DM N°1 (pour le 19/09/2014)

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et, si n est un entier, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On dira qu'un endomorphisme u de $\mathbb{K}[X]$ vérifie la condition $(\mathcal{D})$ si :

$$\begin{cases} u(P) = 0 & \text{si } P \text{ est constant} \\ \deg(u(P)) = \deg(P) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

PARTIE A

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant la condition $(\mathcal{D})$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E_n = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \ , \ P(0) = 0\}$.

a) Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelle est sa dimension ?

b) Montrer que la restriction de u à E_n est un isomorphisme entre E_n et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

c) En déduire qu'il existe une et une seule base de $\mathbb{K}[X]$, notée $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle que :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \deg(P_k) = k & \qquad [\text{condition } (\mathcal{B})] \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ P_k(0) = 0 \end{cases}$$

et telle que $u(P_k) = P_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (une telle base est dite *adaptée* à u).

3. Réciproquement, montrer que si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille vérifiant la condition $(\mathcal{B})$, il s'agit d'une base de $\mathbb{K}[X]$ et qu'il existe un et un seul endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant la condition $(\mathcal{D})$ tel que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit adaptée à u.

4. On pose $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u^{p+1} = u^p \circ u$.
Montrer que, pour tout polynôme, Q de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$Q = \sum_{k=0}^{n} u^k(Q)(0)P_k \quad \text{(formule de Taylor-Mac-Laurin relative à } u)$$

5. *Exemple 1 :* Lorsque u est l'opérateur de dérivation (c'est-à-dire $u(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$), trouver la base adaptée. Que devient alors la formule ci-dessus ?

6. *Exemple 2 :* On note : $N_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k = \dfrac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$
(*polynômes de Newton, ou de Hilbert).*

a) Vérifier que la famille $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition $(\mathcal{B})$.

b) Démontrer que l'opérateur associé est l'application $\Delta \ : \ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
(Δ est appelé *opérateur de différence de pas 1*)

PARTIE B

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$, vérifiant la condition $(\mathcal{D})$. On appelle commutant de u, noté $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes φ de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\varphi \circ u = u \circ \varphi$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$, et que si φ, ψ appartiennent à $\mathcal{C}(u)$ alors $\varphi \circ \psi$ appartient encore à $\mathcal{C}(u)$.

2. Montrer que la famille $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre d'éléments de $\mathcal{C}(u)$.

3. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, et $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ (*on justifiera cette écriture*).

Montrer que φ appartient à $\mathcal{C}(u)$.

4. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base adaptée à u, et $\varphi \in \mathcal{C}(u)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = \varphi(P_k)$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'on ait :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} P_k$$

b) En déduire que : $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$.

c) Caractériser alors $\mathcal{C}(u)$.

5. **a)** Soient $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ et $\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k$.

Déterminer en fonction des a_k et des b_k les scalaires c_n tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u^n$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ soit inversible.

6. Soit d l'opérateur de dérivation (*cf. A.5*) et Δ l'opérateur de différence de pas 1 (*cf. A.6*).

a) Déterminer explicitement les a_k tels que : $d = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \Delta^k$.

b) Déterminer explicitement les b_k tels que : $\Delta = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k d^k$.

c) *Pour les 5/2 :* A quoi vous font penser ces résultats ?

7. Soit $a \in \mathbb{K}$, et θ_a l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(X+a)$ (*on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un endomorphisme*).

a) Montrer que $\theta_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{a}{k} \Delta^k$, où l'on a posé :

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Montrer que : $\theta_a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} d^k$.

PARTIE C : Applications diverses

(*Les trois questions de cette partie sont indépendantes.*)

1. En considérant θ_1, montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, l'on ait :

$$P = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k)$$

(on déterminera explicitement les a_k).

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q_k tel que $\Delta(Q_k) = X^k$ et $Q_k(0) = 0$.

b) Calculer Q_k pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

c) En déduire des expressions des sommes $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 4$.

3. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, calculer $N_n(k)$ (les N_n ont été définis en **A.6** ; on distinguera successivement les cas : $k \geqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $k < 0$).

Vérifier que $N_n(k)$ est toujours un nombre entier.

b) En déduire, pour tout polynôme P, l'équivalence des propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (i) & \forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ P(x) \in \mathbb{Z} \\ (ii) & \text{Les coordonnées de } P \text{ dans la base } (N_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont entières.} \end{cases}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆

⋆