# Corrigé DS n° 3

## Partie A

① • Si $f$ est nilpotent : soit $\lambda \in Sp(f)$. Il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda x$.
Alors : $f^n(x) = \lambda^n x$ et, puisque $f^n = 0$ et $x \neq 0$, on a $\lambda = 0$

• Réciproquement, si $Sp(f) = \{0\}$, alors le polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$ est nécessairement égal à $(-1)^n X^n$ (puisqu'il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$). D'après le th. de Cayley-Hamilton, on a alors $f^n = 0$ soit $f$ nilpotent
(Rem : on pouvait aussi utiliser le polynôme minimal de $f$, dont on sait que les racines sont exactement les vp de $f$ ; il existe donc $p$ tq $\pi_f = X^p$ d'où $f^p = 0$)

---

② • $[fg, h] = fgh - hfg = fgh - fhg + fhg - hfg$
$= f(gh - hg) + (fh - hf)g = f[g,h] + [f,h]g$

• On trouve de même : $[f, gh] = [f,g]h + g[f,h]$

---

③ ⓐ • Démontrons, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ : $[f^k, g] = k f^{k-1} h$

- C'est évident pour $k = 0$ ($[Id, g] = 0$) et pour $k = 1$ (d'après les hypothèses)
- Si cela est vrai à l'ordre $k-1$, alors :

$[f^k, g] = [f f^{k-1}, g] = [f,g] f^{k-1} + f[f^{k-1}, g]$ CAR $f$ et $h$ commutent puisque $[f,h] = 0$ !

$= h f^{k-1} + (k-2) f . f^{k-2} h = (k-1) f^{k-1} h$ : cqfd

• On en déduit alors facilement, par linéarité (l'appl. $f \mapsto [f,g]$ étant bien linéaire) : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $[P(f), g] = P'(f) h$

ⓑ On démontre l'égalité $P^{(k)}(f)\, h^{2^k - 1} = 0$ par récurrence sur $k$ :

- c'est évident pour $k = 0$, car $h^0 = Id_E$ et $P^{(0)}(f) = P(f) = 0$
- Supposons l'égalité démontrée à l'ordre $k$. On calcule alors :

$$h^{2^k-1} [P^{(k)}(f) h^{2^k-1}, g] = h^{2^k-1} [P^{(k)}(f), g] h^{2^k-1} + h^{2^k-1} P^{(k)}(f) [h^{2^k-1}, g]$$ (d'après ②)

$$= \underbrace{h^{2^k-1} P^{(k+1)}(f) h . h^{2^k-1}}_{\text{d'après la quest. précédente}} + h^{2^k-1} P^{(k)}(f) [h^{2^k-1}, g]$$

Or : $h$ et $f$ commutent, puisque $[f,h] = 0$. Il en résulte que

$h^{2^k-1}$ et $P^{(k)}(f)$ commutent, donc d'après l'H.R. $h^{2^k-1}P^{(k)}(f) = P^{(k)}(f)h^{2^k-1} = 0$ ②

Le calcul précédent donne alors :

$$h^{2^k-1}\left[\underbrace{P^{(k)}(f)h^{2^k-1}}_{=0}, g\right] = h^{2^{k+1}-1}P^{(k+1)}(f) = 0 \quad : \underline{\text{cqfd}}$$

ⓒ Soit $P$ un polynôme annulateur non nul de $f$ (il en existe, car $\dim E < +\infty$) et $k = d°P$. Alors $P^{(k)}(f)$ est une constante non nulle, et le calcul précédent donne : $h^{2^k-1} = 0$ : <u>$h$ est nilpotent</u>.

---

④ ⓐ Soit $x \in N_k$ : $f^k(x) = 0$.

En utilisant 3.a. appliqué au polynôme $X^{k+1}$, on a :

$$[f^{k+1}, g] = (k+1)f^k h$$

d'où $f^{k+1}g(x) - gf^{k+1}(x) = (k+1)f^k h(x) = (k+1)hf^k(x)$ (car $f$ et $h$ commutent)

Or $f^k(x) = 0$ d'où $f^{k+1}(x) = 0$ d'où $f^k(fg)(x) = 0$ soit <u>$fg(x) \in N_k$ : cqfd</u>

ⓑ • $f$ étant nilpotent, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} f^{p-1} \subsetneq \operatorname{Ker} f^p = E$$ ($p$ est l'indice de nilpotence de $f$)

l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, x \in \operatorname{Ker} f^k\}$ est donc non vide : <u>il possède bien un plus petit élément</u>.

• On applique alors le résultat du 3.a au polynôme $X^k$ :

$$f^k g - gf^k = kf^{k-1}h = khf^{k-1}$$

Or, on a $f^k(x) = 0$ et $fg(x) = \lambda x$ d'où

$$f^{k-1}(fg)(x) - gf^k(x) = khf^{k-1}(x)$$

donne : <u>$\lambda f^{k-1}(x) = khf^{k-1}(x)$</u> : cqfd.

ⓒ • Si $\lambda$ est une valeur propre de $fg$, et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, la relation ci-dessus (appliquée avec $k$ mini. tel que $x \in N_k$) montre que

$$h\left[f^{k-1}(x)\right] = \frac{\lambda}{k}\left[f^{k-1}(x)\right], \text{ avec } f^{k-1}(x) \neq 0 \text{ (par déf. de } k)$$

donc $\frac{\lambda}{k}$ est valeur propre de $h$.

Mais $h$ nilpotent, donc $\lambda = 0$.

Ainsi, la seule valeur propre de $fg$ est $0$, donc <u>$fg$ est nilpotent</u>

• On a alors : $(fg)^n = 0$ d'où $(gf)^{n+1} = g(fg)^n f = 0$ d'où <u>$gf$ est nilpotent</u>.

(d) • On a supposé $f$ non nul ; de plus $f$ est nilpotent, donc sa seule valeur propre est 0. Par suite il existe $x \neq 0$ tel que $\{x, f(x)\}$ soit libre. Soit alors $H$ un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\{x, f(x)\})$ dans $E$. On peut définir une appl. linéaire $g_1$ par :

$$g_1 \text{ nulle sur } H, \quad g_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_1[f(x)] = x.$$

Alors $g_1 f$ n'est pas nilpotent (puisque $x$ est un $\vec{vp}$ associé à la vp 1).
et $f g_1$ non plus (puisque $f(x)$ est un $\vec{vp}$ associé à la vp 1)

• Si, par l'absurde, $\Psi_f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on aurait $\Psi_f(g_1) = [f, g_1] = 0$
D'après les questions précédentes, on devrait avoir $f g_1$ nilpotent : contradiction

---

(5) (a) On procède par récurrence sur $k \geq 1$ pour obtenir l'égalité demandée

- pour $k = 1$, celle-ci s'écrit : $\Psi_f(g) = fg - gf$, ce qui est vrai.
- Supposons-la vérifiée à l'ordre $k$. Alors, avec la convention $C_k^i = 0$ si $i > k$, on a : $(\Psi_f)^k(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^i$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } (\Psi_f)^{k+1}(g) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i \, \Psi_f(f^{k-i} g f^i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k+1-i} g f^i - \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^{i+1} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k+1-i} g f^i + \sum_{j \in \mathbb{N}} (-1)^j C_k^{j-1} f^{k+1-j} g f^j
\end{aligned}$$

(en posant $j = i+1$ et $C_k^{-1} = 0$)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i [C_k^i + C_k^{i-1}] f^{k+1-i} g f^i \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_{k+1}^i f^{k+1-i} g f^i \quad : \quad \text{cqfd}
\end{aligned}$$

(b) On a donc : $(\Psi_f)^{2p-1}(g) = \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i C_{2p-1}^i f^{2p-1-i} g f^i$

Or, pour $0 \leq i \leq p-1$, $2p-1-i \geq p$ donc $f^{2p-1-i} = 0$

et pour $p \leq i \leq 2p-1$, $f^i = 0$

On a donc : $(\Psi_f)^{2p-1}(g) = 0$ pour $\forall g \in \mathcal{L}(E)$ soit $(\Psi_f)^{2p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Donc $\Psi_f$ est nilpotent (et son indice de nilpotence est inférieur à $2p-1$).

ⓒ. Soit $S$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus S$

On sait alors que la restriction $u'$ de $u$ à $S$ est un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}\, u$ : $u' : S \to \mathrm{Im}\, u$, $x \mapsto u(x)$ et $u'^{-1} : \mathrm{Im}\, u \to S$

Soit $F$ un supplémentaire de $S$ : $E = F \oplus S$. On sait alors qu'on peut définir un endo. $v$ de $E$ par : $\begin{cases} v(y) = 0 \text{ si } y \in F \\ v(y) = u'^{-1}(y) \text{ si } y \in \mathrm{Im}\, u. \end{cases}$

On aura alors : $\forall x \in S \quad vu(x) = x$ car $u(x) = u'(x)$ dans ce cas.

d'où $uvu(x) = u(x)$

et $\forall x \in \mathrm{Ker}\, u \quad uvu(x) = u(x) = 0$

On a donc bien : $\underline{uvu = u}$

• On a : $\forall g \in \mathcal{L}(E) \quad \psi_f^{2p-2}(g) = \sum_{i=0}^{2p-2} (-1)^i C_{2p-2}^i f^{2p-2-i} g f^i$

Or $f^i = 0$ si $i \geq p$, et $f^{2p-2-i} = 0$ si $2p-2-i \geq p$ soit $i \leq p-2$.

Il reste donc : $\psi_f^{2p-2}(g) = (-1)^{p-1} C_{2p-2}^{p-1} f^{p-1} g f^{p-1}$

Si on choisit alors $g$ tel que $f^{p-1} g f^{p-1} = f^{p-1}$ (ce qui est possible d'après la question précédente), on aura : $f^{p-1} = \psi_f^{2p-2}\left(\dfrac{g}{(-1)^{p-1} C_{2p-2}^{p-1}}\right)$

soit $\underline{f^{p-1} \in \mathrm{Im}\, \psi_f^{2p-2}}$

• Or $f^{p-1} \neq 0$ par déf. de $p$, donc $\psi_f^{2p-2} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ; et on avait vu $\psi_f^{2p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc <u>l'indice de nilpotence de $\psi_f$ est : $2p-1$</u>

---

## PARTIE B :

1) ⓐ $\psi_f(g^k) = \alpha k g^k$ : se démontre par récurrence sur $k$ (cf. ex. corrigé en classe)

ⓑ Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g^k$. Alors : $fg^k(x) - g^k f(x) = \alpha k g^k(x)$ et $g^k(x) = 0$

donc : $g^k[f(x)] = 0$, soit $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g^k$ : <u>$\mathrm{Ker}\, g^k$ est bien stable par $f$</u>.

ⓒ Si on suppose $g^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors $g^k$ est un vecteur propre de $\psi_f$ associé à la valeur propre $\alpha k$.

$\psi_f$ posséderait donc une <u>infinité de valeurs propres</u>, ce qui est impossible (car $\alpha \neq 0$ !)

car $\varphi_f$ est un endomorphisme de $f(E)$ et $\dim f(E) < +\infty$.
L'hypothèse initiale est donc absurde et : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $g^k = 0$, soit : $g$ nilpotent

---

② ⓐ. On a ici $\dim \operatorname{Ker} g = 1$. Si $p$ est l'indice de nilpotence de $g$, on a $p \leq n$ et : $\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} g \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker} g^{p-1} \subsetneq \operatorname{Ker} g^p = E$. (1)

• En considérant la restriction de $g$ à $\operatorname{Im} g^k$, et en lui appliquant le théorème du rang, on a :
$$\operatorname{rg} g^{k+1} = \operatorname{rg} g^k - \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g^k)$$
soit
$$\dim \operatorname{Ker} g^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} g^k + \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g^k)$$
d'où
$$\dim \operatorname{Ker} g^{k+1} \leq \dim \operatorname{Ker} g^k + 1 . (2)$$

En comparant (1) et (2), il est clair que :
$$\forall k \in [\![0,n]\!] \;, \dim \operatorname{Ker} g^k = k \quad \text{et} \quad p = n$$

(Rem : cela a déjà été fait en classe !)

ⓑ Puisque $\operatorname{Ker} g^{n-1} \subsetneq E$, il existe $x \in E$ tel que $x \notin \operatorname{Ker} g^{n-1}$.
Posons alors : $x_1 = g^{n-1}(x)$, $x_2 = g^{n-2}(x)$, ..., $x_n = x$.

Alors :
• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la famille $(x_1, \ldots x_k)$ est libre car :
si $\lambda_1 g^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_k g^{n-k}(x) = 0$, alors, en appliquant $g^{k-1}$, puisque $g^n = 0$, on obtient : $\lambda_k g^{n-1}(x) = 0$ d'où $\lambda_k = 0$ puisque $g^{n-1}(x) \neq 0$
et on recommence...

• Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $x_j \in \operatorname{Ker} g^k$ car : $g^k(x_j) = g^k[g^{n-j}(x)]$
$$= g^{n+k-j}(x) = 0$$
puisque $k-j+n \geq n$.

• Ainsi $\{x_1, \ldots x_k\}$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} g^k$, de cardinal $k$ et $\dim \operatorname{Ker} g^k = k$ : c'en est donc une base.

ⓒ. On a : $fg - gf = \alpha g$ d'où $fg(x_1) - g f(x_1) = \alpha g(x_1)$
Or $x_1 \in \operatorname{Ker} g$ d'où $g[f(x_1)] = 0$. Donc $f(x_1) \in \operatorname{Ker} g$, et, puisque $x_1$ est un vecteur de base de $\operatorname{Ker} g$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $f(x_1) = \lambda x_1$

• On a vu (1.b) que $\operatorname{Ker} g^k$ était stable par $f$ pour tt $k \in [\![1,n]\!]$.

On a donc : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{Vect}(\{x_1, \ldots x_k\})$ stable par $f$, ce qui montre (cf. cours) que la matrice de $f$ ds $\{x_1, \ldots x_n\}$ est bien triangulaire supérieure.

d) • $\lambda_i$ est donc la coordonnée de $f(x_i)$ sur $x_i$. On a donc :

$$f(x_i) = \lambda_i x_i + y_i \quad \text{avec} \quad y_i \in \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) = \mathrm{Ker}\, g^{i-1}$$

Or $fg - gf = \alpha g$ d'où :

$$fg(x_i) - gf(x_i) = \alpha g(x_i) \quad ; \text{ or } g(x_i) = x_{i-1}$$

soit $f(x_{i-1}) - g(\lambda_i x_i + y_i) = \alpha x_{i-1}$

soit $\lambda_{i-1} x_{i-1} + y_{i-1} - \lambda_i x_{i-1} - g(y_i) = \alpha x_{i-1}$

soit $(\lambda_{i-1} - \lambda_i - \alpha) x_{i-1} = g(y_i) - y_{i-1}$

Or $g(y_i) - y_{i-1} \in \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_{i-2}\})$ d'où : $\underline{\lambda_i = \lambda_{i-1} - \alpha}$

• On en déduit facilement : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\underline{\lambda_i = \lambda - (i-1)\alpha}$

• La matrice de $f$ étant triangulaire supérieure, les $\lambda_i$ sont donc les <u>valeurs propres de $f$</u> ; étant toutes distinctes (car $\alpha \neq 0$), <u>$f$ est diagonalisable</u>.

e) Soit $x \neq 0$ tq $f(x) = \mu x$ avec $\mu \neq \lambda$.
Alors $fg(x) - gf(x) = \alpha g(x)$ donne $f[g(x)] = (\mu + \alpha) g(x)$
Or, on ne peut avoir $g(x) = 0$, car sinon $x$ serait colinéaire à $x_1$ et $\mu = \lambda$ !
<u>$g(x)$ est donc bien un vecteur propre de $f$, associé à la vp $\mu + \alpha$</u>.

f) • Si on avait $g^{n-1}(e_n) = 0$, alors $e_n \in \mathrm{Ker}\, g^{n-1} = \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots x_{n-1}\})$
Si on note $f'$ l'endo. induit par $f$ sur $\mathrm{Ker}\, g^{n-1}$, on aurait donc : $f'(e_n) = \lambda_n e_n$
<u>Mais</u> $f'$ est diagonalisable (cf. cours), et ses valeurs propres sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ : il y a donc <u>contradiction</u>.

• $\{e_1, \dots e_n\}$ base de $E$ se démontre alors comme dans 2.b.

• et, en reprenant les résultats du 2.b (en remplaçant $x_k$ par $e_k$), on obtient que $\underline{A = M(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$

• De plus, on a : $\begin{cases} g(e_1) = g^n(e_n) = 0 \\ g(e_k) = e_{k-1} \text{ si } k \in [\![2, n]\!], \end{cases}$

$$\text{donc} \quad \underline{B = M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 \; \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}$$

---

<u>PARTIE C :</u>

1 ⓐ • Le cas $\alpha=0$ et $\beta=0$ donne $\underline{h=0}$ : $h$ est donc nilpotent

• Si $\underline{\beta=0}$ et $\alpha\neq 0$, alors on a $[g,f]=-\alpha f$, donc $f$ est nilpotent d'après la partie précédente, et $\underline{h=\alpha f \text{ est aussi nilpotent}}$.

• Si $\underline{\beta\neq 0}$, soit $g_1 = g+\frac{\alpha}{\beta}f$. Alors $[f,g_1]=[f,g]+\frac{\alpha}{\beta}\underbrace{[f,f]}_{=0}$

$= \alpha f+\beta g = \alpha g_1$

et $h=[f,g]=[f,g_1]$.

On est donc ramené au cas précédent, et $h$ est nilpotent.

ⓑ $\underline{1^{er}\text{ cas}}$ : $\alpha=\beta=0$, c'est à dire $\underline{f \text{ et } g \text{ commutent}}$.

Puisque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $f$ possède au moins une valeur propre $\lambda$ ; $gf=fg$, donc $g$ laisse stable le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ ; l'endo. de $E_\lambda(f)$ induit par $g$ possède alors aussi une valeur propre (car $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) $\mu$, c'est-à-dire : $\exists x\neq 0$, $x\in E_\lambda(f)$ tq $g(x)=\mu x$.

$\underline{x \text{ est donc bien un vecteur propre commun à } f \text{ et } g}$.

$\underline{2^{e}\text{ cas}}$ : $\alpha\neq 0$, $\beta=0$.

Alors $[f,g]=\alpha f$ et, puisque $\alpha\neq 0$, $f$ est nilpotent. Donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $\geqslant 1$.

De plus : $x\in\operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow fg(x)-\alpha g f(x)=0 \Rightarrow f[g(x)]=0$ d'où $\operatorname{Ker} f$ est stable par $g$.

L'endo. induit par $g$ sur $\operatorname{Ker} f$ possède alors un vecteur propre, qui est aussi un vecteur propre de $f$ pour la valeur propre 0, $\underline{\text{d'où le résultat}}$

$\underline{3^{e}\text{ cas}}$ : $\beta\neq 0$.

On sait que $h=[f,g]=\alpha f+\beta g$, d'où $[f,h]=\alpha\underbrace{[f,f]}_{=0}+\beta[f,g]$

$=\beta[f,g]=\beta h$.

On a donc : $[f,h]=\beta h$ et on est ramené au cas précédent : il existe un vecteur propre commun à $f$ et $h$, c'est-à-dire $x\neq 0$ tel que : $f(x)=\lambda x$ et $h(x)=\mu x$.

On a alors $\alpha f(x)+\beta g(x)=\mu x$ soit $g(x)=\frac{1}{\beta}(\mu-\alpha\lambda)x$, et $x$ est aussi un vecteur propre de $g$ : $\underline{\text{cqfd}}$.

---

2 ⓐ (i) Par hypothèse, $fg-gf=\alpha f+\beta g$ avec $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$. En "composant" par $g$ à gauche, compte tenu de $g^2=g$, on trouve :

on obtient : $gfg - gf = \alpha gf + \beta g$ , d'où $(gf)g = (\alpha+1)gf + \beta g$.

D'où : $(fg - \alpha f - \beta g)g = (\alpha+1)gf + \beta g$

" $(1-\alpha) fg = (\alpha+1) gf + 2\beta g$

" $(1-\alpha)(gf + \alpha f + \beta g) = (\alpha+1) gf + 2\beta g$

soit enfin : $\underline{2\alpha gf + \beta(1+\alpha) g = (1-\alpha)\alpha f}$.

(ii) • Si $y \in \mathrm{Im} f$ : $f(y) = y$ (car $f$ projecteur) d'où $y = \dfrac{2\alpha gf + \beta(1+\alpha) g}{(1-\alpha)\alpha}(y)$

soit $y = \dfrac{2\alpha + \beta(1+\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} g(y)$ , et $y \in \mathrm{Im} g$. Donc $\underline{\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} g}$

• On a alors : $\forall x \in \mathrm{Ker} f$ , $gf(x) = f(x) = 0$

$\forall x \in \mathrm{Im} f$ , $gf(x) = g(x) = x = f(x)$ (car $x \in \mathrm{Im} f$ et à $\mathrm{Im} g$)

donc $gf$ et $f$ coïncident sur $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$, supplémentaires. D'où $\underline{gf = f}$

(iii) • On a : $fg = gf + \alpha f + \beta g = (\alpha+1) f + \beta g$ et, en multipliant par $f$ à droite :

$fgf = (\alpha+1) f^2 + \beta gf$ d'où $f = (\alpha+1+\beta) f$ car $gf = f$

d'où $\underline{\alpha + \beta = 0}$ ($f$ non nul)

• On a $2\alpha gf + \beta(1+\alpha) g = \alpha(1-\alpha) f$ d'où $2\alpha f + \beta(1+\alpha) g = \alpha(1-\alpha) f$

d'où, puisque $\beta = -\alpha$ : $-\alpha(1+\alpha) g = -\alpha(1+\alpha) f$.

Puisque $\alpha \neq 0$ et $f \neq g$, on en tire $\underline{\alpha = -1}$

• On a donc : $fg - gf = -f + g$ et $gf = f$, d'où $fg = g$.

On en déduit $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f$ et, par suite $\underline{\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g}$.

(iv) Soient $f, g$ des projecteurs tels que $gf = f$ et $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im} f$. Alors :

$\forall x \in \mathrm{Ker} g$ $fg(x) = g(x) = 0$

$\forall x \in \mathrm{Im} g$ $fg(x) = f(x) = x = g(x)$

donc $fg$ et $g$ coïncident sur $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} g$, supplémentaires.

Par suite : $fg = g$ d'où $\underline{[f,g] = -f + g}$.

---

b (i) De l'égalité : $2\alpha gf + \beta(1+\alpha) g = \alpha(1-\alpha) f$ , on tire, puisque $gf = fg - \alpha f - \beta g$

$2\alpha fg + \beta(1-\alpha) g = \alpha(\alpha+1) f$

On a alors :

• si $x \in \mathrm{Ker} g$, $g(x) = 0$ d'où $\alpha(\alpha+1) f(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$ : $\underline{\mathrm{Ker} g \subset \mathrm{Ker} f}$

- Si $x \in \operatorname{Ker} g$, $fg(x) = f(x) = 0$
  Si $x \in \operatorname{Im} g$ $fg(x) = f(x)$ d'où $\underline{fg = f}$
- En multipliant l'égalité $gf = fg - \alpha f - \beta g$ par $f$ à gauche, on a :
  $fgf = f^2g - \alpha f^2 - \beta fg$ d'où, compte tenu de $fg = f$ et $f^2 = f$
  $(\alpha+\beta)f = 0$ d'où $\underline{\alpha + \beta = 0}$
- L'égalité $2\alpha fg + \beta(1-\alpha)g = \alpha(\alpha+1)f$ donne $2\alpha f + \beta(1-\alpha)g = \alpha(\alpha+1)f$

d'où, puisque $\beta = -\alpha$, $\alpha(1-\alpha)f = \alpha(1-\alpha)g$.
Or $f \neq g$ et $\alpha \neq 0$, d'où $\underline{\alpha = 1}$

- On a donc $fg - gf = f - g$, d'où $gf = g$ et on en tire facilement $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$,

d'où finalt $\underline{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g}$.

c) Compte tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que le cas $\alpha = 0$ est impossible.
Si on avait $\alpha = 0$, soit $fg - gf = \beta g$, on aurait, en multipliant à gauche, puis à droite par $g$ : $\begin{cases} gfg - gf = \beta g \\ fg - gfg = \beta g \end{cases}$ d'où $fg = gf$ (et $\beta = 0$) $\underline{\text{ce qui est exclu}}$.

---

## PARTIE D

1) • $(\alpha+\beta)[g,h] = \alpha[g,h] + \beta[g,h] = [\alpha g, h] + [g, \beta h]$

$$= [[f,g],h] + [g,[f,h]]$$

$$= (fg - gf)h - h(fg - gf) + g(fh - hf) - (fh - hf)g$$

$$= fgh + hgf - ghf - fhg = f(gh - hg) + (hg - gh)f$$

$$= 0 \text{ car } gh - hg = f.$$

• On a donc $(\alpha+\beta)f = 0$ et $f$ non nul, d'où $\underline{\alpha + \beta = 0}$

---

2) a) • On a : $f = gh - hg$ d'où $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(gh) - \operatorname{tr}(hg) = 0$.
La somme des valeurs propres de $f$ est donc $\underline{\text{nulle}}$.
• Or, en reprenant les résultats et notations de B.2, les valeurs propres de $f$ sont les $\lambda - (i-1)\alpha$ pour $1 \leq i \leq n$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda - (i-1)\alpha = 0 \quad \text{soit} \quad n\lambda - \frac{n(n-1)}{2}\alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{(n-1)\alpha}{2}.$$

Les valeurs propres de $f$ sont donc les : $\underline{\frac{\alpha}{2}(n-1-2(i-1)) \text{ pour } 1 \leq i \leq n}$.

- Ces valeurs propres sont toutes distinctes, donc le rang de $f$ vaut $n$ si 0 n'est pas valeur propre, et $n-1$ sinon.

Or, pour qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tq $n-1-2(i-1)=0$, il faut et il suffit que $n$ soit impair.

En conclusion : $\underline{n \text{ pair} \Rightarrow rg(f)=n}$ et $\underline{n \text{ impair} \Rightarrow rg(f)=n-1}$.

(6) Rappelons que la base $(e_1, \dots e_n)$ vue en B.2. est telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!] \quad f(e_k) = [\lambda-(k-1)\alpha]e_k \quad (\text{avec, ici, } \lambda = \alpha \frac{n-1}{2}) \\ g(e_1)=0 \text{ et } \forall k \in [\![2,n]\!],\ g(e_k)=e_{k-1}. \end{cases}$$

On cherche alors les images des $e_k$ par $h$ :

→ $[g,h]=f$ donc $gh(e_1) - h\underbrace{g(e_1)}_{=0} = f(e_1)$ soit $g[h(e_1)] = \lambda e_1$ (1)

On a aussi $[f,h] = \beta h = -\alpha h$ d'où $f\,h(e_1) - h\underbrace{f(e_1)}_{=\lambda e_1} = -\alpha h(e_1)$

d'où $f[h(e_1)] = (\lambda-\alpha)\, h(e_1)$ (2)

$h(e_1)$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = \lambda-\alpha$ d'où : $h(e_1)$ colinéaire à $e_2$.

On a donc $h(e_1) = \mu_1 e_2$ et d'après (1) : $g(\mu_1 e_2) = \lambda e_1 \Rightarrow \mu_1 = \lambda$.

donc : $\underline{h(e_1) = \lambda e_2}$

→ Montrons alors par récurrence qu'il existe $\mu_k$ tel que $h(e_k) = \mu_k e_{k+1}$ $(\underline{1 \leq k \leq n-1})$

- cela est vrai pour $k=1$ d'après ce qui précède (et $\mu_1 = \lambda$)
- si c'est vrai à l'ordre $k-1$, alors :

$[g,h]=f$ donne : $gh(e_k) - h\underbrace{g(e_k)}_{=e_{k-1}} = f(e_k) = \lambda_k e_k$

soit $g[h(e_k)] = (\lambda_k + \mu_{k-1})e_k$

$[f,h] = -\alpha h$ donne alors $f[h(e_k)] = (\lambda_k - \alpha)\, h(e_k)$

On a donc, pour les mêmes raisons qu'auparavant, $h(e_k)$ colinéaire à $e_{k+1}$

soit $\underline{h(e_k) = \mu_k e_{k+1}}$

La relation $g[h(e_k)] = (\lambda_k + \mu_{k-1})\, e_k$ donne alors : $\underline{\mu_k = \mu_{k-1} + \lambda_k}$

On trouve alors : $\underline{\mu_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha}$

→ Il reste (!) à calculer $h(e_n)$. Le même calcul qu'auparavant donne : $f[h(e_n)] = (\lambda_n - \alpha)\, h(e_n)$.

Mais $\lambda_n - \alpha$ n'est plus une valeur propre de $f$, d'où $\underline{h(e_n) = 0}$

Final$^t$, la matrice de $h$ ds la base $(e_1, \dots e_n)$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \mu_1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mu_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha \ \left(\text{et } \lambda = \alpha\frac{(n-1)}{2}\right)!$$

ⓒ Il s'agit ici d'étudier la réciproque : soient $f, g, h$ trois endomorphism tq, si $(e_1, \dots e_n)$ est une base de $E$, on ait :

$$\begin{cases} - \ \forall k \in [\![1,n]\!],\ f(e_k) = \lambda_k e_k \quad \text{avec } \lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha \\ - \ g(e_1) = 0 \ \text{ et } \ \forall k \in [\![2,n]\!],\ g(e_k) = e_{k-1} \\ - \ \forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad h(e_k) = \mu_k e_{k+1} \quad \text{avec } \mu_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha \\ \qquad \text{et } h(e_n) = 0 \end{cases} \qquad \text{et } \lambda = \frac{\alpha(n-1)}{2}$$

alors, il s'agit de vérifier que $[f,g] = \alpha g$, $[f,h] = -\alpha h$, $[g,h] = f$ ce qui se fait, à l'aide de torrides et passionnants calculs, en calculant les images des vecteurs de base par ces endomorphismes ....

ⓓ Soit $F \neq \{0\}$ un s-ev de $E$ stable par $f, g$ et $h$.

$f$ étant diagonalisable, on sait (th. du cours) qu'il existe une base de $F$ faite de vecteurs propres de $f$.

Mais si $e_k \in F$ avec $2 \leq k \leq n-1$, puisque $F$ est stable par $g$, $e_{k-1} \in F$, et puisque $F$ est stable par $h$, $\mu_k e_{k+1} \in F$ d'où $e_{k+1} \in F$ (vérifiez que $\mu_k \neq 0$ pour $\forall k$ !)

Donc $e_k \in F \Rightarrow \{e_{k-1}, e_k, e_{k+1}\} \subset F$.

Finalement, on obtiendra $\{e_1, \dots e_n\} \subset F$, d'où $F = E$.

Donc $\underline{F \text{ stable par } f, g, h \Rightarrow F = \{0_E\} \text{ ou } F = E}$

---

③ ⓐ. On procède par récurrence sur $k$ :

– pour $k=1$, l'égalité s'écrit : $[g,h] = f$, ce qui est vrai.

– supp. l'égalité démontrée au rang $k$, alors :

$$[g, h^{k+1}] = [g, h^k h] = [g, h^k] h + h^k [g, h]$$
$$= k h^{k-1} (f - (k-1) I) h + h^k f$$

soit : $[g, h^{k+1}] = k\,h^{k-1} f h - k(k-1) h^k + h^k f$

Or $fh - hf = -2h$ d'où $[g, h^{k+1}] = k\,h^{k-1}(hf - 2h) - k(k-1)h^k + h^k f$

$$= (k+1)\,h^k f - k(k+1)\,h^k$$

$$= (k+1)\,h^k\,(f - k\,\mathrm{Id}_E) \quad : \underline{\text{cqfd}}$$

• Soit $p$ l'indice de nilpotence de $h$. Alors $h^p = 0$ et $h^{p-1} \neq 0$, d'où la formule précédente donne, pour $k = p$ :

$$h^{p-1}(f - (p-1)I) = 0$$

On en déduit $f - (p-1)I$ non injective (sinon elle serait bijective et $h^{p-1} = 0$)

soit : $\underline{p-1 \text{ valeur propre de } f}$.

(f) • Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$, et $x \neq 0$ un $\vec{vp}$ associé.

On a : $f(x) = \lambda x$ et $fh - hf = -2h$ d'où $fh(x) - h(\lambda x) = -2h(x)$

d'où $f[h(x)] = (\lambda - 2)\,h(x)$

Si on choisit pour $\lambda$ la plus petite valeur propre <u>réelle</u> de $f$ (il en existe au moins une : c'est $p-1$ !), alors $\lambda - 2$ n'est plus valeur propre de $f$ et alors $\underline{h(x) = 0}$

• Soit alors $F = \mathrm{Vect}\left(\{ g^k(x),\ k \in \mathbb{N} \}\right)$

– il est clair que $F$ <u>est stable par $g$</u> !

– <u>$F$ est stable par $f$</u> car : $fg^k - g^k f = 2k g^k$ (cf. B.1.a)

d'où $f[g^k(x)] = g^k[f(x)] + 2k g^k(x) = (\lambda + 2k)\,g^k(x)$ (car $f(x) = \lambda x$)
$\in F$.

– Enfin, <u>$F$ est stable par $h$</u> :

si $k \in \mathbb{N}^*$, $[h, g^k] = [h, g^{k-1} g] = [h, g^{k-1}]g + g^{k-1}[h, g]$

$$= [h, g^{k-1}]g + g^{k-1} f.$$

et il est facile d'en déduire par récurrence : $\forall y \in F$, $[h, g^k](y) \in F$

En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}$, $[h, g^k](x) \in F$. Or $[h, g^k(x)] = h[g^k(x)]$ car $h(x) = 0$

donc $h[g^k(x)] \in F$ pour tout $k$, et $F$ est stable par $h$.

• Comme $F \neq \{0\}$ (car $x \in F$), on en déduit : $\underline{F = E}$

Donc $\{x, g(x), \dots g^{n-1}(x)\}$ est <u>libre</u> (car sinon, il existerait $p$ tel que $F = \mathrm{Vect}(\{x, g(x), \dots g^p(x)\})$ avec $p \leq n-2$ ..). D'où <u>$g$ est de rang $n-1$</u>

et, en appliquant les résultats de la partie B, <u>$f$ est diagonalisable</u>.