CONCOURS EPL/S **22 Avril 1999**

ERRATA

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
de 9h30 - 11h30

Question 23 :

Au D) lire g(t) = 0 au lieu de g(x) = 0

Question 24 :

Remplacer tous les x par t (7 au total)

Remplacer au C) f par φ (lettre grèque phi)

Remplacer au D) - 3.6. par -3.60.

Au dessus de la Question 30 :

Lire $u \neq v$ au lieu de $u = v$

EPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

Liste des questions pouvant êtres liées :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)
(16, 17, 18, 19, 20)
(21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32)

Ce sujet comporte 32 questions dont 24 obligatoires.

Nous considérons l'endomorphisme φ, de l'espace vectoriel $\mathbf{E} = \mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\right)$, défini par son expression analytique

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrr} A = & -4a & + & 5b & + & 8c & + & 15d \\ B = & a & & & - & c & - & 3d \\ C = & 2a & - & 4b & - & 5c & - & 8d \\ D = & -3a & + & 4b & + & 6c & + & 11d \end{array}\right. \qquad (1)$$

où l'image du vecteur $\overrightarrow{u} = (a, b, c, d)$ est le vecteur $\varphi(\overrightarrow{u}) = (A, B, C, D)$.

Question n° 01 :

A) φ n'est pas une application linéaire de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{E}$ car c'est un endomorphisme.

B) La matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

C) Tout endomorphisme de $\mathbf{E}$ est bijectif car la dimension de $\mathbf{E}$ est paire, donc φ est bijectif.

D) φ ne peut être injectif car B est indépendant de b.

Nous transformons la système (1) par les opérations élémentaires successives sur les lignes suivantes : $L_1 \longleftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, puis $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et nous obtenons un système, noté (2).

Question n° 02 :

A) L'ordre des opérations élémentaires ci-dessus n'a pas d'incidence sur le résultat.

B) D'autres opérations élémentaires successives que celles données ci-dessus donneront le même résultat.

Le système (2) est

C) $\left\{\begin{array}{rrrrrrr} B = & a & & - & c & - & 3d \\ A+2B+C = & & b & + & c & + & d \\ -2B+C = & & -4b & - & 3c & - & 2d \\ 3B+D = & & 4b & + & 3c & + & 2d \end{array}\right.$

D) $\left\{\begin{array}{rrrrrrr} B = & a & & + & c & - & 3d \\ A+2B+C = & & b & + & c & - & d \\ -2B+C = & & -4b & + & 3c & - & 2d \\ 3B+D = & & -4b & + & 3c & + & 2d \end{array}\right.$

Nous transformons la système (2) par les opérations élémentaires successives sur les lignes suivantes : $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$ et nous obtenons un système, noté (3).

Question n° 03 :

A) Le système (3) ne peut-être équivalent au système (2) car l'opération $L_4 \leftarrow L_3 + L_4$ modifie la ligne L_3 uniquement.

B) L'ordre des opérations élémentaires successives ci-dessus a une incidence sur le résultat.

Le système obtenu (3) est formé des deux premières lignes de (2) et des deux lignes

C) $\left\{\begin{array}{rrrr} 4A+5C+6D = & c & + & 2d \\ 3B+D = & 0 & & \end{array}\right.$

D) $\left\{\begin{array}{rrrr} 4A+C+6D = & c & - & d \\ B-C+D = & & & d \end{array}\right.$

Nous transformons (3) par les opérations élémentaires successives sur les lignes suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et nous obtenons un système, noté (4) .

Question n° 04 :

A) La première ligne de (4) est
$$4A - 7B + 5C = a - d.$$

B) La deuxième ligne de (4) est
$$3A - 4B - 4C = b - d.$$

C) La troisième ligne de (4) est
$$4A - 6B + 5C = c + 2d.$$

D) La quatrième ligne de (4) est
$$B + C + D = 0.$$

Question n° 05 :

Le système obtenu (4)

A) est semblable au système (1) mais non équivalent au système (2) .

B) montre que φ est bijective car dans les trois premières lignes figurent A, B, C et D.

C) montre que φ est injective si $A = B = C = D = 0$.

D) montre que φ est surjective car dans la dernière ligne ne figure plus a, b, c et d.

Question n° 06 :

Une équation de Im φ est

A) $b + c + d = 0$.

B) $\begin{cases} 4a + 7b + 5c = 0 \\ -3a - 4b - 4c = 0 \\ 4a + 6b + 5c = 0 \end{cases}$

Une base $\mathcal{B}_{\text{Im}\ \varphi}$ de Im φ est

C) $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}\right)$.

D) $\left(\overrightarrow{l}\right)$.

Question n° 07 :

Une équation de ker φ est

A) $\begin{cases} a - d = 0 \\ b - d = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases}$

B) $b + c + d = 0$.

Une base $\mathcal{B}_{\ker\ \varphi}$ de ker φ est

C) $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{l}\right)$.

D) $\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l}\right)$.

Question n° 08 :

Nous avons (les inclusions sont au sens large)

A) Im $\varphi \subset$ ker φ.

B) ker $\varphi \subset$ Im φ.

C) ker φ et Im φ sont deux supplémentaires de **E** car la réunion des bases $\mathcal{B}_{\text{Im}\ \varphi}$ et $\mathcal{B}_{\ker\ \varphi}$ est une base de **E**.

D) dim (ker φ) + dim (Im φ) $\leqslant 4$.

Nous considérons les vecteurs $\overrightarrow{I} = (2, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{J} = (1, 0, -1, 1)$, $\overrightarrow{K} = (1, 1, -2, 1)$ et $\overrightarrow{L} = (1, 1, 0, 0)$.

Soit l'équation, d'inconnue $\overrightarrow{u}$
$$\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{I}, \qquad (E_1)$$
dont $\mathcal{S}_{E_1}$ est l'ensemble des solutions.

Question n° 09 :

A) Card $(\mathcal{S}_{E_1}) = 1$ car φ est bijective.

B) $\mathcal{S}_{E_1}$ est une droite vectorielle..

C) $\overrightarrow{J} \in \mathcal{S}_{E_1}$.

D) $\overrightarrow{L} \in \mathcal{S}_{E_1}$.

Question n° 10 :

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -5a & + & 5b & + & 8c & + & 15d & =2 \\ a & - & b & - & c & - & 3d & =-1 \\ 2a & - & 4b & - & 6c & - & 8d & =0 \\ -3a & + & 4b & + & 6c & + & 10d & =1 \end{array}\right. \qquad (S_1)$$

A) est de rang 4.

B) est de rang 2.

C) $\mathcal{S}_{E_1}$ est l'ensemble des solutions de (S_1)

D) $\overrightarrow{I}$ est une solution de (S_1) car $\overrightarrow{I} \in \ker \varphi$.

Question n° 11 :

Le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -4a & + & 5b & + & 8c & + & 15d & =2 \\ a & & & - & c & - & 3d & =-1 \\ 2a & - & 4b & - & 5c & - & 8d & =0 \\ -3a & + & 4b & + & 6c & + & 11d & =1 \end{array}\right. \qquad (S_2)$$

A) est de rang 3.

B) est de rang 4.

C) φ étant bijective, la seule solution de (S_2) est $\overrightarrow{u} = \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{K}\right)$.

D) Les systèmes (S_1) et (S_2) ont au moins une solution commune.

Question n° 12 :

A) $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right\} \subset \mathcal{S}_{E_1}$.

B) $\overrightarrow{L} \notin \mathcal{S}_{E_1}$.

C) $\overrightarrow{L} \in \mathcal{S}_{E_1}$.

D) Card $\mathcal{S}_{E_1} = 0$.

P est la matrice de $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}, \overrightarrow{L}\right)$ dans $\mathcal{B}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question n° 13 :

A) Card $\mathcal{F} = 4$ donc $\mathcal{F}$ est une nouvelle base de **E**.

B) $\mathcal{F}$ est une famille libre, mais non génératrice.

C) P n'est pas inversible.

D) P est inversible car c'est une matrice carrée.

Question n° 14 :

A) $\overrightarrow{I}$ est invariant par φ.

B) $\overrightarrow{I} + \overrightarrow{J}$ est invariant par φ.

C) $\overrightarrow{L}$ est invariant par φ.

D) $\overrightarrow{K} + \overrightarrow{L}$ est invariant par φ.

Question n° 15 :

(M est la matrice de φ). Nous avons

A) $T\,P = M\,P$.

B) $P\,T = M\,P$.

C) Les deux assertions ci-dessus sont fausses car T n'est pas inversible.

D) T et M sont équivalentes mais non semblables.

Nous considérons la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{-2+3x}{x^2\,(1+x^2)}$ de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère Oxy.

E désigne l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.

Question n° 16 :

A) $\dim \mathbf{E} = 4$.

B) $\dim \mathbf{E} = 5$.

La famille $\mathcal{F} = (1 + x^2,\ x + x^3,\ x^2,\ x^3,\ x^2 + x^4)$

C) est une base de **E** car Card $\mathcal{F} = 5$.

D) ne peut-être une base de **E** car $x + x^3$ et $x^2 + x^4$ sont proportionnels.

Question n° 17 :

Nous écrivons $-2 + 3\,x = a\ (1 + x^2) + b\ (x + x^3) + c\,x^2 + d\,x^3 + e\ (x^2 + x^4)$.

A) a, b, c, d et e sont uniques car $\mathcal{F}$ est une base de **E**.

B) a, b, c et d sont uniques, mais e peut prendre au moins trois valeurs distinctes.

Nous obtenons, par exemple,

C) $a = -2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = -3$ et $e = 0$.

D) $a = -2$, $b = 3$, $c = -2$, $d = 3$ et $e = 1$.

Question n° 18 :

Nous avons la décomposition en éléments simples de $f(x)$ de la forme

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{1 + x^2} + \frac{\delta\, x}{1 + x^2} + \varepsilon.$$

A) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$.

B) $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = -c$, $\delta = \varepsilon = d$.

C) f est définie sur $\mathbb{R}^*$donc admet une primitive sur $]0, +\infty[$.

D) Il existe au moins une primitive F de f telle que $F' \neq f$ en au moins un point.

Question n° 19 :

Nous notons $F(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda f(x)\,dx$ où $\lambda > 0$.

A) F n'existe pas.

B) F n'est pas continue.

Si F existe alors

C) $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{5} \ln 3$.

D) $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \ln 2$.

Question n° 20 :

La fonction f est dérivable et

A) $f'(x) = \dfrac{(1 - x)\ (4 + x + 9\,x^2)}{x^3\ (1 + x^2)^2}$.

B) f' admet deux zéros réels.

C) $\mathcal{C}$ est concave sur $[1, +\infty[$.

D) $\mathcal{C}$ est convexe sur au moins un intervalle fermé.

Soit la courbe Γ d'équations paramétriques $x(t) = \dfrac{\ln\lvert t\rvert}{t - 1}$, $y(t) = \ln\left\lvert t + \dfrac{1}{t}\right\rvert$.

Question n° 21 :

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles Γ est définie.

A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

B) $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}$.

C) x n'est pas prolongeable par continuité en $t = 1$.

D) y n'est pas dérivable sur $\mathcal{D}$ entier à cause de la valeur absolue.

Question n° 22 :

Pour tout $t \in \mathcal{D}$, nous pouvons écrire $x'(t) = \dfrac{\varphi(t)}{(t-1)^2}$ avec

A) $\varphi(t) = 1 - t - \ln|t|$.

B) $\varphi(t) = 1 - \dfrac{1}{t} + \ln|t|$.

Cette fonction φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

C) $\varphi'(t) = \dfrac{1-t}{t^2}$.

D) $\varphi'(t) \geqslant 0, \forall t \in]-\infty, 0[$.

Question n° 23 :

Nous posons $\mathcal{I} = [-4, -3]$ et $g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, t \mapsto -\exp(1 - \dfrac{1}{t})$.

A) $|g'(t)| > 1, \forall t \in \mathcal{I}$.

B) $|g'(t)| \leqslant 1, \forall t \in \mathcal{I}$.

Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = -3$ et $\forall n \geqslant 0, w_{n+1} = g(w_n)$.

C) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car g' est négatif.

D) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers la solution sur $\mathcal{I}$ de $g(t) = 0$.

Question n° 24 :

Soit β une solution de $\varphi(t) = 0$ sur $\mathcal{I}$.

A) β ne peut pas être déterminé car $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

B) β existe, est unique et est aussi solution de $t = \exp(1 - \dfrac{1}{t})$.

C) Pour tout $t \in \mathcal{I}$, $\varphi(t) = 0$ est équivalente à $g(t) = t$

D) Une valeur approchée de β à 10^{-2} prés par excès est -3.60

Question n° 25 :

A) $x'(\beta) = 0$ et $y'(\beta) > 0$.

B) $\forall t \in]\beta, 0[, x'(t) > 0$.

C) $\forall t \in]-1, 0[, y'(t) > 0$.

D) $t \in \{-1, \beta\} \Leftrightarrow x'(t) = 0$.

Question n° 26 :

A) x et y sont croissantes en même temps sur au moins deux intervalles.

B) Sur $]-\infty, \beta[$, x et y sont décroissantes.

C) Sur $]1, +\infty[$, x et y sont strictement décroissantes.

D) Sur $]0, 1[$, y est croissante au sens large.

Question n° 27 :

Au voisinage de $t = -1$, la courbe représentative Γ admet une tangente

A) verticale car x n'est pas borné.

B) dont une équation est $y = x \ln 2$.

Au voisinage de $t = 1$, la courbe représentative Γ admet

C) une asymptote verticale.

D) une tangente de vecteur directeur $(1, \ln 2)$.

Question n° 28 :

Au voisinage de $t = 0$, nous avons les équivalences

A) $x(t) \underset{t=0}{\sim} \ln|t|$.

B) $y(t) \underset{t=0}{\sim} -\ln|t|$.

C) $y(t) - x(t) \underset{t=0}{\sim} \ln|t|$.

D) $y(t) + x(t) \underset{t=0}{\sim} t\ln|t|$.

Question n° 29 :

Γ admet pour asymptote

A) la droite d'équation $y = x$.

B) la droite d'équation $y = -x$.

Nous pouvons préciser que si $t \to 0^+$,

C) Γ est en dessous de cette asymptote.

D) le problème ne se pose pas car il n'y a pas d'asymptote.

Les points doubles de Γ sont les couples $(u,\, v)$ tels que

$$\begin{cases} x(u) &= x(v) \\ y(u) &= y(v) \\ u &\neq v \end{cases}.$$

Question n° 30 :

A) $uv + 1 = 0$.

B) $u = -v$.

C) $u^2 - 2u - 1 = 0$ si $u > 1$.

D) $v^2 - 2v + 1 = 0$ si $v \in]-1, 0[$.

Question n° 31 :

Γ admet un point double et nous pouvons choisir $(u,\, v)$ égal à

A) $(1 - \sqrt{2},\, 1 + \sqrt{2})$

B) $(-1, 1)$.

Une valeur approchée des coordonnées dans le plan du point double est

C) $(0.62,\, 1.04)$.

D) $(1.04,\, 0.62)$.

Question n° 32 :

Γ possède

A) deux asymptotes obliques et une asymptote horizontale.

B) une asymptote oblique, une asymptote verticale et une branche parabolique de direction Ox.

C) une et une seule asymptote qui, de plus, est verticale.

D) seulement deux asymptotes dont une oblique.