CROCHET DE LIE

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Si $a, b \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a,b] = ab - ba$.

Pour $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on note θ_a l'endomorphisme de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ défini par
$$\theta_a(b) = [a,b] = ab - ba.$$

On admettra le *théorème de décomposition des noyaux* (cf. problème n°2) :

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leur multiplicité respective ; alors
$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{I}d)^{\alpha_i}.$$

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du « crochet » $[\ ,\ ]$.

I - Exemple.

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{E} = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n, à coefficients dans $\mathbb{C}$, et l'on pose pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$
$$e(\mathrm{P}) = \mathrm{P}' \quad , \quad f(\mathrm{P}) = -n\mathrm{XP} + \mathrm{X}^2\mathrm{P}' \quad , \quad h(\mathrm{P}) = -n\mathrm{P} + 2\mathrm{XP}'.$$

- **a)** Calculer $[e,h]$, $[f,h]$, $[e,f]$.
- **b)** Soit $\mathrm{F} \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par e et f, et soit $\mathrm{P} \neq 0$ un élément de F. En examinant les degrés des images successives de P par e et par f, prouver que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

E désigne maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère 3 éléments de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ notés e, f, h et vérifiant :
$$[e,h] = 2e \quad , \quad [f,h] = -2f \quad , \quad [e,f] = h \quad , \quad (e,f,h) \neq (0,0,0).$$
On note $\mathscr{L}_3$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qu'ils engendrent.

2. Prouver que $\dim \mathscr{L}_3 = 3$.

3. Soit $\mathscr{I}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_3$ tel que
$$\forall g \in \mathscr{I}, \forall a \in \mathscr{L}_3, [a,g] \in \mathscr{I}.$$

- **a)** Montrer que si $\mathscr{I}$ contient un élément $g = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$.
- **b)** Prouver que si $\mathscr{I} \neq \{0\}$ alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente).

4.
- **a)** Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h.
- **b)** En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5.
- **a)** Calculer $h\left(f^k(x)\right)$ où k est un entier naturel.
- **b)** En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.
- **c)** Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e\left(f^k(x)\right)$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathscr{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E. On pose
$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^m(x)\right)$$

- **a)** Justifier que F est stable par e, f et h. Que peut-on en déduire ?
- **b)** Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left(x, f(x), \ldots, f^m(x)\right)$ est une base de E.
- **c)** Déterminer la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$.
- **d)** En examinant $\mathrm{tr}\, h$, prouver que $\alpha = -m$.

7. Déterminer la matrice de e dans la base $\mathscr{B}$.

II - Préliminaire à l'étude de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie E désigne toujours un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Prouver qu'un endomorphisme a de E possède une seule valeur propre si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda \mathrm{I}d$ soit nilpotent.

2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents commutant entre eux. Prouver que $u - v$ est nilpotent.

3. Soit u un endomorphisme de E ; on pose $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\, u^p$ et $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, u^p$.

a) Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_u = \mathrm{Ker}\, u^{p_0}$ et $\mathcal{G}_u = \mathrm{Im}\, u^{p_0}$.

b) Prouver que $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{G}_u$ sont deux sous-espaces supplémentaires, stables par u, tels que u restreint à $\mathcal{N}_u$ soit nilpotent et que u restreint à $\mathcal{G}_u$ soit bijectif.

c) Prouver réciproquement que si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à F soit nilpotente et la restriction de u à G bijective, alors $\mathrm{F} = \mathcal{N}_u$ et $\mathrm{G} = \mathcal{G}_u$.

On vient donc de prouver l'existence et l'unicité de tels sous-espaces F et G.

III - Étude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note θ_{A} l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$$\theta_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}.$$

1. a) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_{A} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ sont les valeurs propres de A.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{MA}$.

Étant donnée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère λ et μ deux valeurs propres de A de multiplicité respective α et β. On pose
$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} = \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{V}, \mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^{\alpha} ; \mathrm{V} \in \mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n\right)^{\beta}\right\}.$$

2. a) Prouver que le sous-espace $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stable par θ_{A}.

b) Prouver que la restriction de θ_{A} à $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on remarquera que $\theta_{\mathrm{A}} = \phi_{\mathrm{A}} - \psi_{\mathrm{A}}$, et on utilisera les résultats des questions II.1 et II.2).

3. a) Soit $\mathscr{F} = \left(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p\right)$ et $\mathscr{G} = \left(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_q\right)$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Prouver que si les familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont libres, la famille $\left\{\mathrm{U}_i\,{}^t\mathrm{V}_j, i \in [1,p], j \in [1,q]\right\}$, qu'on notera $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, est libre.

b) On note $\mathscr{B}_\lambda$ une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^{\alpha}$ et $\mathscr{B}^*_\mu$ une base de $\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n\right)^{\beta}$.
Prouver que la famille $\mathscr{B}_\lambda \otimes \mathscr{B}^*_\mu$ est une base de $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$.

c) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\lambda,\mu) \in (\mathrm{Sp}\mathrm{A})^2} \mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ où SpA désigne l'ensemble des valeurs propres de A.

4. Déterminer $\mathcal{N}_{\theta_{\mathrm{A}}}$ (on utilisera la question II.3°c).

5. a) Soit $p_1, \ldots, p_n$ des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = n$. Prouver que $\sum_{k=1}^{n} p_k^2$ est minimal lorsque $\forall k \in [1,n], p_k = 1$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\dim \mathcal{N}_{\theta_{\mathrm{A}}}$ soit minimale.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆