Corrigé ENAC 2009

$\boxed{5^{h}30}$

Exercice I

① • $(E,\circ)$ n'est pas un groupe (pas d'inverse pour la loi $\circ$ si f n'est pas bijective !)
• $(E,+)$ est bien un groupe commutatif, mais d'élément neutre la fonction nulle !
• $(E,+,\times)$ n'est pas un corps : si $f\neq 0$, on n'a pas : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ (seule façon de définir $\frac{1}{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$) mais seulement : $\exists x\in\mathbb{R}$ tq $f(x)\neq 0$...

$\boxed{\text{Réponse exacte : c)}}$ (cf. cours)

---

② • f admet bien une primitive (voir la suite), mais la raison donnée est fausse (il aurait fallu : g continue...)
• φ_a ne peut être prolongeable en a, elle est définie sur E !
• $\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = f(a)$. En effet, si F est une primitive de f (existe car f continue)

on a : $\varphi(f)(x) = \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ pour $x\neq a$ donc $\lim_{x\to a}\varphi(f)(x) = F'(a) = f(a)$

(on peut aussi utiliser la formule de la moyenne : $\exists c\in[a,x]$ tq $\int_a^x f(t)\,dt = f(c)\cdot(x-a)$ ...)

Donc :

$\boxed{\text{Réponse exacte : c)}}$

---

③ • φ_a est bien un endomorphisme de E : en effet, si $f\in E$, $\varphi_a(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{a\}$ (car $x\mapsto\int_a^x f$ est une primitive de f) et $\varphi_a(f)$ se prolonge par continuité en a, donc $\varphi_a(f)$ (prolongée) appartient à E.
De +, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi_a(\lambda f+g) = \lambda\varphi_a(f)+\varphi_a(g)$ (facile), donc φ_a linéaire.

Cependant, les "justifications" données en a) et b) sont fausses !

• $\varphi_a(f)$ continue si f continue prouve seulement : $\varphi_a(E)\subset E$! et l'inclusion est stricte, puisque si $g=\varphi_a(f)$, g est nécessairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{a\}$, ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions continues. Donc c) et d) sont fausses !

(donc φ_a n'est PAS surjective cela sera utile ensuite)

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$.

---

④ • J'ai déjà dit que $\varphi_a(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{a\}$. On a alors :

$$\forall x\neq a\quad \varphi_a(f)'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\,dt + \frac{1}{x-a}f(x) = \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{x-a}\varphi_a(f)(x)$$

donc la réponse a) est exacte.

• si $g(x)=|x-a|$ (g est bien continue !), on a, si $x\neq a$: $\varphi_a(g)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x |t-a|\,dt$

donc : – si $x>a$: $t-a\geq 0$ pour $t\in[a,x]$ donc $\varphi_a(g)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)\,dt = \frac{1}{x-a}\times\frac{(x-a)^2}{2} = \frac{x-a}{2}$

– si $x<a$, $t-a\leq 0$ pour $t\in[x,a]$ donc $\varphi_a(g)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x -(t-a)\,dt = \frac{1}{x-a}\times -\frac{(x-a)^2}{2} = -\frac{(x-a)}{2}$

d'où $\varphi_a(g)(x) = \left|\frac{x-a}{2}\right|$ si $x\neq a$, et cela reste vrai pour $x=a$.

Ainsi, la réponse c) est exacte, et cela est un contre-exemple à l'affirmation d) !

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et c)}}$

---

⑤ • T.Y à l'ordre 1 s'écrit : $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+o(x-a)$ donc a) vraie, b) fausse
• Donc :

$$\varphi_a(f)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(a)\,dt + \frac{1}{x-a}\int_a^x f'(a)(t-a)\,dt + \frac{1}{x-a}\int_a^x o(t-a)\,dt$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{2}(x-a) + \frac{1}{x-a}\int_a^x o(t-a)\,dt$$

Or : soit $\varepsilon>0$, par déf, $\exists\alpha>0$ tq $|x-a|<\alpha \Rightarrow |o(x-a)|<\varepsilon|x-a|$ donc, pour $|x-a|<\alpha$, on a : $\left|\frac{1}{x-a}\int_a^x o(t-a)\,dt\right| \leq \frac{1}{|x-a|}\left|\int_a^x \varepsilon|t-a|\,dt\right| = \frac{\varepsilon}{2}\cdot|x-a|$

i.e. $\frac{1}{x-a}\int_a^x o(t-a)\,dt = o(x-a)$

Finalt : $\varphi_a(f)(x) - f(a) = \frac{f'(a)}{2}(x-a) + o(x-a)$ d'où c).

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et c)}}$

---

(6) • a) est fausse : il manque la continuité de h.

• $\lim\limits_{x\to a} \varphi_a(f)'(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-\varphi_a(f)(x)}{x-a}$ (question 4. a)

(il manque le x ds l'énoncé)

$= \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{\varphi_a(f)(x)-f(a)}{x-a}\right] = f'(a) - \underbrace{\frac{f'(a)}{2}}_{\text{d'après 5.c}} = \frac{f'(a)}{2}$

et, le th. du a) rectifié ($\varphi_a(f)$ continue...) permet d'affirmer que $\varphi_a(f)$ est dérivable en a, donc finalt, sur $\mathbb{R}$.

• Le m̂ théorème (puisque $\varphi_a(f)$ est C^1 sur $\mathbb{R}-\{a\}$) donne $\varphi_a(f)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et d)}}$

---

(7) • $\operatorname{Ker}\varphi_a = \{f\in E \text{ tq } \varphi_a(f)=0\} = \{f\in E \text{ tq } \forall x\neq a, \int_a^x f(t)dt=0 \text{ et } \varphi_a(f)(a)=f(a)=0\}$

a) et b) sont donc fantaisistes ! (a priori)

• $f\in\operatorname{Ker}\varphi_a \Leftrightarrow \forall x\neq a \ \int_a^x f(t)dt=0$ et $f(a)=0$.

Or, si $\int_a^x f(t)dt=0$ pour $\forall x\neq a$, en dérivant cette égalité, on obtient $f(x)=0$ pour $x\neq a$.

Puisque $f(a)=0$, on obtient $f=0$ sont $\operatorname{Ker}\varphi_a=\{0\}$ et φ_a est injective.

← Donc finalement, a) est vraie !! car, si $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_a^x f(t)dt=0$, on a, en dérivant, $f(x)=0$

• d) est fausse (E n'est pas de dim finie !)

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et c)}}$

---

(8) • a) est exacte (φ_a injective et 4. c. est exacte)

• b) et c) sont évidemment fausses

• d) est exacte : si $a\neq b$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en b, mais pas g.

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et d)}}$

---

(9) Remarque : l'énoncé mélange allègrement polynômes et fonctions polynômes... Je fais donc pareil !

• $\varphi_a(X^i) : x\neq a \longmapsto \frac{1}{x-a}\int_a^x t^i\,dt = \frac{1}{i+1}\,\frac{x^{i+1}-a^{i+1}}{x-a} = \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i} a^k x^{i-k}$

cette formule restant valable pour $x=a$. Ainsi, $\varphi_a(X^i) = \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i} a^k \underline{X^{i-k}}$

ce qui permet de conclure que ψ_a est bien à valeurs ds $\mathbb{R}_n[X]$; étant linéaire, ψ_a est bien un endo. de $\mathbb{R}_n[X]$, mais la formule du a) est fausse !

• ψ_a étant une restriction de φ_a injective est donc aussi injective, et donc $\operatorname{Ker}\psi_a=\{0\}$

• ψ_a étant un endo. de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $\underline{n+1}$, est bien surjective, mais c) est fausse !

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

(10) • $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (famille de poly. de d° échelonnés de 0 à n), mais la justification donnée en a) est farfelue.

• $\mathcal{L}(i,k)$ désigne la coordonnée sur X^{i-1} de $(X-a)^{k-1}$.

Or : $(X-a)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-a)^{k-1-j} X^j \binom{k-1}{j}$ ← avec la convention $\binom{k-1}{j}=0$ si $j>k-1$!

donc $\underline{\mathcal{L}(i,k) = (-a)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}}$ donc b) c) sont fausses

← avec la convention $\binom{k-1}{i-1}=0$ si $i>k$! ($\mathcal{L}$ est triangulaire supérieure)

On trouve de même que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ (i.e. P^{-1}) est t.q. $P^{-1}(i,k) = (a)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}$
(changer a en $-a$)

Puisque $P.P^{-1} = I$, on a donc : $\left[\binom{k-1}{i-1}(-a)^{k-i}\right]_{i,j} \times \left[\binom{k-1}{i-1}(a^{k-i})\right]_{i,j} = I_{n+1}$

Bref, b, c, d sont fausses. (on peut aussi s'en convaincre en faisant le cas $n=1$!)

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte.}}$ (il semble que l'auteur s'est "mélangé les pinceaux" avec les indices !! ou est-ce une erreur d'énoncé ??)

---

(11) . D'après le cours : $A' = P^{-1}AP$ soit $A = PA'P^{-1}$

. On a : $\forall j \in [\![0,n]\!]$ $\varphi_a\left((X-a)^j\right) = \frac{1}{x-a}\int_a^x (t-a)^j dt = \frac{1}{j+1}(x-a)^j$

donc $A'_{i,i} = \frac{1}{i}$ (coeff. sur $(X-a)^{i-1}$ de $\varphi_a(X-a)^{i-1}$)

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

(12) . $rg(kA-I) = rg(kA'-I)$ car $kA-I$ et $kA'-I$ sont semblables.

Or $kA-I = \begin{pmatrix} k-1 & & 0 \\ & \frac{k}{2}-1 & \\ 0 & & \frac{k}{n+1}-1 \end{pmatrix}$ donc pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, $rg(kA-I) = n$ (un terme nul sur la diagonale, les autres sont $\neq 0$)

soit $\dim \ker(kA-I) = 1$ d'après le th. du rang

Mais b) est fausse quand même, à cause du "$i+1$"... (il aurait fallu : "i")

. L'équation $\varphi_a(Q) = \frac{Q}{i+1}$ a toujours ($\forall i \in \mathbb{N}$) la solution nulle !

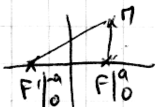
Cependant, cette éq. s'écrit $[(i+1)\varphi_a - Id](Q) = 0$, soit $Q \in \ker[(i+1)\varphi_a - Id]$, et elle a donc une infinité de solutions lorsque $(i+1)\varphi_a - Id$ n'est pas injective, ce qui est le cas lorsque $i \in [\![0,n]\!]$ seulement.

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte.}}$ (là encore, des indices bien curieux...)

1H05

Exercice II (la lemniscate de Bernoulli...)

(13)



$F' \begin{vmatrix} -a \\ 0 \end{vmatrix}$ $F \begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$

$MF = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$ $MF' = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$

$MF \times MF' = a^2 \iff [(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2] = a^4$

$\iff y^4 + y^2[2x^2+2a^2] + \underbrace{(x^2-a^2)^2 - a^4}_{=x^4-2a^2x^2} = 0$

En posant $Y = y^2$, on obtient une éq. du second degré en Y dont le discri. réduit est : $\Delta' = (x^2+a^2)^2 - (x^4 - 2a^2x^2) = 4a^2x^2 + a^4 \geq 0$

d'où $y^2 = -(x^2+a^2) \pm \sqrt{a^4+4a^2x^2}$

soit $y^2 = \sqrt{4a^2x^2+a^4} - (x^2+a^2)$ (seule racine positive)

Suite : on a alors $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ (voir ci-dessous !) donc a) est vraie

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et d)}}$

---

(14) . Pour le plaisir, on va vérifier ce que dit l'énoncé !

D'après ce qui précède : $x^2+y^2 = \sqrt{4a^2x^2+a^4} - a^2$ donc $(x^2+y^2)^2 = 4a^2x^2 + 2a^4 - 2a^2\sqrt{4a^2x^2+a^4}$

$= 2a^2\left[2x^2 + a^2 - \sqrt{4a^2x^2+a^4}\right]$

$= 2a^2(x^2-y^2)$

soit $x^2+y^2 = 2a^2 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 2a^2 \cdot \frac{1-(y/x)^2}{1+(y/x)^2}$ (pour $x \neq 0$...)

$= \rho^2 = 2a^2 \cdot \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 2a^2\cos 2\theta$!

Pour une courbe en polaires :

$\rho(\theta)=\rho(-\theta)$ signifie : symétrie p.r. à Ox !

$\rho(\theta)=\rho(\pi-\theta)$ signifie : symétrie p.r. à Oy

$\rho(\theta)=\rho(\pi+\theta)$ " : symétrie p.r. à O !

(La) est en fait la réunion des 2 courbes d'éq. $\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}$ et $\rho=-a\sqrt{2\cos 2\theta}$, l'une s'obtenant à partir de l'autre par une symétrie p.r. à O. Ces deux courbes sont en fait les mêmes ($\theta\to\theta+\pi$). On peut donc choisir $\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}$ et pour a bien $\rho(\theta)=\rho(\pi-\theta)$. Il suffit donc d'étudier la courbe pour $\theta\in[0,\pi/4]$ puis faire la symétrie p.r. à Oy puis la symétrie p.r. à O, donc 2 symétries suffisent.

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

(15) • On prendra donc pour ~~déf~~ éq. de (La) : $\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}$.

ρ n'est pas dérivable pour $\theta=\frac{\pi}{4}$ (à cause de $\sqrt{\ }$)

Et aussi : $\theta\mapsto 2\cos 2\theta$ est ↘, $\sqrt{\ }$ est ↗ donc ρ est bien décroissante, mais pas pour la raison indiquée...

(La) ne passe pas par $(0,a)$ de ts façons !! aucun intérêt

• Avec les notations habituelles, on a : $\frac{\rho'}{\rho}=\cot V$ soit $\cot V=-\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\times\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}=-\tan 2\theta=\tan(-2\theta)$

soit $V=\frac{\pi}{2}+2\theta\ [\pi]$. Pour $\theta=0$ (au pt $(\sqrt{2}a,0)$), on a $V=\frac{\pi}{2}$: la tgte à (La) est donc perpendiculaire à Ox, i.e. "verticale".

• Pour $\theta=\frac{\pi}{4}$ (ce qui correspond au pt O), on a $V=\pi$ i.e. la tgte est bien la droite d'éq. $y=x$.

Mais la courbe est en-dessous de cette tangente (car, pour $\theta\in[0,\pi/4]$, $y/x=\tan\theta\le 1$ soit $y\le x$)

L'allure de la courbe est : (sur $[0,\pi/4]$ ...)

Pour $\theta\in[0,\pi/4]$, le pt à tgte horizontale correspond à $V=-\theta$, soit $-3\theta=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

soit $\theta=\pi/6$

Pour ce point, on a alors $\rho=a$ ...

Bref, j'ai un peu débordé le cadre des questions posées... En tout cas :

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$

---

(16)

$$A=\iint_{La\cap\{(x,y),x\ge 0\}}dx\,dy=\iint_{\substack{\theta\in[-\pi/4,\pi/4]\\ 0\le\rho\le a\sqrt{2\cos 2\theta}}}\rho\,d\rho\,d\theta=2\iint_{\theta\in[0,\pi/4]}\rho\,d\rho\,d\theta \to \text{réponse b)}$$

Mais aussi :

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/2}\rho^2d\theta=\int_0^{\pi/4}\rho^2d\theta=\int_0^{\pi/4}2a^2\cos 2\theta\,d\theta=2a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}=a^2$$

$\boxed{\text{Réponses exacts : b) et c)}}$

---

(17) • Pour $M=\Omega$, je ne vois pas bien comment construire M', donc a) est fausse...

• Mais si $M\neq O$, il existe bien un et un seul pt M' de la dte (ΩM) tq $\overline{\Omega M'}=\frac{k}{\overline{\Omega M}}$ → réponse b)

• Si $I_k^\Omega\circ I_k^\Omega(M)=M''$, alors $I_k^\Omega(M')=M''$ soit M'' appartient à $(\Omega M')$ donc à (ΩM) et
$(M\neq\Omega)$

$$\overline{\Omega M''}=\frac{k}{\overline{\Omega M'}}=\overline{\Omega M}\text{ soit } M=M''.$$

Ainsi $I_k^\Omega \circ I_k^\Omega = Id$ et I_k^Ω est une involution de $\underline{P\setminus\{\Omega\}}$ sur lui-même

donc bijective de $\underline{P\setminus\{\Omega\}}$ sur $\underline{P\setminus\{\Omega\}}$, égale à sa réciproque

(ce n'est pas dit ds l'énoncé..)

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et d)}}$

---

(18) Ω, N, N' étant alignés, on a $z'-w = \lambda(z-w)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\vec{\Omega N'} = \lambda \vec{\Omega N})$

D'où $\overline{z'-w} = \lambda\, \overline{z-w}$ et $(\overline{z'-w})(z-w) = \lambda |z-w|^2 = \lambda\, \Omega N^2$, avec $\lambda = \dfrac{\overline{\Omega N'}}{\overline{\Omega N}}$

soit $(\overline{z'-w})\cdot(z-w) = \overline{\Omega N'}\cdot\overline{\Omega N}$

Ce nombre est un réel, donc égal à son conjugué, c.à.d. à $(z'-w)(\overline{z-w})$ $\longrightarrow$ réponse a)

On en déduit alors, si $N' = I_k^\Omega(N)$, $(z'-w)(\overline{z-w}) = k$ soit $z' = w + \dfrac{k}{\overline{z-w}}$ $\longrightarrow$ réponse b)

- M pt fixe de I_k^Ω ssi $M' = M$ soit $\Omega M^2 = k$; si $k<0$, il n'y a pas de pt fixe ! si $k>0$, on obtient le cercle de centre Ω, de rayon $\sqrt{k}$

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et b)}}$

---

(19) a) si $\Omega = O$

$I_\alpha^\Omega : M \in P\setminus\{\Omega\} \longmapsto M'$ tq $\overline{\Omega M'} = \dfrac{\alpha}{\overline{\Omega M}}$ et Ω, M, M' alignés

puis $I_k^\Omega : M' \longmapsto M''$ tq $\overline{\Omega M''} = \dfrac{k}{\overline{\Omega M'}} = \dfrac{k}{\alpha}\overline{\Omega M}$ avec Ω, M, M'' alignés

puis $(I_\alpha^\Omega)^{-1} = I_\alpha^\Omega : M'' \longmapsto M'''$ tq $\overline{\Omega M'''} = \dfrac{\alpha}{\overline{\Omega M''}} = \dfrac{\alpha^2}{k} \times \dfrac{1}{\overline{\Omega M}}$ et Ω, M, M''' alignés

donc $(I_\alpha^\Omega)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^\Omega = I^\Omega_{\alpha^2/k}$ $\longrightarrow$ réponse a)

b) $I_\alpha^\Omega(N) = \Omega$ ssi $\Omega \in (ON)$ et $\overline{O\Omega} = \dfrac{\alpha}{\overline{ON}}$ soit $w = \dfrac{\alpha}{\bar z}$ soit $z = \dfrac{\alpha}{\bar w}$ (et en supp. $w \neq 0$) donc b) fausse

c/d) Pour que $I_k^\Omega[I_\alpha(N)]$ ait un sens, il faut que $I_\alpha^O(N)$ soit $\neq$ de Ω soit $z \neq \dfrac{\alpha}{\bar w}$ (et $N \neq O$) (et $z \neq 0$)

et alors $I_\alpha^O(N)$ a pour affixe z'' tq $z'' = \dfrac{\alpha}{\bar z}$

puis $I_k^\Omega[I_\alpha^O(N)]$ a pour affixe z''' tq $z''' = w + \dfrac{k}{\overline{z''-w}} = w + \dfrac{k}{\left(\overline{\frac{\alpha}{\bar z} - w}\right)} = w + \dfrac{k\bar z}{\alpha - \bar w \bar z}$

et enfin $(I_\alpha^O)^{-1}[\sim] = I_\alpha^O[I_k^\Omega[I_\alpha^O(N)]]$ a pour affixe z' tq

$$z' = \frac{\alpha}{\overline{z'''}} = \frac{\alpha}{\bar w + \dfrac{k\bar z}{\alpha - w\bar z}} = \frac{\alpha(\alpha - w\bar z)}{\alpha\bar w + \bar z(k - |w|^2)}$$

C'est bien la formule de la réponse d) mais l'hyp exacte est $z \neq \dfrac{\alpha}{\bar w}$!!

$\boxed{\text{Réponses exactes : a)}}$

---

(20) Ici $\Omega \neq O$, si $z \notin \left\{0, \dfrac{\alpha}{\bar w}\right\}$ et si $k = |w|^2$, on a donc $z' = \dfrac{\alpha(\alpha - w\bar z)}{\alpha\bar w} = \dfrac{\alpha - w\bar z}{\bar w}$

$$z' = \frac{\alpha}{\bar w} - \frac{w}{\bar w}\bar z$$

Si $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ et $w = a+ib$ (avec $a, b, x, y, x', y' \in \mathbb{R}$!)

on a : $x'+iy' = \dfrac{\alpha w}{|w|^2} - \dfrac{w^2}{|w|^2}\bar{z} = \dfrac{1}{|w|^2}\left(\alpha w - \left((a^2-b^2)+2iab\right)(x-iy)\right)$

soit $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{|w|^2}\left[\alpha a + (b^2-a^2)x - 2aby\right] \\ y' = \dfrac{1}{|w|^2}\left[\alpha b - 2abx + (a^2-b^2)y\right] \end{cases}$

On reconnait bien là l'expr. analytique d'un appl. affine, dont l'a.l. associée a pour matrice :

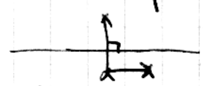
$$\frac{1}{|w|^2}\begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

Mais l'image du pt O par cette appl. est le pt. de coord. $\dfrac{1}{|w|^2}\begin{pmatrix}\alpha a \\ \alpha b\end{pmatrix}$ i.e. $\dfrac{\alpha w}{|w|^2}$

donc a) est fausse ! (d'ailleurs, c'est un peu gênant d'écrire $I_\alpha^O \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(O)$ alors que $I_\alpha^O(O)$ n'a pas de sens !!!)

b) la matrice A est bien orthogonale, puisque $(b^2-a^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2+b^2)^2 = |w|^4$; elle est bien
c) de déterminant négatif (-1) ; c'est donc une symétrie orthogonale vectorelle
l'application $(I_\alpha^\Omega)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^\Omega$ est donc :

- une sym. $\perp$ affine si elle a des pts invariants
- la composée d'une sym. $\perp$ et d'une translation parallèle$^{\text{lt}}$ à l'axe de la symétrie sinon



Pour savoir dans quelle cas on est, on cherche les pts invariants, i.e. tq $x' = x$ et $y' = y$.
Cela donne le système :

$$\begin{cases} |w|^2 x = \alpha a + (b^2-a^2)x - 2aby \\ |w|^2 y = \alpha b - 2abx + (a^2-b^2)y \end{cases}$$

soit, puisque $|w|^2 = a^2+b^2$

$$\begin{cases} 2a^2x + 2aby = \alpha a \\ 2abx + 2b^2y = \alpha b \end{cases}$$

a et b n'étant pas nuls simultanément, cela équivaut à : $2ax + 2by = \alpha$: il y a donc bien une dte de pts invariants, et l'appl. est la sym. $\perp$ p.r. à cette droite.

d) est fausse ! Il ne suffit pas qu'il y ait des pts fixes pour avoir une symétrie orthogonale (il faut rajouter : de déterminant négatif)

D'ailleurs, la phrase "A possède des pts fixes" alors que A est une matrice ne veut rien dire !!

$\boxed{\text{Réponse exacte : c)}}$ (OUF !)

|| (Rem : Est-ce une question bien raisonnable pour un élève de Sup ??? et l'étude des isométries du plan affine euclidien n'est + au programme depuis longtemps !!)

---

(21) Cela commence à devenir lassant...

$\Omega \neq O$ et $k \neq |w|^2$ - D'après la question 19 : $z' = \dfrac{\alpha(\alpha - w\bar{z})}{\alpha\bar{w} + \bar{z}(k - |w|^2)}$

Une remarque : si $a,b,c,d,x \in \mathbb{C}$ et si les dénominateurs de tout ce que j'écris ne s'annulent pas on a :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$ (écriture d'une homographie ss forme canonique)

Ici, cela donne :

$$z' = \frac{-\alpha w\bar z+\alpha^2}{(k-|w|^2)\bar z+\alpha\bar w} = \frac{-\alpha w}{k-|w|^2} + \frac{\alpha^2(k-|w|^2)+\alpha^2|w|^2}{(k-|w|^2)^2\left(\bar z+\frac{\alpha\bar w}{k-|w|^2}\right)}$$

$$= \frac{\alpha w}{|w|^2-k} + \frac{\alpha^2 k}{(|w|^2-k)^2}\times\frac{1}{\bar z - \frac{\alpha\bar w}{|w|^2-k}}$$ → réponse a)

On a donc $z' = w' + \frac{k'}{\overline{z-w'}}$ avec $w'=\frac{\alpha w}{|w|^2-k}$ et $k'=\frac{\alpha^2 k}{(|w|^2-k)^2}$

i-e, en reprenant les résultats de la question 19.c., $(I_\alpha^0)^{-1}\circ I_k^\Omega\circ I_\alpha^0 = I_\beta^S$

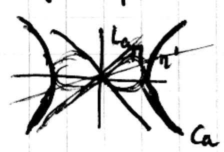
où $\beta = \frac{\alpha^2 k}{(|w|^2-k)^2}$ et où S est le pt d'affixe $w' = \frac{\alpha w}{|w|^2-k}$ → réponse c)

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et c)}}$

---

(22) a/ Ca est évidemment toujours une hyperbole (équilatère)

b/ si $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-y^2/x^2}{1+y^2/x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$ soit $x^2-y^2=\rho^2\cos 2\theta$



$(x \neq 0)$

donc une éq. polaire de Ca est $\rho^2\cos 2\theta = 2a^2$

mais $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$!!

($\cos 2\theta > 0$!)

c/ si $M \in L_a$ a pour angle polaire θ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$, on a $\overline{OM} = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$

et si $M' \in$ Ca a pour angle polaire $\theta' = \theta\,[\pi]$, on a $\overline{OM'} = \pm a\sqrt{\frac{2}{\cos 2\theta}}$

donc $\overline{OM}.\overline{OM'} = \pm 2a^2$!!

d/ $I_1^0(M) = M'$ tq $\overline{OM'} = \frac{1}{\overline{OM}}$

si $M \in C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ on a alors $\overline{OM} = \pm\frac{1}{\cos 2\theta}$ d'où $\overline{OM'} = \pm\cos 2\theta \in L_{\sqrt{2}/2}$

et réciproquement.

$\boxed{\text{Réponse exacte : d)}}$

(Résultat bien connu : l'image d'une hyperbole équilatère par une inversion de pôle son centre est une lemniscate !)

2H15

EXERCICE III

(23) a) f n'est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ que si $t \mapsto t^p$ l'est ; or, cette appl. est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais elle n'est dérivable en 0 que si $p \geq 1$!!

b) Les deux f° : $t \mapsto t^p$ et $t \mapsto p^t$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$

c) Je suppose qu'il ne s'agit pas de la même "f" !! Ds le cas gal, si f est strictemt croissante

- sur $\mathbb{R}^+$, elle est néc^t injective (car, si $x \neq y$, on a par ex. $x<y$ et alors $f(x)<f(y)$ donc $f(x)\neq f(y)$)
donc est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur son image $f(\mathbb{R}^+)$
La continuité de f ne sert à rien !! (elle servirait juste à dire, par exemple, que $f(\mathbb{R}^+)$ est un intervalle)

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

25. • ~~[illegible]~~ On a toujours $(p-1)t^p + a \underset{t\to 0}{\sim} a$ (puisque $p>0$)

• puis : $t^{p-1}+1 \underset{t\to 0}{\sim} \begin{cases} 1 \text{ si } p>1 \\ 2 \text{ si } p=1 \\ t^{p-1} \text{ si } p<1 \end{cases}$

soit $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \begin{cases} a \text{ si } p>1 \\ a/2 \text{ si } p=1 \\ \frac{a}{t^{p-1}} \text{ si } 0<p<1 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = \begin{cases} a \text{ si } p>1 \\ a/2 \text{ si } p=1 \\ 0 \text{ si } 0<p<1 \end{cases}$

Ainsi, a) b) sont fausses.

• Je n'ai même pas fait de calcul pour le c) car, pour $p<1$, f n'est pas dérivable en 0, donc le résultat est faux !
• Supposons donc $0<p<1$. $\varphi(t)=t$ admet alors 0 pour solution (car $\lim\limits_0 \varphi = 0$, donc on pose $\varphi(0)=0$)

et : pour $t>0$, $\varphi(t)=t \Leftrightarrow (p-1)t^p + a = p(t^p+t)$
$\Leftrightarrow t^p + pt = a$
$\Leftrightarrow f(t)=a$
$\Leftrightarrow t = \underset{=g(a)}{f^{-1}(a)}$ $(a>0)$ → réponse d)

$\boxed{\text{Réponse exacte : d)}}$

Je viens de me rendre compte que j'ai oublié la question 24 !!

24. • a) est fausse, car f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^+$ si $p<1$! (ou oublié de lire le reste et de réfléchir !)
• b) est fausse à cause de l'expression "que si..".
En effet, le cours donne : SI f est dérivable en $g(x)$ et $f'[g(x)]\neq 0$, ALORS g dérivable en x (et $g'(x) = \frac{1}{f'\circ g(x)}$ ...)
mais ce n'est qu'une condition nécessaire.
Par exemple : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ (de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$) n'est PAS dérivable en 0
mais $g : x \mapsto x^2$ l'est !!

• c/d) • Si $p\geq 1$, f est dérivable en 0, $f(0)=0$ et $f'(0) = \begin{cases} 2 \text{ si } p=1 \\ p \text{ si } p>1 \end{cases}$
donc g est dérivable en $f(0)=0$ et $g'(0) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } p=1 \\ 1/p \text{ si } p>1 \end{cases}$

• Si $p<1$, $f(0)=0$ mais f n'est pas dérivable en 0.
Cependant : pour $t>0$, $g(t)>0$ et f est dérivable en $g(t)$ et $f'(g(t))>0 \neq 0$
donc g est dérivable en t et $g'(t) = \frac{1}{f'\circ g(t)} = \frac{1}{[g(t)]^{p-1}+1}$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g'(t) = 0$ puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = g(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{t\to 0^+} [g(t)]^{p-1} = +\infty$ ...

Le th. de prolg^t des dérivées partielles d'affirmer que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=0$.

$\boxed{\text{Aucune réponse exacte}}$.

---

26 a) f étant strict. croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}} > g(a) \iff f\left(\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right) > f\circ g(a) = a$$

$$\iff \frac{a}{1-p} + p\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}} > a$$ ce qui est vrai puisque $0<p<1$.

• Pour $0<p<1$, on a vu que $\varphi(0)=0$; on a aussi $\varphi\left(\sqrt[p]{\frac{a}{p-1}}\right)=0$

. Pour $t>0$, on peut écrire : $\varphi(t)-t = \dfrac{(p-1)t^p+a-pt^p-pt}{p(t^{p-1}+1)} = \dfrac{a-f(t)}{f'(t)}$

d'où $\varphi'(t)-1 = \dfrac{-f'(t)^2-[a-f(t)]f''(t)}{f'^2(t)} = -1-\dfrac{[a-f(t)]f''(t)}{f'^2(t)}$

soit $\varphi'(t) = [f(t)-a]\dfrac{f''(t)}{f'(t)^2}$ est du signe de $a-f(t)$ car $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}<0$

Or f étant strict ↗, $f(t)-a>0 \iff f(t)>a \iff t>g(a)$. Cela donne le tableau suivant

t	0		$g(a)$		$\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}$
φ'		$+$		$-$	
φ	0	↗	$g(a)$	↘	0

car $\varphi(g(a))-g(a) = \dfrac{a-f\circ g(a)}{\sim} = 0$. On a donc bien $\varphi\left(\left[0,\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]\right)\subset[0,g(a)]$

→ réponse a).

b) Pour $t>\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}$, on a $\varphi(t)<0$; donc si $u_0>\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}$, on aura $u_1<0$ et $\varphi(u_1)$ n'est pas définie → la réponse b) est fausse !

(par contre, (u_n) reste bien défini si on choisit $u_0\in\left[0,\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]$ car cet intervalle est stable par φ)

c) si $u_0\in\left]g(a),\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]$, alors $u_1\in[0,g(a)[$ donc $u_1<u_0$

Mais alors $u_1<g(a) \Rightarrow f(u_1)<a \Rightarrow \varphi(u_1)-u_1 = \dfrac{a-f(u_1)}{f'(u_1)}>0 \Rightarrow u_2>u_1$

donc la suite n'est pas monotone → réponse c) fausse

(par contre, si $u_0\in[0,g(a)]$, on obtiendrait alors (u_n) ↗)

d) Pour $\forall u_0\in\left[0,\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right]$, on a $u_1\in[0,g(a)]$ d'où $u_2\geq u_1$ et aussi $u_2\in[0,g(a)]$

d'où $u_3\geq u_2$: (u_n) ↗, majorée par $g(a)$ converge vers l tel que $\varphi(l)=l$ ~~avec $l>0$ soit $f(l)=a$~~ soit $l=0$ ou a (cf question 25-d), $l=0$ n'étant possible que si $u_0=0$.

Donc :
- si $u_0=0$, la suite est cste égale à 0
- si $u_0=\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}$, $u_1=0$ et la suite est stationnaire (CV vers 0)
- si $u_0\in\left]0,\sqrt[p]{\frac{a}{1-p}}\right[$, la suite CV vers $g(a)$.

$\boxed{\text{Réponse exacte : a)}}$

(27) a). $g(a) < \frac{a}{p} \Leftrightarrow a < f(\frac{a}{p}) = (\frac{a}{p})^p + a$ ce qui est vrai

. On a vu que $\varphi'(t) = [f(t)-a] \frac{f''(t)}{[f'(t)]^2}$. Pour $t \geq g(a)$, $f(t) \geq a$, et $f''(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$

donc $\varphi'(t) \geq 0$.

Puis : ~~si $t \leq \frac{a}{p}$, $f(t) - a \leq f(\frac{a}{p}) - a = (\frac{a}{p})^p$~~

$$\frac{f''(t)}{f'(t)^2} = \frac{p(p-1)\,t^{p-2}}{(p(t^{p-1}+1))^2} = \frac{(p-1)}{p} \frac{t^{p-2}}{(t^{p-1}+1)^2}$$

d'où $0 \leq \varphi'(t) \leq (t^p + pt - a) \frac{t^{p-2}}{(t^{p-1}+1)^2} \frac{(p-1)}{p}$

Pour vérifier l'ég. proposée, il suffit de montrer que $(t^p + pt - a)\,t^{p-2} \leq (t^{p-1}+1)^2$

soit $t^{2p-2} + pt^{p-1} - a\,t^{p-2} \leq t^{2p-2} + 2t^{p-1} + 1$

soit $(p-2)\,t^{p-1} \leq a t^{p-2} + 1$

il suffit donc que $(p-2)t^{p-1} \leq a t^{p-2}$

ce qui est vrai si $p-2 \leq 0$ et aussi si $p-2 > 0$ car $t \leq \frac{a}{p} \Rightarrow t \leq \frac{a}{p-2}$

Finalement, a) est vraie.

b) Complètement fantaisiste ! (à cause des valeurs absolues d'abord, et aussi parce que, dans le t.a.f., θ dépend de t et t' !!)

c). Pour $t > g(a)$, on a $f(t) > a$ donc $\varphi(t) - t = \frac{a - f(t)}{f'(t)} < 0$ soit $\varphi(t) < t$

• On a vu : $\varphi'(t) = [f(t)-a] \frac{f''(t)}{f'(t)^2}$ du signe de $f(t)-a$ donc $\varphi'(t) > 0$ pour $t > g(a)$

et $\varphi \nearrow$ sur $[g(a), +\infty[$. L'intervalle $[g(a), +\infty[$ est stable par φ (car $\varphi(g(a)) = g(a)$)

donc (u_n) est monotone (car $u_0 = \frac{a}{p} > g(a)$) ; $\varphi(t) < t \Rightarrow u_1 < u_0$ donc $(u_n) \searrow$

et $\forall n$, $u_n \in [g(a), u_0] \subset [g(a), \frac{a}{p}]$.

On a donc : $|u_{n+1} - g(a)| = |\varphi(u_n) - \varphi(g(a))| \leq \|\varphi'\|_\infty \cdot |u_n - g(a)|$

$\leq \frac{p-1}{p} |u_n - g(a)|$

et, par récurrence :

$|u_{n+1} - g(a)| \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n+1} |u_0 - g(a)|$! c) est fausse.

d) Puisque $\left|\frac{p-1}{p}\right| < 1$ (inég. stricte indispensable !!) on en déduit

$\lim_{n\to\infty} u_n = g(a)$

mais l'inégalité large ne permet pas de conclure $\rightarrow$ d) est fausse

$\boxed{\text{Réponse exacte : a)}}$

| 1H20

EXERCICE 4

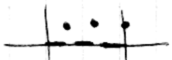
(28) Le résultat de la question d) est bien connu ! mais problème : l'énoncé dit : "$\forall x \in \mathbb{R}$" alors qu'il s'agit de fonctions définies sur $[-1,1]$!!! Faut-il considérer cela comme une erreur d'énoncé ou un piège ???

a) b) c) sont fausses (il existe ~~une~~ f° paire et impaire : la f° nulle !! $P \cap I = \emptyset$ est stupide ; parler de dimension en dim. infinie est stupide --)

Donc : $\boxed{\text{avec réserve}}$ $\boxed{\text{Réponse exacte : d)}}$ (ou : aucune réponse exacte)

---

(29) a) f et g sont continues sur $[-1,1]$, c'est par cette raison que l'intégrale $\int_{-1}^{1} fg$ existe.
La continuité sur $]-1,1[$ ne suffit pas...

b) est fausse (il faut f continue... Ex : 

c) est fausse : E n'est pas "euclidien" : ce terme s'applique seult aux e.v. de dim. finie !

$\boxed{\text{Réponse : d)}}$

---

(30) a) b) : si f est paire, g impaire alors le produit fg est impaire d'où la réponse a)

c) d) si $f \in P$, $g \in I$ on a donc $\varphi(f,g) = 0$ donc :

$\forall f \in P$, $f \in I^\perp$ soit $P \subset I^\perp$ &

$\forall g \in I$, $g \in P^\perp$ soit $I \subset P^\perp$

On a donc $P \subset I^\perp$ et $I \subset P^\perp$ (à ce stade du raisonnement, comme dit l'énoncé...)

Or "A et B $\Rightarrow$ A ou B" est vraie !! donc la réponse c), quoique curieuse, convient...

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et c)}}$

---

(31) • a) b) sont facilement vraies (pour tout $f \in E$) pas seult $f \in P^\perp$!)

• si $f \in P^\perp$ $\varphi(f_P, f_P) = \varphi(f - f_I, f_P) = \underbrace{\varphi(f, f_P)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in P^\perp}} - \underbrace{\varphi(f_I, f_P)}_{=0} = 0$

donc $f_P = 0$ car φ est définie. On a donc $f = f_I$ soit $f \in I$

Ainsi $P^\perp \subset I$, et $I \subset P^\perp$ d'après 30.c donc $P^\perp = I$

• $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est le projeté de exp sur P parallt à I, i.e. le projeté orthogonal.

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) b) c) d)}}$ $\leftarrow$ c'est curieux !!

0H20

EXERCICE V

(32) • L'application $(x,y) \mapsto (u,v) = (x+\alpha y, x+\beta y)$ est linéaire ; sa matrice ds la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, de déterminant $\beta - \alpha$; elle est donc bijective ssi $\alpha \neq \beta$.

Ds ce cas, H et H^{-1} sont linéaires, donc de classe C^∞. $\rightarrow$ réponse a)

• $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ car $x = \dfrac{\beta u - \alpha v}{\beta - \alpha}$

$= \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $\qquad y = \dfrac{u - v}{\alpha - \beta}$

↳ b) est fausse

• $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial g}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial g}{\partial v}$ $\longrightarrow$ c) est fausse

• En reprenant les résultats ci-dessus : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$= \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \beta\left[\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$
$$= \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

(f, g étant de classe C^2, on peut intervertir ss pb les ∂.p.)

donc l'éq. (E) devient,

$$a\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right] + b\left[\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right] + c\left[\alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right] = 0$$

soit $P(\alpha)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + P(\beta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} + K\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

$\boxed{\text{Réponses exactes : a) et d)}}$

---

(33) a) relations coefficients-racines fausses !

b) $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ avec $\alpha \neq \beta$ racines de P ; on a alors $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{c}$ et $\alpha\beta = \dfrac{a}{c}$

d'où $K = 2a - \dfrac{b^2}{c} + 2a = \dfrac{4ac - b^2}{c} \neq 0$ $\hookrightarrow$ réponse b)

c) $K = P'(\alpha) + P(\beta)$ est fantaisiste !

d) En choisissant α, β comme ds la question b), on obtient ce résultat

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et d)}}$

---

(34) $\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial u}$ fonction de u seul^{t} soit $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \varphi(u)$, et rien n'empêche d'écrire $\varphi(u) = M(u) + N$!! (l'intérêt de cette constante m'échappe !)

$\dfrac{\partial g}{\partial u} = \varphi(u) \Rightarrow g = \int \varphi(u)du + c^{ste}$ p.r. à u

$= \psi(u) + \chi(v)$ où ψ, χ sont C^2

$\boxed{\text{Réponses exactes : b) et c)}}$

---

(35) P ne possède + qu'une racine double r ; pr $\alpha = r$, $\beta = 0$ on a : $K = 2a + br$

K peut être nul si $r = \dfrac{-2a}{b}$; or $r = \dfrac{-b}{2c}$; cela équivaut donc à $4ac = b^2$: c'est vrai !

$\boxed{\text{Réponse exacte : b)}}$

---

(36) Donc (E) s'écrit : $P(0)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ soit $a\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$. Or $a \neq 0$ (car sinon $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b = 0$ soit $(a,b) = (0,0)$: exclu)

donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$

Par suite : $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \varphi(u)$ où φ est C^1 puis $g = v\varphi(u) + \psi(u)$

soit $f(x,y) = x\varphi(x+ry) + \psi(x+ry)$

$\boxed{\text{Réponses exactes a) et b)}}$

Rem : en choisissant $\alpha = 0$ et $\beta = r$, on obtiendrait de m $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ donc b) est vraie !!

0H30