Corrigé ENAC 2008

3H30

① • $\cos 5\theta = \mathrm{Re}(e^{5i\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^5) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^5\right) = \mathrm{Re}\left(\cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 + 10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5\right)$

$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2$

$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \longrightarrow$ réponse b)

• $\cos\frac{5\pi}{10} = 0$ donc $\cos\frac{\pi}{10}$ est une racine de l'équation $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$. Puisque $\cos\pi/10 \neq 0$, c'est une racine de l'équation : $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$, équation bicarrée dont les racines sont $\pm\sqrt{\frac{10\pm\sqrt{20}}{16}} = \pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt5}{8}}$

Puisque $0 < \cos\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ est la + grde de ces 4 racines soit : $\cos\pi/10 = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{8}}$

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

② Si I a pour affixe z_0, M d'affixe z, M' d'affixe z', la similitude (directe) de centre I qui transforme M et M' est de rapport $\left|\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right|$ et d'angle $\mathrm{Arg}\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right)$. Or $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = \frac{(\sqrt3-1)+i(\sqrt3+1)}{1+i} = \frac12\left[(\sqrt3-1)+i(\sqrt3+1)\right]\left[1-i\right]$

$= \sqrt3 + i$, de module 2, d'argument $\pi/6$

$\boxed{\text{Réponse exacte : a)}}$

---

③ • $\sum_{k=1}^{n}\binom nk \sin^2 k\theta = \sum_{k=1}^{n}\binom nk \frac{1-\cos 2k\theta}{2} = \frac12\sum_{k=1}^{n}\binom nk = \frac12\left[(1+1)^n - 1\right] = \frac{2^n-1}{2} \to$ a) fausse

• $\sum_{k=1}^{n}\binom nk \cos 2k\theta = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom nk e^{2ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[(1+e^{2i\theta})^n - 1\right] = \mathrm{Re}\left[(2\cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)^n - 1\right]$

$= \mathrm{Re}\left[(2\cos\theta)^n e^{in\theta} - 1\right] = (2\cos\theta)^n\cos n\theta - 1 \longrightarrow$ b) fausse

• Donc θ solution ssi $(2\cos\theta)^n\cos n\theta = 1$ soit $\cos n\theta = \frac{1}{2^n\cos^n\theta}$ et $\cos\theta \neq 0$.

Or, déjà pour $n=1$, cette éq. a des solutions (qui ne sont pas celles de la réponse c) !)

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$

---

④ • Il est facile de vérifier que f est bijective de $\mathbb{C}-\{i\}$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$ (résoudre l'éq. $z' = f(z)$ pour $z \neq i$ et $z' \neq 1$)

donc a) d) fausses (1 n'a pas d'antécédent)

• $f(i\mathbb{R})$ n'est pas défini car $f(i)$ n'existe pas donc b) fausse

de même $f(U)$ n'a pas de sens...

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$

---

⑤ • Parmi les 3 pts proposés, 2 peuvent être confondus : c'est le cas si $z = z^2$ ou $z^2 = z^5$ ou $z = z^5$

ce qui donne $z \in \{0, 1, j, j^2, \pm i, \pm 1\}$

Ds le cas $z=1$ par ex., on n'a ni $z \in i\mathbb{R}$, ni $z^3+z^2+z \in i\mathbb{R}$, donc a) est fausse !

(Plus précisément : lorsque z est diff. des complexes ci-dessus, $z \in H \iff \frac{z^5-z}{z^2-z} \in \mathbb{R} \iff z^3+z^2+z \in \mathbb{R}$!)

• b) est fantaisiste ! (déjà faux pour $z=0$ par ex !)

• D'après le calcul précédent $z \in H \iff z^3+z^2+z \in \mathbb{R}$ (cela reste vrai pour les cas particuliers exclus auparavant)

$\iff (x+iy)^3 + (x+iy)^2 + (x+iy) \in \mathbb{R}$

$\iff 3x^2y - y^3 + 2xy + y = 0$

soit $z \in H \iff y=0$ ou $3x^2-y^2+2x+1=0$

$\iff y=0$ ou $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-y^2+\frac{2}{3}=0$

$\iff$ " ou $\dfrac{(x+1/3)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=-1$

C'est certes donc l'hyperbole d'éq. ci-dessus ; cette hyperbole est de centre $\left(-\frac{1}{3},0\right)$, d'axe principal parallèle à Oy, avec $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$; les asymptotes sont les droites données par : $\dfrac{(x+1/3)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$ soit $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}y$.

$\boxed{\text{Réponse exacte : d)}}$

---

6 • (u_n) est évidemment décroissante !

• $v_{n+1}=u_{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=u_n\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{u_n}{2}\sin\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{2}v_n$ → b) vraie

• On a donc : $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}v_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u_2\sin\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^{n-1}}$

d'où $u_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$. Qd $n\to\infty$, $u_n\sim\dfrac{1}{2^{n-1}\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$. Donc $\lim u_n=\frac{2}{\pi}$ et $\lim v_n=0$ → c,d fausses

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

7 • f est évidemment de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}>0$ donc f strictement croissante

$f''(t)=-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{2(1+t^2)-8t^2}{(1+t^2)^3}=-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}$

En $t=0$, on a $f''(0)=+1>0$, donc f ne peut être concave → a) fausse

• $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{t}=0$ → BP de direction Ox → b) faux

• f continue strict. croissante sur $\mathbb{R}^+$; $f(0)=0$ (notez que l'énoncé n'a pas défini f en 0 !! erreur d'énoncé ?? Je le supposerai par la suite..)

et $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ donc f (prolongée en 0 !) est bijective de $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$\forall t\geq 0$, $f'(t)\neq 0$ donc (th. du cours) f^{-1} est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

La "justification" du d) est évidemment farfelue.

$\boxed{\text{Réponse exacte c) (sous réserve)}}$

---

8 On a : $a_n=f^{-1}(1/n)$. $f\nearrow$ donc $f^{-1}\nearrow$ donc $(a_n)\searrow$ ...

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=f^{-1}(0)=0$ car f^{-1} continue en 0. La "justification" du c) est farfelue !

f^{-1} est dérivable en 0, $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$ et $f^{-1}(0)=0$ donc $f^{-1}(t)\underset{t\to 0}{\sim}t$ (d'après la formule de T.Y)

Ainsi $a_n=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et d)}}$

---

9 • f étant continue sur $\mathbb{R}$, $y\longmapsto\int_0^y f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en 0, elle est donc C^1 sur $\mathbb{R}$!

Donc a) est vraie (mais l'énoncé est très confus avec les notations, et pourquoi l'intervalle ouvert ??)

• si F primitive de f, $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_y^{y+a}f(t)dt=\dfrac{F(y+a)-F(y)}{a}=F'(c_y)$ avec $c_y\in\,]y,y+a[$ d'après le t.a.f.

$=f(c_y)$

$\lim\limits_{y\to\infty}f(c_y)=l$ donc b) est vraie

• $\int_0^X [f(t+a) - f(t)]dt = \int_0^X f(t+a)dt - \int_0^X f(t)dt = \int_a^{X+a} f(u)du - \int_0^X f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_X^{X+a} f(t)dt$

donc $\lim_{X\to+\infty} (\sim) = al + \int_a^0 f(t)dt = al - \int_0^a f(t)dt$ → c) fausse

• D'après le calcul précédent appliqué à $f(t) = \text{Arctan}\, t$, avec $l = \pi/2$ et $a = 1$

$$\lim_{X\to\infty} \int_0^X [\text{Arctan}(t+1) - \text{Arctan}\, t]dt = -\int_0^1 \text{Arctan}\, t\, dt + \pi/2$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} -\left([t \,\text{Arctan}\, t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \right) + \pi/2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$ → d) fausse

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et b)}}$

---

(10) • Il semble que le a) fasse appel à la formule de T.L., <u>hors-programme</u> !! Cette formule est (simplifiée) si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

Appliquée à $f(x) = e^x$ entre 0 et x, elle donne :

$$\exists c \in [0,x] \text{ tq } e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$
(ou $[x,0]$)
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$ en posant $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$

↳ a) fausse !

• Ce qui est au programme, c'est la formule de Taylor avec reste intégral qui donne :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On a en particulier :

$$e^x = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^t dt.$$ Puisque $(x-t)^{2n} \geq 0$, on en déduit que $e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$ est du signe de x

↳ c) fausse, d) vraie

et aussi : $$e^x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^t}_{\text{toujours } \geq 0 \text{ (distinguer les cas } x>0,\, x<0)} dt$$

donc b) vraie.

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et d)}}$

$\boxed{1^H}$

---

(11) • $a(x) \underset{a}{\sim} b(x)$ s'écrit : $a(x) = (1+\varepsilon(x))\, b(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to a$

d'où réponse a) ($1+\varepsilon(x) > 0$ pour x au voisinage de a, donc $\ln(1+\varepsilon(x))$ a un sens)

• On a bien $1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x \sim 1 + x$ qd $x \to 0$ (mais c'est stupide d'écrire cela !), puisque les 2 expressions tendent vers 1 !!

Cependant $\ln(1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} + \sin^2 x \sim \frac{x}{2}$ et $\ln(1+x) \sim x$ donc b), c) fausses !

(Quel est l'intérêt du sin dans ce contre exemple, je me le demande ...)

d) Le fait que $|x| \neq 1$ au vois. de 0 ~~n~~'a rien à voir !
En fait, d'après le cours : si $a(x) \underset{a}{\sim} b(x)$ et si $a(x), b(x)$ ne tendent pas vers 1 en a
alors on a $\ln(a(x)) \underset{a}{\sim} \ln(b(x))$

~~Ce qui~~ Ici : $|\sin x| \underset{0}{\sim} |x|$ et $|\sin x|, |x|$ ne tendent pas vers 1 en 0, donc $\ln|\sin x| \sim \ln|x|$
$\longrightarrow$ résultat exacte, "justification" fausse.

$\boxed{\text{Réponse exacte : a)}}$

---

12 . Qd $x \to 0$ $\ln(\cos\alpha x) \sim \cos\alpha x - 1 \sim -\frac{\alpha^2 x^2}{2}$ donc $\frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x} \to \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

. $\left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan 3x} = e^{\tan 3x \ln\left(\tan\frac{3x}{2}\right)}$

Qd $x \to \frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{3x}{2} \to 1$ donc $\ln\tan\frac{3x}{2} \sim \tan\frac{3x}{2} - 1$

et $\tan 3x . \ln\tan\frac{3x}{2} \sim \tan 3x . [\tan(\frac{3x}{2}) - 1] = \frac{2\tan\frac{3x}{2}}{1-\tan^2\frac{3x}{2}} . \left(\tan\frac{3x}{2} - 1\right)$

$= -\frac{2\tan\frac{3x}{2}}{1+\tan\frac{3x}{2}} \underset{x\to\pi/6}{\longrightarrow} -1$

d'où $\left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan 3x} \longrightarrow e^{-1}$

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

13 . f est évident C^∞ sur $\mathbb{R}^+$
. Qd $x \to 0$, $\frac{x-1}{x^2} \to -\infty$ donc $f(x) \to 0 = f(0)$: f continue en 0
. $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) f(x) = \frac{2-x}{x^3} f(x)$ donc b) est vraie.
On a alors $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ (croissances comparées) et le th. de prolg^t des dérivées donne f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et $f'(0) = 0$) $\to$ a) fausse
• c) Le fait que f' s'annule en 2 est évidemment insuffisant ! ~~Et le résultat donné est~~
De plus, sur $[1, +\infty[$, f possède en fait un extremum en 1 et en 2 !!
• d) justification complètement farfelue, donc je n'ai même pas cherché à étudier l'équation...

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

14 $\sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= |x|\left(1+\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \to$ a) fausse
ainsi que c) et d) !!

puis $e^{1/x}\sqrt{x(x+2)} \underset{+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$= x\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+2+o(1)$ $\to$ b vraie

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

15 a) et b) sont fausses : ds l'expression des sommes de Riemann, il manque le terme $\frac{b-a}{n}$!! (juste $\frac{1}{n}$ ...)
(erreur d'énoncé ou piège ???)

Soit $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$ $\quad \ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln n\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(n\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= \ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

(soit $u_n = n\,e^{\frac{1}{n}\sum\cdots}$ $\longrightarrow$ b) fausse)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \int_1^2 \ln u\,du = \left[u\ln u - u\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

donc ~~ln~~ $u_n \sim n\cdot e^{2\ln 2-1} = \frac{4n}{e}$

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$

---

(16) • $t\mapsto 3^{-[t]}$ est continue par morceaux sur $[0,x]$ donc $\int_0^x 3^{[-t]}dt$ existe ; f est bien définie sur $\mathbb{R}$

Cependant, la justification donnée est insuffisante !!

• Si $n\in\mathbb{N}$, $f(n) = \int_0^n 3^{[-t]}dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}3^{[-t]}dt = \sum_{k=0}^{n-1}3^{-k} = \frac{1-3^{-n}}{1-3^{-1}} = 3\cdot\frac{1-3^{-n}}{2}$ $\longrightarrow$ réponse b)

• f étant croissante, c) est vraie

• $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{3}{2}$ donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. Or $\frac{3}{2} > \frac{1}{e\ln 3}$! donc d) fausse

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

~~(17) c'était non nul, l'appl. $(x,y)\mapsto(u,v)$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.~~

~~$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$ Or $x =$~~

(17) • Si g vérifie (P), $x\mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est C^2 et $g''(x) = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}g(x)$

soit $x^2 g''(x) = -g(x)$!

• $h(t) = g(e^t)$ donc : $h'(t) = e^t g'(e^t)$ $\quad h''(t) = e^t\left(g'(e^t) + e^t g''(e^t)\right)$

d'où $(h''-h'+h)(t) = e^{2t}g''(e^t) + g(e^t) = x^2g''(x) + g(x) = 0$ $\longrightarrow$ réponse b)

• l'éq. car. de cette éq. diff. à coeff. constants est $X^2 - X + 1 = 0$, de racines $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

h est donc de la forme $h(t) = e^{t/2}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \sqrt{x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ ...

• d) Donc, si g est solution, elle est de la forme ci-dessus.

Récip^t, si g est de cette forme alors : $g'(x) = \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\left(-a\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2x}\left(b\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[(-a\sqrt{3}+b)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + (b\sqrt{3}+a)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

donc $g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) \iff \begin{cases}\frac{b\sqrt{3}+a}{2} = a\\ \frac{-a\sqrt{3}+b}{2} = -b\end{cases} \iff a = b\sqrt{3}$.

L'ens des sol. de (P) est donc l'ens des f° de la forme

$x\mapsto b\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ et c'est un e.v. de dimension 1 !

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

(18). $C \neq 0$ donc l'appl. $(x,y) \mapsto (u,v)$ est un C^2-difféo. de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \quad \text{Or } x = \frac{u+v}{2} \text{ et } y = \frac{u-v}{2c}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}$$

• l'énoncé ne dit pas que les D. p. secondes sont continues, donc on n'a pas forcément $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$!!

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right). \quad \text{Or } \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = +\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{puis } \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$= +\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4c}\underline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)} \quad \text{Problème...}$$

!!

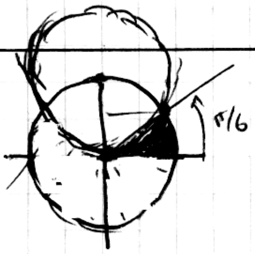
• Ds le d), la f° est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et puisque :

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\left(e^x \operatorname{ch}(cy)\right) - \frac{1}{4c^2}\left(c^2 e^x \operatorname{ch} cy\right) = 0, \text{ f est bien solution}$$

Réponse exacte : d) (et év^t c) si on pense que D.p. continue est un oubli d'énoncé.

---

(19)



$x^2+y^2-2y > 0 \iff x^2+(y-1)^2 > 1$: extérieur du disque..

l'int. des deux cercles est les pts $\left|\begin{matrix}\pm\sqrt{3}/2 \\ 1/2\end{matrix}\right.$ correspondant à $\pi/6$

- a) et b) sont fausses car si $(\rho,\theta) \in \varphi^{-1}(D)$ on a aussi $(-\rho, \theta+\pi) \in \varphi^{-1}(D)$ (par exemple)
Cependant, si on se limite à $\rho > 0$ et $\theta \in [0, \pi/2]$, l'image de D en polaire est bien $\{(\rho,\theta) \text{ tq } 0 \le \theta \le \pi/6,\ 2\sin\theta < \rho \le 1\}$
- c) est fausse de toute façon ($\iint dx\,dy = \iint \rho\, d\rho\, d\theta$)
- $A_D = \int_0^{\pi/6}\int_{2\sin\theta}^{1} \rho\, d\rho\, d\theta$!!

Aucune réponse exacte

(cependant, $A_D = \int_0^{\pi/6}\left(\int_{2\sin\theta}^1 \rho\, d\rho\right)d\theta = \int_0^{\pi/6}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{2\sin\theta}^1 d\theta = \int_0^{\pi/6}\left(\frac{1-4\sin^2\theta}{2}\right)d\theta$

$= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\pi/6} 2\sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{12} - \int_0^{\pi/6}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$ ...)

14

---

(20) a) $(x^{n-2})x - (x^{n-1}-1) = 1$ donc a) exacte

b) farfelu ! Trouvez un contre-exemple vous-même ... ($p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$ est vrai si p est premier !!)

Cependant : le résultat initial est exact ! En effet, montrons par réc. sur $n \geq 2$ que, si $p \mid x^2 - x$ alors $p \mid x^n - x$ par H_n :

- vrai pour $n=2$
- si c'est vrai à l'ordre n, alors $x^{n+1} - x = x(x^n - x) + x^2 - x$ donc $p \mid x^n - x$ et $p \mid x^2 - x$ $\Rightarrow p \mid x^{n+1} - x$: cqfd

c)d) D'après ce qui précède : $6 \mid x^n - x$ pour $\forall n$ ssi $6 \mid x^2 - x$

Or, en écrivant les congruences de x modulo 6 :

x	0	1	2	3	4	5
x^2-x	0	0	2	0	0	2

donc $6 \mid x^2 - x$ ssi $x \equiv 0, 1, 3, 4\ [6]$.

Donc $U = \{6k, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{6k+1, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{6k+3, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{6k+4, k\in\mathbb{Z}\}$

$\boxed{\text{Réponse exacte : a)}}$

---

21 a) Pour X partie fixée, $X \cap Y = \emptyset \iff Y \in \mathcal{P}(\complement_E X)$: il y a donc 2^{n-k} possibilités pour Y (si $n = \text{card}\, E$ et $k = \text{card}\, X$).

Or il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour X, donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$ couples possibles

b) $X \cup Y = E \iff \complement X \cap \complement Y = \emptyset$: il y a donc autant de possibilités que ci-dessus

c) il y a évidemment ~~strictement~~ moins de couples (X, Y) tq $X \cup Y = E$ et $X \cap Y = \emptyset$ que ci-dessus.

Donc le nbre cherché est $< 3^n$!

d) Il y a évidemment ~~pl~~strictement plus de triplets (X, Y, Z) tq $X \cup Y = Z$ que de couples tq $X \cup Y = E$! le nbre cherché est $> 3^n$!!

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et b)}}$

22

Aucune réponse exacte

---

23 • $P(a) = 0 \Rightarrow P(a^2) = P(a+1)P(a) = 0 \rightarrow P(a^4) = 0$ etc... donc b) vraie

• Le nombre de racines de P étant fini il existe p et q tq $a^{2^p} = a^{2^q}$ $(p > q)$, donc ~~[illegible]~~, $\left(a^{2^p}\right)^{2^{-q}} = a$

soit $a^{2^{p-q}} = a$

donc c) est vraie (de toutes façons, il existe toujours p tq $a^p = a$: prendre $p = 1$!!!!)

• Dans ce qui précède, on avait aussi, si $a \neq 0$, $a^{2^p - 2^q} = 1$ donc a est une racine de l'unité !

Mais 0 peut aussi être racine de P, donc d) est fausse

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

24 • Si $\frac{p}{q}$ racine de P : $a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$

alors $a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$

donc $a_n p^n$ est multiple de q et $a_0 q^n$ est multiple de p.

p et q étant premiers entre eux, il en est de m de p^n et q et de q^n et p ; il résulte alors du th. de Gauss que : a_n multiple de q et a_0 multiple de p $\hookrightarrow$ réponse a) (rem : si $p = 0$, $a_0 = 0$ et on a bien $p \mid a_0$!!)

• A l'aide de ce critère, on trouve que ~~[illegible]~~ les racines rationnelles de $2X^3 - X^2 + 3X + 5$ ne peuvent être que : $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm 5/2$, donc b) fausse (pas de signes $\pm$!!)

• les racines rationnelles de $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ ne peuvent être, là encore, que : $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$

Aucune ne convient...

• d) est exacte d'après le résultat du a)

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et d)}}$

(25) • $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k\right)$

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \sim = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(\cos\theta)^{(n-2k)}\, i^{2k}\,(\sin\theta)^{2k}$$

$$= \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-1)^k(\cos\theta)^{n-2k}(1-\cos^2\theta)^k = T_n(\cos\theta)$$

$\Leftarrow$ a) fausse

• b) vrai car si deux poly. coïncident pour une ∞ de valeurs, ils sont égaux.

• $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$ donne $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ ---

• La relation ci-dessus prouve facilement (récurrence) que T_n est de degré n et que, pour $n\geq 1$, le coeff. dominant de T_n est 2^{n-1} ...

|Réponse exacte : b)|

---

(26) • $P'_n = P_{n-1} = P_n - \frac{X^n}{n!}$. Donc si x est racine multiple de P_n, on doit avoir $P_n(x) = P'_n(x) = 0$ d'où $\frac{x^n}{n!} = 0$ soit $x=0$. Mais 0 n'est pas racine de P_n !! ($P_n(0)=1$)
↳ a) fausse

• $P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$ est exacte.

P_n est donc une solution de l'éq. diff. $y - y' = \frac{x^n}{n!}$. L'ens. des sol. de cette équation est donc $\{P_n + \lambda e^x, \lambda\in\mathbb{R}\}$, et P_n est bien la seule solution polynômiale

• On calcule $P(1)$ et $P'(1)$: c) fausse ...

• Si $m=kn$ alors $X^m - a^m = X^{kn} - a^{kn} = (X^n)^k - (a^n)^k$ est divisible par $X^n - a^n$ ..

|Réponses exactes : b) et d)|

---

(27) a) Si r.a.a.: $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos kx = 0$ (1) alors, en dérivant 2 fois : $\sum_{k=0}^{n}k^2\lambda_k\cos kx = 0$ (2)

En faisant (2) $- n^2$(1), on obtient : $\sum_{k=0}^{n-1}(k^2-n^2)\lambda_k\cos kx = 0$, ce qui est une relation du même genre mais avec un terme de moins. Il suffit donc de faire une récurrence pour démontrer $\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$. ↳ a) vrai

b) Si r.a.a: $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos^k x = 0$ alors : $\forall y\in[-1,1]$, $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k y^k = 0$. Le polynôme $\sum\lambda_k X^k$, nul sur $[-1,1]$, est donc le poly. nul, i.e. $\lambda_0=\dots=\lambda_n=0$ ↳ b) vraie

c) évident fausse !

d) Si r.a.a: $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\quad a + b\operatorname{Arctan}x + c\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = 0$

alors $\quad a - b\operatorname{Arctan}x - c\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = 0 \quad (x\to -x)$

d'où $a=0$

puis : $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $b\operatorname{Arctan}x + c\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = 0$ donne, en faisant $x\to 0^+$: $c\frac{\pi}{2}=0 \quad c=0$

$x\to+\infty$: $b\frac{\pi}{2}=0 \quad b=0$

d'où $a=b=c=0$ et la famille est libre !

|Réponses exactes : a) b) c)| (bizarre !!)

(Je croyais que ce n'était pas possible.. Il y a peut-être une erreur d'énoncé ; par exemple, dans le d), la famille est liée si on se limite à $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ car, par ex., $\operatorname{Arctan}x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x>0$...)

28 a) $x+y \in F\cup G$ car $x \in F \subset F\cup G$ et $y \in G \subset F\cup G$ et $F\cup G$ sev.
donc $x+y \in F$ ou $x+y \in G$. Mais $x+y \in G$ est impossible, car sinon, x appartiendrait à G.
donc $x+y \in F$: a) est vraie
b) ??? Je n'ai pas compris la phrase !!
(cela dit, on "sait" que : $F\cup G$ sev de $E \iff F\subset G$ ou $G \subset F$ ...)
c) est fausse (il y a aussi le cas $G\subset F$!!)
d) est évidente.

$\boxed{\text{Réponses : a) et d)}}$

---

29 a) Il est facile de vérifier que la famille $(e_i+a)_{1\leq i\leq k}$ est libre,
donc $\dim \mathrm{Vect}(e_1+a, \ldots e_k+a) = k$
b) $H \cap \mathrm{Vect}(e_1+a, \ldots e_k+a) = \{0\}$: en effet, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(e_i+a) \in H$, alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in H$
donc $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in H\cap K = \{0\}$ et $\sum \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Par des raisons de dimensions, on a donc bien : $H \oplus \mathrm{Vect}(e_1+a, \ldots, e_k+a) = E$
c) Il est facile de voir que $\mathrm{Vect}(e_1+a, \ldots, e_k+a) = H \iff a = 0$!
d) est faux : $\{0\}$ et E admettent chacun un et un seul supplémentaire !

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

30 Un exercice classique de Sup est : $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f \iff \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$
Donc a) fausse, b) vraie (je rappelle que les inclusions $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ et $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ sont toujours vraies !)
c) est stupide ! ($\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ peut-être ...)
d) : il y a d'autres applications que les projections qui vérifient cette propriété.

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

31 a) est stupide : le résultat est déjà faux pour $x = 0$!!
(par contre, si on choisit x tq $f^{n-1}(x) \neq 0$, ce qui est possible, on a le résultat ... exercice classique !)
b) si g est quelconque, il se peut que le minimum évoqué dans l'énoncé n'existe pas !!
(par exemple si g inversible !)
c) Choisissons x tq $f^{n-1}(x) \neq 0$. Alors $(x, f(x), \ldots f^{n-1}(x))$ est une base de E
L'image de f est donc $\mathrm{Vect}\{f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)\} = \mathrm{Vect}\{f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ et, puisque cette dernière famille est libre, $\mathrm{Im} f$ est de dim $n-1$. Par suite, $\mathrm{Ker} f$ est de dim 1. Puisque $f^{n-1}(x) \in \mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{f^{n-1}(x)\}$.

$\boxed{\text{Réponse exacte : c)}}$

---

32 a) $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. Donc $\dim(\mathrm{Ker} M) = \underline{\underline{n}} - 1$ (et M inversible ssi $n=1$ est vrai)
b) Un calcul simple donne $M^2 = nM$ donc $M^p = n^{p-1} M$ pour tt $p \geq 1$ par récurrence.
c) d) $N = \begin{pmatrix} 3 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 3 \end{pmatrix} = 2I + M$. Donc $N^p = (2I+M)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2I)^{p-k} M^k$ (car I, M commutent)

$$N^p = (2I)^p + \left(\sum_{k\geq 1}^{p} \binom{p}{k} 2^{p-k} n^{k-1}\right) M = (2I)^p + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{p-k} n^{k} - \frac{2^p}{n}\right) M$$

$N^p = (2I)^p + \left(\frac{1}{n}\left((n+2)^p - 2^p\right)\right)\Pi = 2^p I + \frac{(n+2)^p - 2^p}{n}\Pi$ ...

(10)

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

(33) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$; $\mathcal{B}$ a est une famille libre (car poly. de d^{os} distincts) de $n+1$ polynômes donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) et d) ne peuvent être que fausses, car la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_a$ est forcément de taille $n+1$!!!

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

(34) - f ne peut être un morphisme de groupes puisque $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe !

- l'application nulle vérifie la relation proposée ; cependant, on n'a pas alors $f(I_n) = 1$ donc b) fausse

(b) serait vraie si on supposait justement $f \neq 0$ ...)

- l'application constante égale à 1 vérifie la relation proposée ; cependant, on a alors $\forall A$, $f(A) = 1$ donc c) fausse.
- l'appl. nulle vérifie la relation proposée et ne convient pas pour d), donc d) fausse !

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$

(ou : comment faire d'un exercice qui aurait pu être intéressant un ramassis de questions stupides ...)

---

(35) a) b) pour $a=0$, $f = Id_E$ qui est bien un automorphisme orthogonal !

En fait on a : $\|f_a(x)\|^2 = \|x\|^2 + a^2\langle x,u\rangle^2\|u\|^2 + 2a\langle x,u\rangle^2$

$= \|x\|^2 + (a^2+2a)\langle x|u\rangle^2$

Donc $\|f_a(x)\| = \|x\|$ pour $\forall x$ ssi $a^2+2a=0$ soit $a=0$ ou $a=-2$

c) $f_{-2}(x) = x - 2\langle x,u\rangle u$. Or l'application $p : x \mapsto \langle x|u\rangle u$ est la projection $\perp$ sur $\mathbb{R}u$

donc $f_{-2} = Id - 2p$ est la symétrie $\perp$ p.r. à $(\mathbb{R}u)^\perp$

d) est fausse car f_2 n'est pas un auto. orthogonal !

$\boxed{\text{Réponse exacte : c)}}$

---

(36). Cherchons les coord. de Π', sym. de $\Pi\begin{pmatrix}x,y,z\end{pmatrix}$ p.r. à D. Pour cela, on écrit que le milieu de $[\Pi\Pi']$ appartient à D et que $\vec{\Pi\Pi'} \perp \vec{D}$ soit $\vec{\Pi\Pi'}\cdot\vec{u} = 0$ avec $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\-2\\1\end{vmatrix}$ v.d. de D. Cela donne :

$\exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\frac{x+x'}{2} = 1+t$, $\frac{y+y'}{2} = 1-2t$, $\frac{z+z'}{2} = 1+t$ et (1)

$(x'-x) - 2(y'-y) + (z'-z) = 0$ (2)

En remplaçant ds (2) : $(2+2t-2x) - 2(2-4t-2y) + (2+2t-2z) = 0$

d'où $12t - 2x + 4y - 2z = 0$, $t = \frac{x-2y+z}{6}$

puis $\begin{cases} x' = 2+2t-x = 2 + \frac{-2x-2y+z}{3} \\ y' = 2-4t-y = 2 + \frac{-2x+y-2z}{3} \\ z' = 2+2t-z = 2 + \frac{x-2y-2z}{3} \end{cases}$

(je viens de me rendre compte que j'ai utilisé les lettres x, y, z au lieu de a, b, c ...)

donc a) b) fausses.

. c) d) Il suffit de chercher les coord. des symétriques de deux pts de $z'Oz$ à l'aide des formules précédentes

Pour O : $O'\begin{vmatrix}2\\2\\2\end{vmatrix}$ Pour, par exemple $A\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$ $A'\begin{vmatrix}7/3\\4/3\\4/3\end{vmatrix}$. La droite cherchée est $(O'A')$ → réponse d)

$\boxed{\text{Réponse exacte : d)}}$

FIN