DS N^{o}2 (le 04/10/2008)

Dans tout le problème :

E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

Si u est un endomorphisme de E, on note $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (application identique de E), et, pour tout entier $n > 0$, on note u^n l'endomorphisme $u\mathbf{o}u\mathbf{o}\ldots\mathbf{o}u$ (itéré n fois).

q désigne un nombre complexe non nul tel que, pour tout entier $n > 0$, $q^n \neq 1$.

L'objet du problème est de déterminer des triplets (w, u, v) d'endomorphismes de E satisfaisant à certaines relations de commutation.

Première partie :

Dans cette partie, on suppose E de dimension finie n, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1°) Soit u un endomorphisme de E. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrivant sous la forme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par : $P(u) = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i$.

On note : $I(u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(u)$ soit l'endomorphisme nul :

$$I(u) = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) = 0\}$$

a) Montrer que, si P et Q sont deux polynômes, on a

$$P(u)\mathbf{o}Q(u) = Q(u)\mathbf{o}P(u) = (PQ)(u)$$

En déduire que $I(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

b) Montrer que cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$ (on pourra considérer, dans $\mathcal{L}(E)$, la famille $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$).

c) En déduire qu'il existe un polynôme normalisé et un seul, que l'on notera Π_u, tel que $I(u)$ soit exactement l'ensemble des multiples de Π_u dans $\mathbb{K}[X]$.

d) Déterminer Π_u lorsque u est un projecteur, puis lorsque u est une symétrie.

e) Soit λ une racine de Π_u dans $\mathbb{C}$. Démontrer que l'endomorphisme $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

f) **i)** En déduire le résultat suivant :
"si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et il existe $x \in E,\ x \neq 0$, tels que $u(x) = \lambda x$ ".

ii) Montrer, à l'aide d'un exemple, que ce résultat peut tomber en défaut si on ne suppose plus E de dimension finie (*on pourra considérer un endomorphisme très simple de* $\mathbb{C}[X]$).

iii) Montrer, à l'aide d'un exemple, que ce résultat peut tomber en défaut si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ (*on pourra considérer un endomorphisme très simple de* $\mathbb{R}^2$).

g) Réciproque : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne soit pas injectif. Démontrer que λ est racine de Π_u (*on pourra, pour x non nul appartenant au noyau de $u - \lambda Id_E$, calculer* $\Pi_u(u)(x)$).

2°) Soit u un endomorphisme de E, tel que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ soit une matrice diagonale à éléments diagonaux tous distincts.
Montrer que, si v est un endomorphisme de E qui commute avec u ($u\mathbf{o}v = v\mathbf{o}u$), alors la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est elle aussi diagonale.

3°) Soient $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E.

a) Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par $u_1, \ldots, u_p$ sont $\{0\}$ et E, alors tout endomorphisme v de E qui commute avec $u_1, \ldots, u_p$ est une homothétie (*on pourra, après l'avoir démontré, utiliser le fait que, si $\lambda \in \mathbb{C}$, Ker$(v - \lambda Id_E)$ est stable par les u_i*).

b) On étudie ici un exemple qui permet de montrer que la réciproque de cette propriété est fausse.

i) Soient (x_1, x_2, x_3) trois vecteurs de $\mathbb{C}^2$ deux à deux linéairement indépendants. Soient u_1, u_2 les endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ définis par :

$$u_1(x_1) = 0,\ u_2(x_2) = 0,\ u_1(x_3) = u_2(x_3) = x_3$$

Dire pourquoi il est possible de définir ainsi deux endomorphismes de $\mathbb{C}^2$.
Que peut-on dire d'un endomorphisme v de $\mathbb{C}^2$ qui commute avec u_1 et u_2 ? (*utiliser la question I.2*).
Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^2$ stables par u_1 et u_2 ?

ii) Conclure.

Seconde partie :

Dans cette partie également, on suppose E de dimension finie n, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On note w_0 et v_0 les endomorphismes de E définis comme suit :

$$\forall p \in [\![1, n]\!]\ ,\ w_0(e_p) = q^{n+1-2p} e_p\ ,\ v_0(e_p) = \begin{cases} e_{p+1} & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p = n \end{cases}$$

1°) Déterminer l'endomorphisme $w_0\mathbf{o}v_0 - q^{-2} v_0\mathbf{o}w_0$.

2°) Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par v_0 sont : $\{0\}$ et les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(\{e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\})$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Quels sont les sous-espaces vectoriels de E stables par w_0 *et* v_0 ?

On définit un troisième endomorphisme u_0 de E par :

$$\forall p \in [\![1, n]\!]\ ,\ u_0(e_p) = \begin{cases} (q - q^{-1})^{-2}(q^{p-1} - q^{1-p})(q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) e_{p-1} & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

3°) Calculer $w_0\mathbf{o}u_0 - q^2 u_0\mathbf{o}w0$.

4°) Vérifier la relation : $u_0\mathbf{o}v_0 - v_0\mathbf{o}u_0 = (q - q^{-1})^{-1}(w_0 - w_0^{-1})$.

5°) Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par u_0, v_0 et w_0.

Troisième partie :

Dans cette partie, on désigne par w et u deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{rl} i) & w\mathbf{o}u = q^2 u\mathbf{o}w \\ ii) & w \text{ est inversible} \\ iii) & u \text{ est non nul} \end{array}$$

Pour tout nombre complexe λ, on pose

$$W_\lambda = \mathrm{Ker}(w - \lambda \mathrm{Id}_E) \quad , \quad U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

1°) Vérifier les relations :

$$u(W_\lambda) \subset W_{q^2\lambda} \quad , \quad w(U_\lambda) \subset U_{q^{-2}\lambda}$$

2°) **a)** Montrer que, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des complexes deux à deux distincts, la somme des sous-espaces vectoriels $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_p}$ est directe.

b) Déduire des deux questions précédentes que, si λ est non nul, U_λ est réduit à $\{0\}$.

3°) En déduire, à l'aide de I.1, qu'il existe un entier $r > 1$ tel que $\Pi_u = X^r$. Que peut-on en conclure pour u ?

4°) A l'aide d'un résultat de la partie I que l'on précisera, montrer qu'il existe un complexe λ tel que $W_\lambda \cap \mathrm{Ker} u \neq \{0\}$.

5°) On suppose E de dimension 2, et on se propose de démontrer l'existence d'une base (e_1, e_2) de E vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) $w(e_1) = \lambda e_1$ où λ est un nombre complexe convenable
(P2) $w(e_2) = q^{-2}\lambda e_2$
(P3) $u(e_1) = 0$
(P4) $u(e_2) = e_1$

a) Montrer qu'il existe un vecteur e_1' non nul et un scalaire λ tels que l'on ait :

$$w(e_1') = \lambda e_1' \quad \text{et} \quad u(e_1') = 0$$

On notera e_2' un vecteur non colinéaire à e_1'.

b) Montrer que le vecteur $u(e_2')$, que l'on notera e_1, est non nul et colinéaire à e_1'.

c) Montrer qu'il existe un scalaire β tel que

$$w(e_2') = \beta e_1 + q^{-2}\lambda e_2'$$

d) Trouver un scalaire α tel que les vecteurs e_1 et $e_2 = e_2' + \alpha e_1$ répondent à la question.

Quatrième partie :

Dans cette partie, on considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ et on considère un triplet (w, u, v) d'endomorphismes de E satisfaisant aux 5 conditions suivantes :

i) w est inversible et $w^2 \neq \mathrm{Id}_E$
ii) $w\mathbf{o}u = q^2 u\mathbf{o}w$
iii) $w\mathbf{o}v = q^{-2} v\mathbf{o}w$
iv) $u\mathbf{o}v - v\mathbf{o}u = (q - q^{-1})^{-1}(w - w^{-1})$
v) les seuls sous-espaces vectoriels de E stables à la fois par u, v, w sont $\{0\}$ et E

1°) Vérifier que, pour tout entier $m > 0$, on a :

$$u\mathbf{o}v^m - v^m\mathbf{o}u = (q - q^{-1})^{-2}(q^m - q^{-m})v^{m-1}\mathbf{o}(q^{1-m}w - q^{m-1}w^{-1})$$

Dans ce qui suit, on note ν_1 un vecteur non nul de E, tel que $u(\nu_1) = 0$, et tel qu'il existe un scalaire λ tel que $w(\nu_1) = \lambda\nu_1$. Puis, pour tout entier $m > 0$, on pose $\nu_m = v^{m-1}(\nu_1)$.

2°) Justifier, à l'aide de questions précédentes que l'on citera précisément, l'existence d'un tel vecteur ν_1 et d'un tel scalaire λ.

3°) Calculer $w(\nu_m)$.

4°) Démontrer la relation :

$$\forall m \geqslant 2\ ,\ u(\nu_m) = (q - q^{-1})^{-2}(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m}\lambda - q^{m-2}\lambda^{-1})\nu_{m-1}$$

5°) Démontrer les assertions suivantes :

a) Ceux des vecteurs ν_m qui sont non nuls sont linéairement indépendants.

b) Il existe $m_0 \geqslant 1$ tel que $\nu_m = 0$ pour tout $m > m_0$ et que $\nu_1, \ldots, \nu_{m_0}$ soient linéairement indépendants.

c) On a $m_0 = n$.

d) On a $\lambda = \pm q^{n-1}$.

6°) Comparer le triplet (w, u, v) ave le triplet (w_0, u_0, v_0) de la deuxième partie.

Librement adapté et complété à partir de : X, MP, 2007
