(1-\mathrm{X}^2)^p\mathrm{X}^{n-2p}}$

(c'est bien un polynôme !).

L'unicité de U_n (qui n'était pas demandée) se démontre exactement comme celle de T_n.

b) En dérivant par rapport à x la relation $\cos(nx) = \mathrm{T}_n(\cos x)$, on obtient $-n\sin(nx) = -\sin x\,\mathrm{T}_n'(\cos x)$ pour tout x réel, d'où, pour $n \geqslant 1$: $n\sin x\,\mathrm{U}_{n-1}(\cos x) = \sin x\,\mathrm{T}_n'(\cos x)$ donc $n\mathrm{U}_{n-1}(\cos x) = \mathrm{T}_n'(\cos x)$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

En posant $y = \cos x$, on a $n\mathrm{U}_{n-1}(y) = \mathrm{T}_n'(y)$ pour tout $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$. L'égalité entre ces deux fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $\boxed{\mathrm{T}_n'(\mathrm{X}) = n\mathrm{U}_{n-1}(\mathrm{X}).}$

5. Supposons $n \geqslant 2$ dans cette question. $\mathrm{T}_n'(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{U}_{n-1}(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = 0$ pour $\sin\theta \neq 0$ i.e $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

On aura donc $\mathrm{T}_n'(\cos\theta) = 0$ pour $\sin(n\theta) = 0$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, donc pour $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$.

Les $k-1$ nombres $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [\![1, n-1]\!]$ sont donc racines de T_n'. Comme ils sont distincts (même argument qu'à la question 3) et que le degré de T_n' est $n-1$, ce sont exactement les racines de T_n'.

Les seuls points de l'intervalle $[-1,1]$ où T_n *peut* atteindre un extrémum sont les bornes de cet intervalles, et les points intérieurs où T_n' s'annule. Il s'agit donc de ± 1 et des racines de T_n' trouvées ci-dessus, donc des points $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k \in [\![0, n]\!]$.

Réciproquement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a $\left|\mathrm{T}_n\left(\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)\right| = 1$; puisque $\mathrm{T}_n(x) = \cos\big(n\operatorname{Arccos} x\big)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $|\mathrm{T}_n(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Donc $\|\mathrm{T}_n\|_\infty = 1$, et $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \ , \ k \in [\![0, n]\!]\right\}.}$

PARTIE 2 : Caractérisation des polynômes de Tchebychev à l'aide des points extrémaux

1. • On a évidemment $\|\mathrm{P}\|_\infty \geqslant 0$, et $\|\mathrm{P}\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{P}(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P} = 0$, ce qui est exclu (car P de degré $n \geqslant 1$).

- La fonction polynôme étant continue sur le *segment* I, elle y est bornée (donc $\|P\|_\infty$ existe !) et atteint ses bornes, donc $E(P) \neq \emptyset$.
- Enfin, les seuls points de I où P peut atteindre ses bornes sont ± 1 et les points intérieurs à I où P′ s'annule ; ces points sont au nombre maximum de $n-1$ (car $\deg P' = n-1$), ce qui fait au maximum $n+1$ points extrémaux.

2. **a)** Le raisonnement ci-dessus montre en outre que $\operatorname{card}(E(P)) = n+1 \Longleftrightarrow -1 \in E(P)$, $1 \in E(P)$ et P′ s'annule en $n-1$ points distincts de $]-1,1[$.
On a donc $E(P) = \{-1, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1\}$ avec $-1 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < 1$.

b) Pour $0 < i < n$, $x_i \in E(P)$ donc $|P(x_i)| = \|P\|_\infty = 1$ donc $(1-P^2)(x_i) = 0$. De plus, $P'(x_i) = 0$ donc x_i est aussi racine de la dérivée du polynôme $1 - P^2$ (cette dérivée étant égale à $-2PP'$).
Ainsi, x_i est racine *au moins double* de $1-P^2$. Or 1 et -1 sont aussi racines de $1-P^2$ puisque $\pm 1 \in E(P)$. $1-P^2$ étant de degré $2n$ ne peut admettre plus de $2n$ racines (chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité).
Donc $1-P^2$ admet les x_i pour $0 < i < n$ comme racines doubles, et ± 1 comme racines simples.

c) On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $1 - P^2 = \lambda(1-X^2)\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)^2$.
Si a_n est le coefficient dominant de P, le coefficient dominant de $1-P^2$ est $-a_n^2$; d'autre part, les x_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ étant exactement les racines de P′, on a $P' = na_n \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X-x_i)$.
En comparant les expressions ci-dessus, on obtient : $\boxed{1 - P^2 = \dfrac{1}{n^2}(1-X^2)P'^2(X).}$

d) Pour $x \in]x_{n-1}, 1[$, $(1-P^2)(x) > 0$; d'autre part, P′ ne s'annulant pas sur $]x_{n-1},1[$ y garde un signe constant (d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P′ étant continue).
De l'égalité $\dfrac{n^2}{1-x^2} = \dfrac{P'^2(x)}{(1-P^2)(x)}$, on déduit donc $\dfrac{P'(x)}{\sqrt{(1-P^2)(x)}} = \dfrac{\pm n}{\sqrt{1-x^2}}$, où le signe $\pm$ ne dépend pas de $x \in]x_{n-1},1[$.

e) En intégrant, on obtient $\forall x \in]x_{n-1},1[$, $\operatorname{Arccos}(P(x)) = \varepsilon n \operatorname{Arccos} x + cste$. Puisque $P(1) = \pm 1$, on obtient $cste = 0$ ou $cste = \pi$, d'où $P(x) = \pm\cos(n \operatorname{Arccos} x)$ soit $P(x) = \pm T_n(x)$. Cette égalité entre fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs , on en tire : $\boxed{P = \pm T_n.}$

3. On cherche ici tous les polynômes de degré n tels que $E(P) = n+1$. Si on pose alors $Q = \dfrac{P}{\|P\|_\infty}$, on a Q de degré n, tel que $\|Q\|_\infty = 1$ et $E(Q) = n+1$. D'après la question précédente, on a $Q = \pm T_n$, d'où $P = \pm\|P\|_\infty T_n$.
Ainsi, les polynômes P de degré n tels que $E(P) = n+1$ sont les polynômes de la forme λT_n, où λ est un réel non nul quelconque (ce qui précède ne montre qu'une implication, mais la réciproque est évidente, puisque, si $\lambda \neq 0$, $E(\lambda T_n) = E(T_n) = n+1$).

PARTIE 3 : Une autre caractérisation des polynômes de Tchebychev

1. **a)** Les x_k sont les points où T_n atteint un extrémum, et on a $|T_n(x_k)| = 1$; de plus, $T_n(x_k)$ et $T_n(x_{k+1})$ sont de signes contraires. Supposons par exemple $T_n(x_k) = 1$ et $T_n(x_{k+1}) = -1$. Alors $Q(x_k) = 1 - P_n(x_k) \geqslant 0$ et $Q(x_{k+1}) = -1 - P_n(x_{k+1}) \leqslant 0$, puisque, par hypothèse, $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) \in [-1,1]$.
Ainsi $\boxed{Q(x_k) \text{ et } Q(x_{k+1}) \text{ sont de signes contraires.}}$

b) Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q admet (au moins) une racine sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

- *Remarque préliminaire :* Si $Q(x_k) = 0$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $Q'(x_k) = 0$, c'est-à-dire que x_k est racine au moins double de Q.
  En effet : si $Q(x_k) = 0$, alors $P(x_k) = T_n(x_k) = \pm 1$ donc P atteint un extremum en $x_k \in]-1,1[$; par suite, $P'(x_k) = 0$ et puisque on a aussi $T_n'(x_k) = 0$, on aura bien $Q'(x_k) = 0$.
- Il ne reste plus qu'à compter :
  - sur $[x_1, 1]$, il y a au moins une racine si $Q(x_1) \neq 0$ et au moins 2 si $Q(x_1) = 0$ (il s'agit de x_1, comptée double d'après la remarque préliminaire).
  - Sur $[x_2, 1]$, il y a deux cas possibles :
    - ▹ si $Q(x_2) = 0$, x_2 est racine au moins double, et, comme il y a au moins une racine dans $[x_1, 1]$, cela fait au moins trois racines dans $[x_2, 1]$.
    - ▹ si $Q(x_2) \neq 0$, il y a encore deux cas possibles :
      - ◇ soit $Q(x_1) = 0$, x_1 est racine au moins double, donc il y a au moins deux racines dans $[x_2, 1]$.
      - ◇ soit $Q(x_1) \neq 0$, et il y a alors au moins une racine dans $]x_2, x_1[$ et au moins une dans $]x_1, 1[$, donc encore au moins deux racines dans $[x_2, 1]$.

  ETC...
  On démontra ainsi par récurrence sur k qu'il y a au moins k racines dans $[x_k, 1]$. Finalement, il y en a au moins n dans $[x_n, 1]$ i.e dans I.
- Puisque $\deg Q \leqslant n-1$, on en déduite immédiatement $Q = 0$ d'où $P = T_n$.

2. • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, normalisé, non constant, et $k \geqslant 1$ son degré. Montrons que $\|P\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$, ce qui entraînera l'inégalité demandée.

Par l'absurde, supposons $\|P\|_\infty < \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Alors, le polynôme $2^{k-1}P$ vérifie :

$$\begin{cases} \text{Le coefficient de } X^k \text{ dans } 2^{k-1}P \text{ est égal à } 2^{k-1} \\ \forall x \in [-1,1]\ ,\ 2^{k-1}P(x) \in]-1,1[\end{cases}$$

D'après la question précédente, on aurait : $2^{k-1}P = T_k$; mais alors, puisque $\|T_k\|_\infty = 1$, on aurait $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ ce qui est contradictoire.

• Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, normalisé, de degré $k \leqslant n$, tel que $\|P\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Puisque, si $k < n$, $\dfrac{1}{2^{k-1}} > \dfrac{1}{2^{n-1}}$, il résulte de la question précédente que $k = n$. On déduit alors, comme dans ci-dessus, : $P = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$.

PARTIE 4 :

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ d'où, en dérivant

$$-\sin x T_n'(\cos x) = -n \sin(nx)$$

puis en dérivant de nouveau :

$$(1 - \cos^2 x)T_n''(\cos x) - \cos x T_n'(\cos x) + n^2 T_n''(\cos x) = 0$$

Ainsi, pour tout $y \in [-1,1]$, $(1-y^2)T_n''(y) - yT_n'(y) + n^2 T_n(y) = 0$.
L'égalité entre ces deux fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $\boxed{(1-X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0.}$

b) En posant $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $a_n = 2^{n-1}$), on a alors $T'_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $T''_n = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$, d'où, en remplaçant dans la relation précédente :

$$(1-X^2)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k + n^2 \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - \sum_{\substack{\cancel{k=2}\\ k=0}}^{n} k(k-1)a_k X^k - \sum_{\substack{\cancel{k=1}\\ k=0}}^{n} k a_k X^k + n^2 \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1)+k-n^2\right] a_k X^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} X^k - \sum_{k=0}^{n} (k^2-n^2) a_k X^k = 0$$

On en déduit : $\begin{cases} a_{n-1} &= 0 \\ a_k &= \dfrac{(k+1)(k+2)}{k^2-n^2} a_{k+2} \quad \text{pour } k \leqslant n-2 \end{cases}$

c) Donc :

- Tous les coefficients de la forme $a_{n-(2p+1)}$ sont nuls (ce qui est normal, compte tenu de la parité de T_n).
- Pour $p \in [\![1, \left[\frac{n}{2}\right]]\!]$, $a_{n-2p} = -\dfrac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{4p(n-p}a_{n-2p+2}$ ce qui permet d'obtenir, par récurrence sur p la superbe formule :

$$\boxed{\forall \in [\![1, \left[\tfrac{n}{2}\right]]\!] \quad , \quad a_{n-2p} = \frac{(-1)^p n(n-p-1)!}{4^p p!(n-2p)!} a_n \quad \text{avec } a_n = 2^{n-1}.}$$

2. a) Si P est un polynôme non nul, de degré p, solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, il est facile de voir, en considérant le coefficient dominant, que l'on a nécessairement $p=n$.

On cherche donc P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. On obtient bien sûr la même relation que précédemment entre les a_k ; la seule différence est ici que a_n est un réel non nul quelconque. On obtient donc comme solution un polynôme proportionnel au précédent.

En conclusion, les solutions polynomiales de l'équation différentielle proposée sont les polynômes de la forme λT_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Si le polynôme P non constant est solution de l'équation différentielle proposée, alors $(1-X^2)P'^2 - n^2(1-P^2) = 0$, donc, en dérivant, on obtient : $-2XP'^2 + (1-X^2)2P'P'' + 2n^2PP' = 0$. Puisque P' n'est pas le polynôme nul, on obtient : $(1-X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$. D'après ce qui précède, on a donc nécessairement $P = \lambda T_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si P est de cette forme, le polynôme $(1-X^2)P'^2 - n^2(1-P^2)$ a une dérivée nulle, donc est constant ; sa valeur en 1 est $-n^2(1-\lambda^2 T_n^2(1)) = -n^2(1-\lambda^2)$; on aura donc $(1-X^2)P'^2 - n^2(1-P^2) = 0$ si et seulement si $\lambda^2 = 1$ i.e $\lambda = \pm 1$, soit $\boxed{P = \pm T_n.}$

3. a) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$T_p(T_q(\cos\theta)) = T_p(\cos(q\theta)) = \cos(pq\theta) = T_{pq}(\cos\theta)$$

Les polynômes $T_p \circ T_q$ et T_{pq} coïncident donc sur $[-1,1]$, donc sont égaux.

b) Soit P un polynôme non constant, de degré p, tel que $P \circ T_n = T_n \circ P$.
En dérivant cette identité, on obtient :

$$(P' \circ T_n)T'_n = (T'_n \circ P)P'$$

Or $(1-X^2)T_n'^2 = n^2(1-T_n{}^2)$ donc

$$\begin{aligned}(P'\circ T_n)^2 T_n'^2 &= (P'\circ T_n)^2 \frac{n^2(1-T_n{}^2)}{1-X^2}\\ &= (T_n'\circ P)^2 P'^2 = \frac{n^2(1-(T_n\circ P)^2)}{1-P^2}P'^2\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(P'\circ T_n)^2(1-T_n{}^2)}{1-(T_n\circ P)^2} = \frac{(1-X^2)P'^2}{1-P^2}$$

c) On note R la fraction rationnelle $R = \dfrac{(1-X^2)P'^2(X)}{1-P^2(X)}$. Puisque $T_n\circ P = P\circ T_n$, l'égalité précédente s'écrit : $R\circ T_n = R$.

Or le degré de la fraction rationnelle $R\circ T_n$ est égal à $n\deg(R)$. On a donc nécessairement $\deg(R) = 0$ (puisque $R \neq 0$), soit $R = cste + S$, avec S fraction rationnelle de degré strictement négatif. La relation $R\circ T_n = R$ entraîne alors $S\circ T_n = S$, d'où $S = 0$ pour la même raison que précédemment.

Finalement, on a bien $R = cste$.

d) Si $p = \deg(P)$, en comparant les coefficients dominants du numérateur et du dénominateur de R, on obtient $cste = p^2$.

Ainsi, P vérifie l'équation différentielle $(1-X^2)P'^2 - p^2(1-P^2) = 0$. Donc nécessairement $P = \pm T_p$ d'après le résultat de la question 2.b.

Notons $P = \varepsilon T_p$, avec $\varepsilon = \pm 1$. La relation $T_n\circ P = P\circ T_n$ donne alors $T_n(\varepsilon T_p) = \varepsilon T_p\circ T_n = \varepsilon T_{pn} = \varepsilon T_n\circ T_p$.

- si n est pair, T_n est pair, donc $T_n(\varepsilon T_p) = T_n\circ T_p$, et P ne convient que si $\varepsilon = +1$.
- si n est impair, T_n est impair, donc $T_n(\varepsilon T_p) = \varepsilon T_n\circ T_p$ et les deux possibilités pour P conviennent.

En conclusion : Les seuls polynômes non constants $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P\circ T_n = T_n\circ P$ sont les polynômes T_p, $p\in\mathbb{N}^*$ si n est pair, et les polynômes $\pm T_p$, $p\in\mathbb{N}^*$ si n est impair.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆