J. 10 0574

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNÉE 2010

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement (recto),
- 11 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 11

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

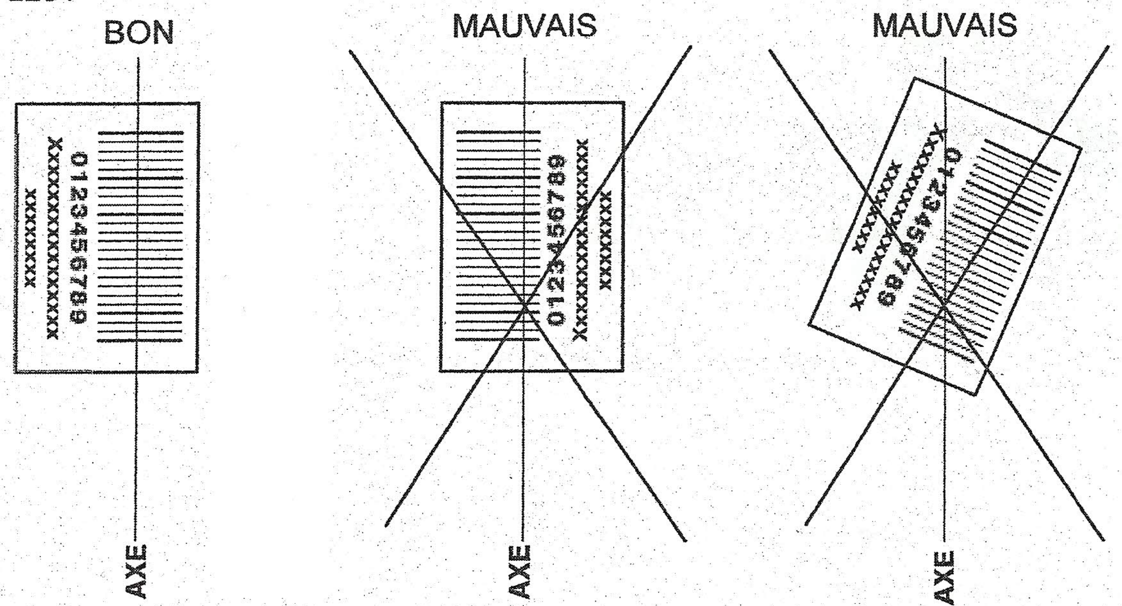
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

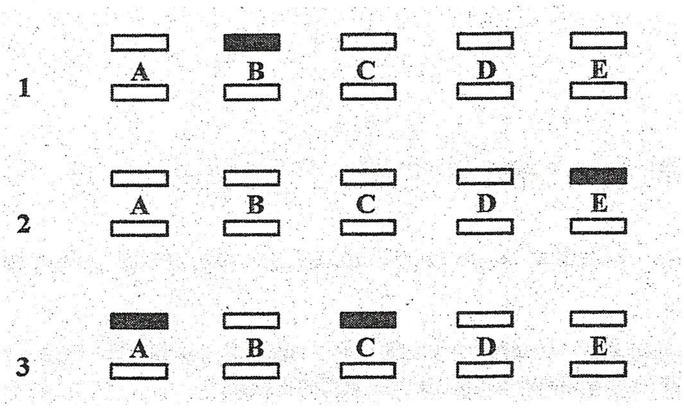
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



QUESTIONS LIEES

1 à 10

11 à 19

20 à 25

26 à 29

30 à 36

PARTIE I

IR désigne le corps des nombres réels.
L'espace vectoriel IR^3 est muni de sa structure euclidienne usuelle.
$\mathcal{M}_3(IR)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(IR)$
M appartenant à $\mathcal{M}_3(IR)$, on note f_M l'endomorphisme de IR^3 dont la matrice par rapport à la base canonique de IR^3 est égale à M.

Soit E l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\alpha,\beta,\delta,\gamma,\varepsilon$ sont des réels

Question 1 : L'ensemble $\mathcal{M}_3(IR)$ est
- a) un groupe pour la loi d'addition des matrices
- b) un groupe pour la loi de multiplication des matrices
- c) un espace vectoriel de dimension 9 sur le corps des nombres complexes
- d) un anneau commutatif pour les lois d'addition et de multiplication des matrices

Question 2 : L'ensemble E
- a) est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(IR)$ pour la loi de multiplication d'une matrice par un scalaire réel
- b) est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(IR)$ pour les lois d'addition et de multiplication des matrices car E est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(IR)$ pour la loi d'addition, E est stable pour la loi de multiplication des matrices, E contient la matrice I et la loi de multiplication des matrices est commutative dans E
- c) est un sous-vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(IR)$ sur le corps des réels IR car E est un sous ensemble non vide de $\mathcal{M}_3(IR)$ stable par combinaison linéaire à coefficients réels
- d) n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(IR)$

Soit F l'ensemble des matrices N de la forme $N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon$ sont des réels

Question 3 : L'ensemble F
- a) est un sous-vectoriel de l'espace vectoriel E sur le corps des réels IR
- b) n'est pas un sous-espace vectoriel de E
- c) est un sous-anneau de l'anneau commutatif E car F est un sous-groupe de E pour la loi d'addition, F est stable pour la loi de multiplication des matrices et contient la matrice $\begin{pmatrix} ½ & ½ & 0 \\ ½ & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ élément neutre de la loi de multiplication dans F
- d) n'est pas un sous-anneau de l'anneau E car F ne contient pas I élément neutre de la multiplication des matrices dans $\mathcal{M}_3(IR)$

Tournez la page S.V.P.

Question 4: Soit $N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ \delta & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon$ sont des réels fixés. Le rang de la matrice N, rg N

a) est, pour tout réels $\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon$, inférieur ou égal à 1
b) est, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels inférieur ou égal à 2 car N a deux colonnes égales
c) est toujours strictement positif
d) est inférieur ou égal à 1 pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels tels que $\alpha\varepsilon - \gamma\delta = 0$

Question 5 : Soit N un élément de F. Le sous-espace noyau, Ker f_N, de l'endomorphisme f_N associé à la matrice N

a) vérifie $2 \leq 3 - \text{rg } N = \dim \text{Ker } f_N$ pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels
b) vérifie $\dim \text{Ker } f_N = 3 - \dim \text{Im } f_N = 1$ pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels tels que $\alpha\varepsilon - \gamma\delta = 0$
c) vérifie $\dim \text{Ker } f_N = 3 - \dim \text{Im } f_N = 2$ pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels tels que $\alpha\varepsilon - \gamma\delta$ soit différent de 0
d) contient, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels, la droite D de vecteur directeur (1, 1, 0)

Question 6 : Le sous-espace image, Im f_N, de l'endomorphisme f_N associé à la matrice N

a) est, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels, contenu dans le sous-espace engendré par les vecteurs (1, 1, 0) et (0, 1, 0)
b) est, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels, contenu dans le sous-espace engendré par les vecteurs (1, 0, 1) et (0, 1, 0)
c) est, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels, contenu dans le plan **P** dont une base orthonormale est formée par la famille $\left((0, 0, 1), (1/\sqrt{2})(1, 1, 0)\right)$
d) est, pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels, contenu dans le plan **P** dont une base orthonormale est formée par la famille $\left((1, 0, 1), (0, 1, 0)\right)$

S'il existe un plan **P** de $\mathbb{R}^3$ tel que pour toute matrice N appartenant à F, le sous espace Im f_N est contenu dans **P**, on note g_N la restriction de l'endomorphisme f_N à **P**; On considère l'application φ qui à tout élément N de F associe g_N $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de **P**

Question 7 : On rapporte le plan **P**, s'il existe, à une base orthonormale. L'application φ

a) est une application linéaire injective de F dans $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ car $\text{Ker } \varphi = \{0\}$
b) est une application linéaire de F dans $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ non injective
c) vérifie $\varphi(N_1 . N_2) = \varphi(N_1) \circ \varphi(N_2)$ pour tout couple (N_1, N_2) d'éléments de F où $\circ$ désigne la loi de composition des applications et $.$ la multiplication des matrices
d) n'est pas définie car il n'existe pas un tel plan **P**

Question 8 : On a

a) la famille $\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\right)$ est une base de F

b) la famille $\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F

c) φ n'est pas un isomorphisme car les espaces vectoriels F et $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ ont des dimensions différentes

d) φ est un isomorphisme de F dans $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ car c'est une application linéaire injective de F dans $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ et dim F = dim $\mathcal{L}(\mathbf{P})$ = 4

Question 9 : Soit $N = \begin{pmatrix}\alpha&\alpha&\gamma\\\alpha&\alpha&\gamma\\\delta&\delta&\varepsilon\end{pmatrix}$ où $\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon$ sont des réels fixés. L'application g_N associée

a) est une isométrie de **P** pour tout quadruplet $(\alpha,\delta,\gamma,\varepsilon)$ de réels

b) est une isométrie de **P** si et seulement si $[2\alpha^2 + \delta^2 = ½$ et $\varepsilon = 2\alpha$ et $\gamma = -\delta\,]$

c) est une isométrie de **P** si et seulement si $[2\alpha^2 + \delta^2 = ½$ et $\varepsilon = 2\alpha$ et $\gamma = \delta\,]$

d) ne peut être une isométrie de **P**

Question 10 : Soit $A = 1/(2\sqrt{2})\begin{pmatrix}1&1&\sqrt{2}\\1&1&\sqrt{2}\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&-2\end{pmatrix}$. L'application g_A associée à cette matrice

a) est une isométrie de **P**
b) n'est pas une isométrie de **P**
c) est une rotation
d) est une réflexion par rapport à la droite de vecteur directeur $((\sqrt{2}+2)/2\,,\,1)$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On considère la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle I $=]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = (\ln(1+x))/(1+x)$$

ln désigne la fonction logarithme népérien.
On appelle C_f la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal

Question 11 : La fonction f

a) est de classe C^∞ sur I
b) est dérivable de dérivée discontinue sur I
c) a pour dérivée $f'(x) = (1-\ln(1+x))/(1+x)^2$ pour tout x appartenant à I
d) a pour dérivée $f'(x) = 1/(1+x)$ pour tout x appartenant à I

Question 12 : La fonction f

a) est croissante sur I
b) est décroissante sur $[1, +\infty[$ et a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$
c) est croissante sur $]-1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$, tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1
d) est décroissante sur $]-1, e-1]$ et croissante sur $[e-1, +\infty[$

Question 13 : La courbe C_f

a) admet pour tangente, au point de coordonnées (0,0), la droite d'équation $y = -x$
b) présente au point de coordonnées $(e^{3/2}-1, (3/2)e^{3/2})$ un point d'inflexion car $f''(x) = -(3-2\ln(1+x))/(1+x)^3$ s'annule et change de signe en ce point puisque la fonction $3-2\ln(1+x)$ décroit de $+\infty$ à $-\infty$ et s'annule en $x = e^{3/2}-1$
c) admet la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale et la droite $x = -1$ pour asymptote verticale
d) admet la droite $y = -1$ pour asymptote horizontale et la droite $x = 0$ pour asymptote verticale

Question 14 : Soient λ un réel strictement positif et $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la surface comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$, la courbe C_f et l'axe des abscisses. On a

a) $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda f(x)\, dx$ car la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$

b) $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda t\, dt$ en posant le changement de variable de classe C^1 : $t = \ln(1+x)$

c) $\mathcal{A}_\lambda = (½)\ln((1+\lambda)^2)$ et $\mathcal{A}_\lambda$ tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$

d) $\mathcal{A}_\lambda = (½)(\ln(1+\lambda))^2$ et $\mathcal{A}_\lambda$ tend vers $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$\text{(E)} \qquad (1+x)^2\, y'(x) + (1+x)\, y(x) - 1 = 0$$

$| \ |$ désigne la valeur absolue

Question 15 : Soit u une fonction dérivable ne s'annulant pas. On note (H) l'équation sans second membre associée à (E) et on désigne par K une constante. On a

a) une primitive de la fonction u'/u est $\ln|u| + K$
b) une primitive de la fonction u'/u est $(-1/u^2) + K$
c) l'ensemble des solutions de (H) sur l'intervalle I est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est constituée par la fonction $e^{-\ln(1+x)} = 1/(1+x)$
d) la solution générale de (H) est de la forme $K\, e^{-(x+1)}$

Question 16 : On suppose dans cette question et la suivante que $y(x) = (C(x))/(1+x)$. On a alors pour tout x réel distinct de -1

a) $y'(x) = (C'(x))/(1+x) + (C(x))/(1+x)^2$
b) $y'(x) = -(C'(x))/(1+x)^2$
c) $(C'(x))/(1+x) = -1/(1+x)^2$
d) $(C'(x))(1+x) + 2C(x) = 1$

Question 17 : Pour tout x réel distinct de -1, la fonction C vérifie

a) $C(x) = \ln(1+x) + k$ où k est une constante réelle
b) $C(x) = \ln|1+x| + k$ où k est une constante réelle
c) $C(x) = \ln(-(1+x)) + k$ où k est une constante réelle
d) $C(x) = -1/(1+x)^2 + k$ où k est une constante réelle

Tournez la page S.V.P.

Question 18 : On obtient, k_1 et k_2 désignant des constantes réelles,

a) $y(x) = [(\ln(1+x))/(1+x)]+[k_1/(1+x)]$ pour tout x réel différent de -1
b) $y(x) = [(\ln(-(1+x)))/(1+x)]+[k_1/(1+x)]$ pour tout x réel différent de -1
c) $y(x) = [(\ln(1+x))/(1+x)]+[k_1/(1+x)]$ pour x réel strictement supérieur à -1 et
$y(x) = [(\ln(-(1+x)))/(1+x)]+[k_1/(1+x)]$ pour x réel strictement inférieur à -1
d) $y(x) = (\ln(1+x))/(1+x)$ est la solution de (E) sur l'intervalle I qui s'annule en 0

Question 19 : n désigne un entier naturel. Pour tout x appartenant à l'intervalle I, on pose $g(x)= \ln(1+x)$ et $h(x)= 1/(1+x)$.

a) g admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre n de la forme

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k/k + o(x^n)$$

b) h admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre n de la forme

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

c) f admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre n de la forme

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} [\sum_{p=1}^{k} 1/p]\, x^k + o(x^n)$$

d) f admet un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre n de la forme

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} (-1)^k [\sum_{p=1}^{k} 1/p]\, x^k + o(x^n)$$

PARTIE III

On note, pour tout entier naturel k non nul:

$$a_k = \sum_{p=1}^{k} 1/p$$

On considère la suite (S_n^x), n entier strictement positif, dépendant du paramètre réel x et définie pour tout n entier strictement positif et pour tout x réel par:

$$S_n^x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k x^k$$

Question 20 : ln désignant la fonction logarithme népérien, on pose pour tout p entier naturel non nul $u_p = \ln(1+p) - \ln p$. Pour tout entier p strictement positif on montre que

a) $u_p \leq 0$
b) $u_p \leq 1/p \leq 1$ en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction ln qui est continue et dérivable sur l'intervalle $[x,x+1]$ pour tout x réel strictement positif
c) $1 \leq u_p$
d) $1/p \leq u_p$

Question 21 : Pour tout entier k strictement positif, on montre que

a) $\ln(1+k) \leq a_k \leq k$
b) $a_k \leq \ln(1+k)$
c) la suite (a_k) diverge car elle n'admet pas de limite
d) la suite (a_k) diverge et a pour limite $+\infty$

On considère, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, la fonction P_n qui à x associe

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^k/k + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1}$$

Question 22 : Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, on a

a) $P_n(x) = S_n^x$
b) $P_n(x) = (1+x)\, S_n^x - x$
c) $P_n(x) = (1-x)\, S_n^x$
d) $P_n(x) = (1+x)\, S_n^x$

Tournez la page S.V.P.

On considère, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x strictement supérieur à -1 la fonction I_n qui à x associe

$$I_n(x) = (-1)^{n-1} \int_0^x (t^n/(1+t))dt$$

Question 23 : Pour tout entier naturel n non nul et pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1, +\infty[$, on a

a) $I_n(x) = ((-1)^{n-1} x^n/n) + I_{n-1}(x)$ et $I_1(x) = x - \ln(1+x) = P_1(x) - \ln(1+x)$
b) $I_n(x) = ((-1)^{n-1} x^n/n) - I_{n-1}(x)$ et $I_1(x) = x - \ln(1+x) = P_1(x) - a_1 x^2 - \ln(1+x)$
c) $I_n(x) = P_n(x) + (-1)^n a_n x^{n+1} - \ln(1+x)$
d) $I_n(x) = P_n(x) + (-1)^{n-1} a_n x^{n+1} - \ln(1+x)$

Question 24 : Pour tout entier naturel n non nul, on a

a) $|I_n(x)| \leq |x|^{n+1}/(1+n)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]-1,1[$
b) $|I_n(x)| \leq |x|^{n+1}/((1+n)(1+x))$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]-1,1[$
c) $|I_n(x)| \leq |x|^{n+1}/((1+n)(1+|x|))$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]-1,1[$
d) $|I_n(x)| \leq x^{n+1}/(1+n)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$[0,1[$ et
$|I_n(x)| \leq |x|^{n+1}/((1+n)(1+x))$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]-1,0[$

Question 25 : Pour tout paramètre réel x appartenant à l'intervalle$]-1,1[$

a) la suite de terme général $a_n x^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car la suite de terme général $n^\alpha x^{n+1}$ converge vers 0 pour tout réel α.
b) la suite de terme général $a_n x^{n+1}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
c) la suite de terme général S_n^x converge vers $(\ln(1+x))/(1+x)$
d) la suite de terme général S_n^x converge vers $(x + \ln(1+x))/(1+x)$

PARTIE IV

Soient a, b, c des nombres complexes de modules distincts tels que pour tout entier i compris entre 1 et 3, $\alpha_i = a^i + b^i + c^i$ est un réel.
On pose $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$, $\sigma_3 = abc$.

Question 26 : a, b, c sont racines du polynôme P

a) $P = \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$
b) $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$
c) $P = X^3 - \sigma_2 X^2 + \sigma_1 X - \sigma_3$
d) $P = X^3 + \sigma_1 X^2 - \sigma_2 X + \sigma_3$

Question 27 : On a

a) $2\sigma_2 = \alpha_1{}^2 - \alpha_2$ et $\sigma_3 = \alpha_3 - \sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_1$
b) $2\sigma_2 = \alpha_2{}^2 - \alpha_1$ et $3\sigma_3 = \alpha_3 - \sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_1$
c) $2\sigma_2 = \alpha_1{}^2 - \alpha_2$ et $3\sigma_3 = \alpha_3 + \sigma_1\alpha_2 - \sigma_2\alpha_1$
d) $\sigma_2 = \alpha_1{}^2 - \alpha_2$ et $3\sigma_3 = \alpha_3 - \sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_1$

Question 28 : Le polynôme P défini à la question **26**, s'il existe,

a) n'appartient pas à IR[X]
b) appartient à IR[X]
c) admet au moins une racine réelle en tant que polynôme de degré impair à coefficients réels
d) n'admet pas de racine réelle

Question 29 : Les nombres complexes a, b, c

a) sont tous réels car sinon deux d'entre eux seraient conjugués et par conséquent auraient des modules identiques
b) sont tous de parties imaginaires non nulles
c) peuvent avoir une partie imaginaire non nulle
d) sont tous de parties réelles nulles

PARTIE V

On considère la fonction f définie sur l'intervalle J =[−1,1] par

$$f(x) = \text{Arcsin}x + \text{Arccos}x$$

Question 30 : La fonction f

a) a pour dérivée la fonction f' définie sur [−1,1] par $f'(x) = 0$
b) a pour dérivée la fonction f' définie sur]−1,1[par $f'(x) = 2/\sqrt{1-x^2}$
c) a pour dérivée la fonction f' définie sur]−1,1[par $f'(x) = 2/(1+x^2)$
d) a pour dérivée la fonction f' définie sur]−1,1[par $f'(x) = 0$

Question 31 : La fonction f est

a) strictement croissante et positive sur l'intervalle J
b) constante et égale à π sur l'intervalle J
c) strictement croissante et négative sur l'intervalle J
d) constante et égale à 0 sur l'intervalle J

On considère les fonctions g_1 et g_2 définies sur $[0,1]$ par

$$g_1(x) = \int_0^x \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt$$

$$g_2(x) = \int_0^x \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$$

Soit h la fonction qui à x associe $h(x) = g_1(\sin^2 x) + g_2(\cos^2 x)$

Question 32 : Les fonctions g_1 et g_2

a) sont de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$ car les fonctions $\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}$ et $\operatorname{Arccos}\sqrt{t}$ sont continues sur cet intervalle
b) sont de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,1[$
c) sont de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,1[$
d) sont continues mais non dérivables sur l'intervalle $[0,1]$

Question 33 : La fonction h est

a) de classe C^∞ sur IR car les fonctions $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ sont de classe C^∞ sur IR et à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$
b) de classe C^1 sur IR car les fonctions $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ sont de classe C^∞ sur IR et à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$
c) de classe C^∞ sur IR $-\{k\pi$, k entier relatif$\}$
d) continue mais non dérivable sur IR

Question 34 : La fonction h

a) est paire et périodique de plus petite période 2π
b) est paire mais n'est pas périodique
c) est π–périodique et impaire
d) est π–périodique mais n'est ni paire ni impaire

Question 35 : La dérivée h' de la fonction h est définie par

a) $h'(x) = \sin(2x)\ \mathrm{Arcsin}\sqrt{(\sin^2 x)} - \sin(2x)\ \mathrm{Arccos}\sqrt{(\cos^2 x)}$ pour tout x réel

b) $h'(x) = \mathrm{Arcsin}\sqrt{(\sin^2 x)} + \mathrm{Arccos}\sqrt{(\cos^2 x)}$ pour tout x réel

c) $h'(x) = 0$ car pour tout x réel $\mathrm{Arcsin}\sqrt{(\sin^2 x)} = \mathrm{Arcsin}(\sin x) = x$ et $\mathrm{Arccos}\sqrt{(\cos^2 x)} = \mathrm{Arccos}(\cos x) = x$

d) $h'(x) = 2x$ pour tout x réel

Question 36 : La fonction h est

a) constante sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ donc sur IR d'aprés la périodicité et la parité de h

b) égale sur IR à $h(\pi/4) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \pi/2$

c) égale sur IR à $h(\pi/4) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = 0$

d) égale sur IR à $h(\pi/4) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \pi/4$