ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2003

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 7 pages de texte, numérotées de 1 à 7.

CALCULATRICE AUTORISEE

Questions liées : 1 à 14
15 à 19
et 20 à 30

PARTIE I

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et E_1 l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, sous espace vectoriel de E. Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. A toute fonction f appartenant à E_1 on associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^x \varphi(t)f(t)dt$$

On définit ainsi une application L_φ de E_1 dans E $L_\varphi : f \to g$

<u>Question 1 :</u> φ étant donnée, pour que g appartienne à $\mathrm{Im}L_\varphi$, la fonction g doit vérifier, dans le cas où φ ne s'annule pas

a) g continue

b) $\frac{g'}{\varphi} \in E_1$

dans le cas où φ s'annule

c) g = 0

d) g' s'annule aux zéros de φ et $\frac{g'}{\varphi}$ est prolongeable par continuité en ces points.

<u>Question 2 :</u> Dans le cas où $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ et $g(x) = e^x - x - 1$ la fonction g
a) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1
b) vérifie les conditions nécessaires de la question 1
et dans le cas où $\varphi(x) = \ln(1 + x + x^2)$ et $g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ la fonction g
c) vérifie les conditions nécessaires de la question 1
d) ne vérifie pas les conditions nécessaires de la question 1

<u>Question 3 :</u> La fonction φ étant fixée, la fonction f est reliée à la fonction g par :

a) $f = \frac{g}{\varphi}$

b) $f(x) = \frac{g(x)}{\int_0^x \varphi(t)dt} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) $f = \frac{g'}{\varphi}$

d) $f(x) = \frac{g'(x)\int_0^x \varphi(t)dt - g(x)\varphi(x)}{(\int_0^x \varphi(t)dt)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On considère le cas particulier où les fonctions φ et g sont définies respectivement par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \ln(1 + x + x^2) \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

et on note f la fonction de E_1 telle que $g = L_\varphi(f)$, si elle existe.

Question 4 : La fonction f
a) n'est pas prolongeable par continuité en 0
b) est prolongeable par continuité en 0 par 1
c) est prolongeable par continuité en 0 par 0
d) est prolongeable par continuité en 0 par -1

Question 5 : Le graphe de la fonction f, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport
a) au point $(1, f(1))$ b) au point $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ c) à la droite $x = 1$ d) à la droite $x = \frac{1}{2}$

Question 6 : Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ la fonction f est :
a) croissante puis décroissante b) décroissante c) croissante d) monotone

Question 7 : La limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$
a) n'existe pas b) vaut zéro
et la courbe admet
c) une asymptote d) une branche infinie parabolique.

Question 8 : L'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point(0, f(0)) s'écrit
a) $y = 1 - \frac{x}{2}$ b) $y = 1 + x$ c) $y = 1 + \frac{x}{2}$ d) $y = x$

On revient au cas général où φ est une fonction fixée continue sur $\mathbb{R}$.
On note Φ la primitive de la fonction φ s'annulant en $x = 0$

Question 9 : Les fonctions f et g vérifient $g = L_\varphi(f)$ et $g - f = \Phi$

a) $\begin{cases} f(x) = 1 + 2e^{\Phi(x)} \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + 2e^{\Phi(x)} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$ b) $\begin{cases} f(x) = 1 - e^{\Phi(x)} \\ g(x) = 1 - e^{\Phi(x)} + \Phi(x) \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} f(x) = 1 + \ln|\Phi(x)| \\ g(x) = \Phi(x) + 1 + \ln|\Phi(x)| \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$ d) $\begin{cases} f(x) = 1 + \Phi(x) \\ g(x) = 2\Phi(x) + 1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

Dans toute la suite de cette partie, la fonction φ considérée sera définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = e^x$.
On considère l'espace vectoriel E_3, sous-espace vectoriel de E_1, constitué des fonctions f telles que $f(x) = a\cos x + b\sin x$ où a et b sont des réels quelconques.

Question 10 : La famille de fonctions suivantes forme une base de l'espace $L_\varphi(E_3)$

a) $\begin{cases} g_1(x) = \cos x \\ g_2(x) = \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} v_1(x) = e^x \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{1}{2} \\ v_2(x) = e^x \dfrac{\sin x + \cos x}{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} w_1(x) = 1 \\ w_2(x) = e^x \sin x \\ w_3(x) = e^x \cos x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} u_1(x) = e^x \cos x - 1 \\ u_2(x) = e^x \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

Question 11 : Reprenant les notations de la question 10 et l'espace vectoriel E_3 étant rapporté à la base (f_1, f_2) avec $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin x$, la matrice $\begin{pmatrix} C & -C \\ C & C \end{pmatrix}$, où C est une constante donnée, représente matriciellement la restriction de L_φ à l'espace E_3 lorsque $L_\varphi(E_3)$ est rapporté à la base :

a) (g_1, g_2) b) (v_1, v_2) c) (u_1, u_2) d) (w_1, w_2, w_3)

n étant un entier donné, on désigne par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On considère les fonctions $u_0(x) = e^x - 1,\ u_1(x) = xe^x, \ldots\ldots, u_n(x) = x^n e^x$

Question 12 : Pour p entier naturel, la fonction g_p image par L_φ de la fonction $f_p(x) = x^p$ vérifie :

a) $g_0 = -u_0$ b) $g_0 = u_0$ c) $g_p = -u_p$ d) $g_p = u_p - p\, g_{p-1}\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

Question 13 : Pour $p \in \mathbb{N}$ la fonction g_p définie à la question 12 s'écrit, A_p^{p-k} désignant le nombre d'arrangements de (p-k) éléments parmi p éléments :

a) $g_p = u_p - u_{p-1}\ \forall p \in \mathbb{N}^*$

b) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k + (-1)^p$

c) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} A_p^{p-k} u_k$

d) $g_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} p!\, u_k + (-1)^p$

Question 14 : La matrice de la restriction de l'application L_φ à $\mathcal{P}_n$ par rapport à la base canonique de $\mathcal{P}_n$ et à la base $(u_0, \ldots\ldots, u_n)$ de $L_\varphi(\mathcal{P}_n)$ est

a) carrée d'ordre (n+1) et diagonale
b) triangulaire supérieure et carrée d'ordre n
c) inversible car de déterminant égal à $(-1)^{n+1}$
d) de déterminant égal à 1 donc de rang n.

PARTIE II

Soit P le polynôme à coefficients réels à une indéterminée X défini par $P = 26 - 34X + 23X^2 - 6X^3 + X^4$

Question 15 : Le système d'équation : $\begin{cases} -4x^4 + 12x^3 - 34x + 26 = 0 \\ -12x^3 + 46x^2 - 34x = 0 \end{cases}$ a pour solution :

a) $x = \dfrac{17}{6}$ b) $x = 2$ c) $x=0$ d) $x=1$

Question 16 : Le nombre complexe z_1 est racine du polynôme P :

a) $z_1 = \dfrac{17}{6}(1 + i)$ b) $z_1 = 1 - i$ c) $z_1 = 2(1 + i)$ d) $z_1 = \dfrac{17}{6}(1 - i)$

Question 17 : Le polynôme P est divisible par le polynôme Q défini par :

a) $Q = 13 - 2X + X^2$ b) $Q = 13 - \dfrac{17}{3}X + X^2$

c) $Q = 13 - 4X + X^2$ d) $Q = \dfrac{189}{18} - \dfrac{17}{3}X + X^2$

Question 18 : La fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(x)}$ se décompose en éléments simples sur le corps des réels sous la forme :

a) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + \frac{7}{36}}{x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{189}{18}} - \dfrac{x - \frac{5}{18}}{x^2 - 4x + \frac{368}{189}}\right)$

b) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + 7}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4x + 13}\right)$

c) $\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{3x + 2}{x^2 - \frac{17}{3}x + 13} + \dfrac{3}{(x - 4)^2} - \dfrac{1}{x - 4}\right)$

d) $\dfrac{1}{85}\left(\dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{2x + 7}{x^2 - 4x + 13}\right)$

Question 19 : A étant un réel positif fixé, l'intégrale $I = \int_0^A \frac{1}{P(x)}dx$ vaut :

a) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - \frac{17}{3}A + \frac{189}{18}}{A^2 - 4A + \frac{368}{189}}\right) + \frac{3}{18}\text{Arctan}\left(A - \frac{17}{6}\right) - \frac{5}{9}\right]$

b) $I = \frac{1}{36}\left[\ln\left(\frac{\left(A^2 - \frac{17}{3}A + 13\right)^{\frac{3}{2}}}{A - 4}\right) + 2\,\text{Arctan}\left(A - \frac{17}{6}\right) - \frac{3}{A - 4}\right]$

c) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - 4A + 13}{A^2 - 2A + 2}\right) - 9\,\text{Arctan}(A-1) + \frac{7}{13}\text{Arctan}\frac{A-2}{3} - \frac{9\pi}{4} + \frac{7}{13}\text{Arctan}\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{13}\right]$

d) $I = \frac{1}{85}\left[\ln\left(\frac{A^2 - 2A + 2}{A^2 - 4A + 13}\right) + 9\,\text{Arctan}(A-1) - \frac{7}{3}\text{Arctan}\frac{A-2}{3} + \frac{9\pi}{4} - \frac{7}{3}\text{Arctan}\frac{2}{3} - \ln\frac{2}{13}\right]$

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(0) = 0$, ; $f(1) = -1$; $f(-1) = 1$
et $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ $f(t) = \frac{2t}{1 - t^2}\ln|t|$

Question 20 : La courbe représentant f dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy est symétrique par rapport :
a) au point (0, 0) car f est paire
b) au point (1, -1)
c) à la droite x = 0 car f est impaire
d) à la droite y = 0

Question 21 : La fonction f
a) est continue sur $\mathbb{R}$ car une fonction définie en tout point de $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$
b) n'est pas continue en 0 car ln n'est pas définie en 0
c) est continue sur $\mathbb{R}$
d) est continue sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Question 22 : La limite de f(t) lorsque t tend vers $-\infty$
a) n'existe pas
b) est nulle
c) est égale à $-\infty$
d) est égale à $+\infty$

Question 23 : Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f\left(\frac{1}{t}\right)$ sous la forme

a) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{f(t)}$
b) $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$
c) $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$
d) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}\ln\left|\frac{1}{t}\right|$

Question 24 : La limite lorsque t tend vers 0, de la fonction $\frac{1}{t}f(t)$

a) est nulle et la courbe est tangente à l'axe x'Ox au point (0, 0)
b) est égale à $+\infty$
c) est égale à $-\infty$
d) n'existe pas

Question 25 : Le développement limité à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction $t \mapsto t\ln t$ au voisinage de 1 s'écrit, la fonction $\varepsilon(t)$ tendant vers 0 lorsque t tend vers 1

a) $t(t-1) - \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

b) $t^2 - \frac{t^3}{3} + \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{t^n}{n-1} + t^n\varepsilon(t)$

c) $t(t-1) + \frac{t(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{t(t-1)^n}{n} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

d) $(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + \dots\dots\dots + (-1)^n\frac{(t-1)^n}{n(n-1)} + (t-1)^n\varepsilon(t)$

Question 26 : Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $\frac{f(t) + 1}{t - 1}$ est

a) $1 + \frac{t}{6} - t^2$

b) $t + t^2$

c) $\frac{t-1}{6} - \frac{(t-1)^2}{6} + (t-1)^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 1}\varepsilon(t) = 0$

d) $\frac{t-1}{6} + (t-1)^2$

Question 27 : La fonction f est

a) dérivable sur $\mathbb{R}^*$
b) dérivable sur $\mathbb{R}$ car continue sur tout point de $\mathbb{R}$

et a pour dérivée si elle existe

c) $f'(t) = \frac{2t(1+t^2)}{|t|(1-t^2)}\ln|t| + \frac{2}{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ et $f'(1) = 0 = -f'(-1)$

d) $f'(t) = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\left[\ln|t| + \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ et $f'(1) = 0 = f'(-1)$

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \ln t + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Question 28 : On a

a) $\varphi'(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\varphi'(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $\varphi'(1) = 0$

c) φ est croissante puis décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d) φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Question 29 : La fonction f' est

a) positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$ car il en est de même de φ

b) négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ car de même signe que φ

et la fonction f est

c) négative sur $\mathbb{R}$

d) négative ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive ou nulle sur $]-\infty, 0[$

Question 30 : Soit g la fonction de la variable réelle définie par $g(x) = \tan(2x) \ln|\tan x|$. On a

a) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$; paire et π-périodique

b) g est définie sur $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$; impaire et 2π-périodique

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$

d) g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$