DM N^{o}6 (pour le 29/11/2008)

Endomorphismes cycliques

Notations :

Le problème est consacré à l'étude des endomorphismes cycliques, et à certaines de leurs applications.

• Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 2$) (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et I_E l'application identique de E.

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note :

- $\mathcal{C}(u)$ le commutant de u, i.e l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$. On admettra sans démonstration, (facile), que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.
- χ_u le polynôme caractéristique de u.
- pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, défini par $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par : $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k u^k$ (avec $u^0 = I_E$ et $u^k = u \circ u^{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$).

On rappelle que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]\ ,\ P(u) \in \mathcal{C}(u)$.

• Pour tout vecteur $x \in E$, $E_u(x)$ désignera le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille de vecteurs $\{u^p(x),\ p \in \mathbb{N}\}$. $E_u(x)$ s'appelle le sous-espace cyclique associé à u et relatif à x.

Enfin, $u \in \mathcal{L}(E)$ sera dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_u(x) = E$.

PREMIÈRE PARTIE :

Soit x un vecteur de E, et u un endomorphisme de E.

1°) **a)** Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, stable par u et contenant x.

b) On suppose $x \neq 0$. Soit k le plus grand des entiers r non nuls tels que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{r-1}(x)\}$ soit libre.
Justifier l'existence de k et montrer que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ est une base de $E_u(x)$.

c) Montrer que x est vecteur propre de u si et seulement si $\dim(E_u(x))=1$.

2°) On suppose, dans cette question, que u est un endomorphisme cyclique.
Il existe alors $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ soit une base de E (dite adaptée à u).

a) Montrer que $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soient v et w deux éléments de $\mathcal{C}(u)$ tels que $v(x_0) = w(x_0)$.
Montrer que : $v = w$.

c) Montrer que $\{I_E, u, \dots, u^{n-1}\}$ est une base de $\mathcal{C}(u)$.

d) On pose : $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$, où $a_k \in \mathbb{K}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

i) Exprimer, en fonction des a_k, la matrice de u dans la base $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ (une telle matrice s'appelle une matrice compagnon.

ii) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de u.

iii) En utilisant la question **b)**, prouver que : $\chi_u(u) = 0$.

3°) Dans cette question, u désigne un endomorphisme quelconque de E.

a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et soit v l'endomorphisme de F induit par u. Montrer que χ_v divise χ_u.
En déduire que Ker $\big(\chi_v(u) \big)$ est inclus dans Ker $\big(\chi_u(u) \big)$.

b) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur le sous-espace vectoriel $E_u(x)$ un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$.
En déduire que $\chi_u(u)(x) = 0$.

c) Montrer que : $\chi_u(u) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).

DEUXIÈME PARTIE :

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$, et $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

1°) On suppose ici $p = n$, i.e que u possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Soient alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs propres associés, et soit enfin $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.
Montrer que la famille $\{x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$ est libre, et en déduire que u est un endomorphisme cyclique.

2°) On suppose dans cette question u diagonalisable.

a) Montrer qu'un endomorphisme v de E appartient à $\mathcal{C}(u)$ si et seulement si v laisse stable tous les sous-espaces propres de u.

b) En déduire : $\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.

c) Montrer que : $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$.
En déduire que, si la famille $\{I_E, u, \ldots, u^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$, alors u possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

d) Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes, *pour un endomorphisme u diagonalisable* :

(i) u est cyclique.
(ii) la famille $\{I_E, u, \ldots, u^{n-1}\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.
(iii) u possède n valeurs propres distinctes.
(iv) $\dim(\mathcal{C}(u))$ = n

3°) Dans cette question, on suppose u cyclique.

a) Démontrer, en utilisant la matrice de u dans une base convenable, que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{rg}(u - \lambda I_E) \geqslant n-1$.

b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

4°) Dans cette question, on suppose u cyclique.
Soit alors $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ soit une base de E, et A la matrice de u dans cette base.
Soit $P = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que la première colonne de la matrice $P(A)$ est $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$.
En déduire que le polynôme minimal de u est égal, au signe près, à son polynôme caractéristique.
(*Rem : la réciproque de cette propriété est vraie, mais n,'est pas demandée : tout endomorphisme dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est cyclique...*)

5°) Cette question est une application de II.2.b.
Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$), à coefficients dans $\mathbb{K}$, telles que :
$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,,\; \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$
Pour $A \in \mathcal{M}$, on notera $d(A)$ la valeur commune ci-dessus.
Soit enfin J l'élément de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Montrer que $\mathcal{M}$ est le commutant de J, et que d est une forme linéaire sur $\mathcal{M}$.

b) Déterminer les valeurs propres de J, ainsi que leurs ordres de multiplicité. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

TROISIÈME PARTIE :

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On sait, d'après II.1, que u est cyclique. Soit alors $\mathcal{B} = \{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ une base de E adaptée à u, soit A la matrice de u dans $\mathcal{B}$, et $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$, où $a_k \in \mathbb{K}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

1°) On considère le système de vecteurs $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définis par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!] \;, \quad \varepsilon_{n-i} = u^i(x_0) - \sum_{j=0}^{i-1} a_{n-i+j} u^j(x_0) \\ \varepsilon_n = x_0 \end{cases}$$

a) Écrire la matrice T de ce système dans la base $\mathcal{B}$.
En déduire que $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, notée $\mathcal{B}'$.

b) Comparer AT et $T^t A$. En déduire que A est semblable à sa transposée.
Quelle est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$?

2°) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note V_i le vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1})$.

a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, V_i est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i.

b) Soit M la matrice du système $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Montrer que ${}^t AM = MD$, où D est une matrice diagonale que l'on précisera.
Calculer $(M^t M)^{-1}\, {}^t A (M^t M)$.

3°) **a)** Soit v un automorphisme de E tel que $v \circ u \circ v^{-1} = u$. Montrer que la restriction de v à chaque sous-espace propre de u est une homothétie.

b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que : ${}^tMTM = \Delta$.

QUATRIÈME PARTIE :

Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p ($p \geqslant 2$).

1°) **a)** Montrer que, pour tout vecteur x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, le système de vecteurs $\{x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\}$ est libre.

b) En déduire que $p \leqslant n$, et que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

2°) Application 1 : Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.
Soit Δ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X] \ , \ \Delta P = P(X+1) - P(X)$$

a) Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$.

b) Déterminer son noyau, son image. Montrer que Δ est cyclique.

c) Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui, à tout polynôme P, associe son polynôme dérivé P'.
Montrer que D est élément de $\mathcal{C}(\Delta)$.

d) En déduire qu'il existe des réels $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$, uniques , tels que $D = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta_i$.

3°) Application 2 : Déterminer toutes les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec la matrice N carrée d'ordre n définie par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$
