DEUX PETITS PROBLÈMES SUR LES MATRICES

PROBLÈME 1 :

NOTATIONS

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (n entier $\geqslant 2$). 0_n désigne la matrice nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

On identifiera une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. (on se permettra ainsi d'écrire $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$).

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés des groupes multiplicatifs de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: un tel groupe est un sous-ensemble G de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ qui a une structure de groupe pour la multiplication interne des matrices ; l'élément neutre de G sera noté E; le symétrique de $A \in G$ dans G sera noté A'. On a donc, pour tout $A \in G$: $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

On notera (cf 1ère partie) qu'un tel groupe n'est pas nécessairement un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, et qu'une matrice A peut avoir un symétrique dans G sans être inversible dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; de même, E n'est pas nécessairement la matrice identité.

PARTIE A

Soit P une matrice de projection (c'est-à-dire telle que $P^2 = P$).

1°) Montrer que l'ensemble $\{P\}$ forme un groupe multiplicatif de cardinal 1.

2°) Montrer que, si $P \neq 0_n$, l'ensemble $\{-P,P\}$ forme un groupe multiplicatif de cardinal 2.

PARTIE B

1°) Soient $A,B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, et $C = AB$. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(C)$, et que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A)$.

Soit G un groupe multiplicatif de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, non réduit à $\{0_n\}$, et soit E son élément neutre.

2°) Montrer que, pour tout $A \in G$, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(E)$.

3°) Montrer que, pour tout $A \in G$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(E)$.

4°) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(E) \oplus \mathrm{Ker}(E)$, et que E est un projecteur.

PARTIE C

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels propres (i.e non triviaux) et supplémentaires de $\mathbb{R}^n$, de bases respectives $(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ et $(v_{k+1},\ldots,v_n)$. Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{B} = (u_1,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_n)$. Soit H l'ensemble des matrices A de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que Ker(A)=V et Im(A)=U.

1°) Quelle est la matrice E dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur U de direction V ?

2°) Montrer que, pour tout $A \in H$, la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où A_1 est une matrice carrée d'ordre k inversible dans $\mathbb{M}_k(\mathbb{R})$.
Montrer que, réciproquement, si la matrice de A dans la base $\mathcal{B}$ est de cette forme, alors A appartient à H.

3°) Déduire des questions précédentes que H est un groupe multiplicatif de matrices, isomorphe à $GL_k(\mathbb{R})$.

4°) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

- **a)** A appartient à un groupe multiplicatif.
- **b)** A et A^2 ont même rang.
- **c)** A et A^2 ont la même image.
- **d)** A et A^2 ont même noyau.
- **e)** $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

PARTIE D

1°) En utilisant les résultats des parties B et C, montrer que, si une matrice non nulle A appartient à deux groupes multiplicatifs de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, G_1 et G_2, d'éléments neutres respectifs E_1 et E_2, et que si A'_1 et A'_2 sont les symétriques respectifs de A dans G_1 et G_2, alors : $E_1 = E_2$ et $A'_1 = A'_2$.

2°) Dans le cas $n = 3$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A appartient à un groupe multiplicatif, et déterminer E et A'.

(D'après X, 1986, extrait)

PROBLÈME 2 :

E désigne la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de$E$.

PARTIE A

Dans cette partie, F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 3, et stable pour la multiplication. On veut montrer : $I \in F$, et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $I \notin F$.

1°) Montrer que F et $\mathbb{R}I$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (on rappelle que $\mathbb{R}I$ désigne la droite vectorielle engendrée par I, c'est-à-dire l'ensemble des matrices scalaires).

2°) On désigne alors par p la projection sur $\mathbb{R}I$ parallèlement à F.
a) Montrer que : $\forall (M, M') \in E^2$, $p(MM') = p(M)p(M')$.

b) En déduire que si M est un élément de E tel que $M^2 \in F$, alors M appartient à F.

3°) Montrer que M_2 et M_3 appartiennent à F, ainsi que M_1 et M_4.

4°) Conclure.

PARTIE B

Dans cette partie, on étudie certains endomorphismes de E.
On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

1°) A tout élément A de E, on associe l'application $\phi(A)$ de E dans E, définie par :

$$\forall M \in E \ , \phi(A)(M) = AM - MA.$$

a) Vérifier rapidement que, pour tout $A \in E$, $\phi(A)$ appartient à $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que l'application ϕ ainsi définie de E dans $\mathcal{L}(E)$, qui à $A \in E$ associe $\phi(A)$, est linéaire. Déterminer $\phi(\lambda I)(\lambda \in \mathbb{R})$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\phi(A) = 0$.
Montrer que $b = c = 0$ et que $a = d$ (on pourra utiliser les matrices M_i).

d) Déduire du b et du c que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}I$ et que $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de dimension 3.

2°) On pose : $D = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall (M,N) \in E^2 \ , \ u(MN) = u(M)N + Mu(N)\}$.

a) Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi)$ est incluse dans D.

3°) Soit u un élément de D.

a) Montrer que $u(I) = 0$.

b) Calculer le produit M_2M_2; en déduire qu'il existe deux réels x et y tels que $u(M_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$.
(on pourra poser $u(M_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.)

c) De même, montrer qu'il existe deux réels z et t tels que $u(M_3) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$.

d) Montrer que : $y + z = 0$.

e) Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{cases} a - d = y = -z \\ c = -x \\ b = -t \end{cases}$.
Les réels x,y,z,t ayant été définis aux b et c ci-dessus, montrer que $\phi(A) = u$.

4°) En conclure : $\mathrm{Im}(\phi) = D$.

(D'après INA, 1989, extrait)