MATHEMATIQUES

EPL/S 2015

<u>Questions liées :</u>

3 à 6

8-9

11 à 13

14 à 18

19 à 30 (sauf 23)

31-32

PARTIE I

On donne a , b et c trois entiers relatifs et n un entier naturel.

Nous rappelons que l'écriture $a \equiv b[n]$, qui représente la relation de congruence, signifie que $a-b$ est divisible par n ou autrement dit qu'il existe un entier relatif k tel que : $a-b=k\times n$.

Question 1 : on démontre que la relation de congruence :

A) Est une relation d'ordre.

B) Est une relation d'ordre total.

C) Est une relation d'équivalence.

D) Est une relation qui ne confère aucune structure à l'ensemble des nombres entiers.

Question 2 : parmi les propositions suivantes, quelle(s) propriété(s) est (sont) vraie(s) ?

A) Si P est un polynôme à coefficients entiers et si $a \equiv b[n]$ alors $P(a) \equiv P(b)[n]$.

B) Si $a\times c \equiv b\times c[n]$ alors $a \equiv b[n]$.

C) Si $a \equiv b[n]$ et si un entier naturel m divise n alors $a \equiv b[m]$.

D) Si un nombre entier naturel d divise a et b alors $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d}[n]$.

Question 3 :

A) $5^4 \equiv -1[13]$.

B) $5^4 \equiv 1[13]$.

C) $5^4 \equiv 7[13]$.

D) $5^4 \equiv 0[13]$.

Tournez la page S.V.P.

Question 4 : on en déduit alors que pour tout couple d'entiers naturels (k,r) :

A) $5^{4k+r} \equiv (-1)^k \times 5^r [13]$.

B) $5^{4k+r} \equiv 0[13]$.

C) $5^{4k+r} \equiv 5^r [13]$.

D) $5^{4k+r} \equiv 7^k \times 5^r [13]$.

Question 5 : soit n un entier naturel. Les restes possibles de la division de 5^n par 13 sont :

A) 1, 5, -1 et -5.

B) 1, 5, 8 et 12.

C) 1,2, 5 et 10.

D) 1, 5, 7 et 9.

Question 6 : soit n un entier naturel. On définit l'entier A_n par $A_n = 1+5^n+5^{2n}+5^{3n}$.

On démontre que $A_n \equiv 0[13]$ si et seulement si :

A) n est un multiple de 4. FAUX

B) n n'est pas un multiple de 4.

C) n est un multiple de 5. FAUX

D) n n'est pas un multiple de 5. FAUX

PARTIE II

Soit f la fonction définie pour x nombre réel strictement positif par : $f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

On note C_f la représentation graphique de f.

Question 7 : on établit que f est définie car :

A) La fonction $g:t\mapsto\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue pour tout nombre réel strictement positif.

B) La fonction $g:t\mapsto\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est non nulle pour tout nombre réel strictement positif.

C) L'intervalle $[x,2x]$ est inclus dans l'ensemble des réels strictement positifs.

D) La fonction $h:t\mapsto\ln(1+t^2)$ est croissante pour tout nombre réel strictement positif.

Question 8 : on démontre que pour tout nombre réel x strictement positif :

A) $f'(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}$.

B) $f'(x)=\frac{\ln(x^4+2x^2+1)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$.

C) $f'(x)=\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$.

D) $f'(x)=\frac{\ln(1+x^2)-\ln(1+2x^2)}{\ln(1+2x^2)\ln(1+x^2)}$.

Question 9 : on en déduit alors que f est :

A) Strictement croissante pour tout réel x strictement positifs.

B) Strictement décroissante pour tout réel x strictement positifs.

C) Strictement décroissante pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\sqrt{2}]$ et strictement croissante pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\sqrt{2},+\infty[$.

D) Strictement décroissante pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\sqrt{2},+\infty[$ et strictement croissante pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\sqrt{2}]$.

Question 10 : on démontre que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ car pour tout réel x strictement positif, nous avons, $\forall t \in [x, 2x]$:

A) $\dfrac{1}{\ln(1+x^2)} \leq g(t)$.

B) $\dfrac{x}{\ln(1+2x^2)} \leq g(t)$. Aucune ?

C) $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq g(t)$.

D) $\dfrac{1}{\ln(1+2x^2)} \leq g(t)$.

Question 11 : de façon plus précise, on démontre que la fonction f vérifie pour tout x nombre réel strictement positif :

A) $\dfrac{2x}{\ln(1+2x^2)} \leq f(x) \leq \dfrac{2x}{\ln(1+x^2)}$.

B) $\dfrac{x}{\ln(1+2x^2)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

C) $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

D) $\dfrac{1}{\ln(1+2x^2)} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$.

Question 12 : on démontre alors que pour x tendant vers $+\infty$, nous avons :

A) $f(x) \sim \dfrac{2\ln x}{x}$.

B) $f(x) \sim \dfrac{x}{2\ln x}$.

C) $f(x) \sim \dfrac{\ln x}{x}$.

D) $f(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

Question 13 : on en déduit que la courbe représentative C_f de cette fonction f :

A) Admet une asymptote verticale.
B) Admet une asymptote horizontale.
C) Admet une branche parabolique d'axe l'axe des abscisses.
D) Admet une branche parabolique d'axe l'axe des ordonnées.

PARTIE III

$x(x^4+n)$

Soit n un entier naturel non nul.
On définit pour tout nombre réel x la fonction f_n par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

Question 14 : après étude des variations de la fonction f_n :

A) On démontre que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'ensemble des réels que l'on note u_n.

B) On démontre que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions réelles que l'on note u_n et v_n.

C) On démontre que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle.

D) On ne peut rien dire quant à l'équation $f_n(x) = 0$.

Question 15 : on démontre que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1, e]$:

A) (u_n) est croissante car f_n est croissante.

B) (u_n) est décroissante car f_n est croissante.

C) (u_n) est croissante puis décroissante.

D) On ne peut rien dire quant aux variations de (u_n) .

Question 16 : on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1, e]$:

A) $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$.

B) $0 < u_n < \dfrac{1}{2n}$.

C) $0 < u_n < \dfrac{1}{3n}$.

D) $0 < u_n < \dfrac{1}{4n}$.

Question 17 :

A) On démontre que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

B) On démontre que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

C) On démontre que $u_n \sim \dfrac{1}{n-1}$.

D) Il n'est pas possible de trouver un équivalent de cette suite.

Question 18 : on démontre que :

A) $\frac{1}{n}-u_n \sim \frac{1}{n^6}$.

B) $\frac{1}{n}-u_n \sim \frac{1}{2n^6}$.

C) $\frac{1}{n}-u_n \sim \frac{1}{n^5}$.

D) $\frac{1}{n}-u_n \sim \frac{1}{2n^5}$.

PARTIE IV

Soit k la fonction définie par $k(x)=x-\ln\left(1+x^2\right)$. On note C_k la courbe représentative de k dans un repère orthonormé. On donne la valeur approchée $\ln 2 \approx 0,69$:

Question 19 : on établit que :

A) La fonction k est définie, continue et dérivable sur l'ensemble des réels positifs.

B) La fonction k est définie, continue et dérivable sur l'ensemble des réels négatifs.

C) La fonction k est définie, continue et dérivable uniquement sur l'ensemble des réels strictement positifs.

D) La fonction k est définie, continue et dérivable uniquement sur l'ensemble des réels strictement négatifs.

Question 20 : on établit que la fonction k est strictement croissante car :

A) $k'(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

B) $k'(x)=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

C) $k'(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

D) $k'(x)=\frac{1}{1+x^2}+1$.

Question 21 : on en déduit que C_k admet au point d'abscisse 0 une tangente :

A) Horizontale.

B) D'équation $y = 2x$.

C) D'équation $y = x$.

D) Verticale.

Question 22 : on en déduit que C_k admet au point d'abscisse 1 une tangente :

A) Horizontale.

B) D'équation $y = 2x$.

C) D'équation $y = \frac{3}{2}x$.

D) Verticale.

Question 23 : on démontre que $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$ car pour tout réel x strictement positif :

A) $k(x) = x\left[1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$.

B) $k(x) = x\left[1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$.

C) $k(x) = x\left[1 - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$.

D) $k(x) = x\left[1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$.

Aucune ?

Question 24 : pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = k \times u_n$. On peut alors établir que :

A) La suite (u_n) est croissante car la fonction k est croissante sur l'ensemble des réels positifs.

B) La suite (u_n) est croissante car la fonction k est croissante sur l'ensemble des réels positifs et $u_1 > u_0$.

C) La suite (u_n) est décroissante car la fonction k est croissante sur l'ensemble des réels positifs et $u_1 < u_0$.

D) La suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

Question 25 : on démontre que la suite (u_n) est convergente vers l car :

A) La suite (u_n) est croissante majoré.

B) La suite (u_n) est décroissante minorée par -1.

C) La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.

D) La suite (u_{2n}) est croissante majorée et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante minorée.

Question 26 : on établit que cette limite l est l'unique solution de l'équation $k(l) = l$ car :

A) La fonction k est continue sur l'ensemble des réels positifs.

B) La fonction k est strictement croissante sur l'ensemble des réels positifs.

C) La fonction k est croissante sur l'ensemble des réels positifs.

D) La fonction k est croissante sur l'ensemble des réels.

Question 27 : on démontre que pour tout x :

A) De l'intervalle $[0,1]$, nous avons $k(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$. ✓

faux

B) De l'intervalle $[0,+\infty[$, nous avons $k(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

C) De l'intervalle $[1,+\infty[$, nous avons $k(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

D) De l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, nous avons $k(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

Question 28 : on en déduit que :

A) $u_n^{\,2} \leq 2(u_n - u_{n+1})$ car $u_n \geq 0$.

B) $u_n^{\,2} \leq 2(u_n - u_{n+1})$ car $0 \leq u_n \leq 1$.

C) $\frac{1}{2}u_n^{\,2} \leq 2(u_n - u_{n+1})$ car $0 \leq u_n \leq 1$.

D) $\frac{1}{2}u_n^{\,2} \leq 2(u_n - u_{n+1})$ car $u_n \geq 0$.

Question 29 : pour tout entier naturel n, on définit deux suites (S_n) et (T_n) telles que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^{\,2}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} 2(u_k - u_{k+1})$. On démontre que :

A) La suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $S_n \leq T_n$.

vrai FAUX

Aucune

B) La suite (S_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $S_n \leq T_n$.

C) La suite (T_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $S_n \leq T_n$.

D) La suite (T_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $S_n \leq T_n$.

Question 30 : on démontre que :

A) $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

B) $\lim_{n\to+\infty} T_n = 0$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.

C) $\lim_{n\to+\infty} T_n = 1$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

D) $\lim_{n\to+\infty} T_n = 2$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE V

On note $\mathfrak{M}_n(C)$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres complexes.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ une matrice de $\mathfrak{M}_n(C)$ qui vérifie la propriété suivante, que l'on note $P(n)$:

il existe un entier naturel non nul n tel que, $A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I = (0)$, (0) étant la matrice nulle.

Question 31 : on établit que :

A) A est inversible d'inverse A^n .

B) A n'est pas inversible.

C) A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que : $A^k = (0)$ et $A^{k-1} \neq (0)$.

D) A est quelconque.

Question 32 : on démontre que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}$:

A) Vérifie $P(n)$.

B) Ne vérifie pas $P(n)$.

C) A pour inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & -1+i \\ 0 & i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & i+2 \end{pmatrix}$.

D) A pour inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-2i & 1-i & -1+i \\ 0 & -i & 0 \\ 2-2i & 2-2i & i-2 \end{pmatrix}$.

Question 33 : λ étant un nombre complexe non nul, en s'inspirant du résultat

$\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{\lambda}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^k$ appliqué aux matrices, on démontre que, A nilpotente implique que $A-\lambda I$:

A) N'est pas inversible.

B) Est inversible d'inverse $(A-\lambda I)^{-1}=-\lambda^{-1}I-\lambda^{-2}A-...-\lambda^{-n}A^{n-1}$.

C) Est nilpotente.

D) Est la matrice nulle.

Question 34 : $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ vérifie à présent pour tout $1\le i\le n$, $|a_{ii}|>\sum_{j\ne i}^{n}|a_{ij}|$. On démontre que :

A) Les vecteurs colonnes de A forment un système lié et donc la matrice est n'est pas inversible.

B) Les vecteurs colonnes de A forment un système libre et donc la matrice est inversible.

C) Les vecteurs colonnes de A forment un système libre mais on ne peut pas se prononcer sur le fait que soit inversible.

D) Les vecteurs colonnes de A forment un système lié mais on ne peut pas se prononcer sur le fait que soit inversible.

Question 35 : on démontre que la matrice $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

A) N'est pas inversible.

B) Est inversible, d'inverse : $B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

C) Est inversible, d'inverse : $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -6\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

D) Est inversible, d'inverse : $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Question 36 : on démontre que la matrice $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$:

A) N'est pas inversible.

B) Est inversible, d'inverse : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

C) Est inversible, d'inverse : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D) Est inversible, d'inverse : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS EPL/S 2015

ERRATUM

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

A la :

Question 36 : on démontre que la matrice $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$:

on remplacera $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$ ***par*** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$:

A la :

Question 23 : on démontre que $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$ car pour tout réel x strictement positif :

On remplacera $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$ ***par*** $\lim_{n \to +\infty} k(x) = +\infty$:

7, avenue Edouard Belin - BP 54005 - 31055 Toulouse Cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00 - Fax + 33 (0) 5 62 17 40 23
www.enac.fr

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS EPL/S 2015

ERRATUM

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

A la :

Question 23 : ***On remplacera*** $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$ ***par*** $\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$:

7, avenue Edouard Belin - BP 54005 - 31055 Toulouse Cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00 - Fax + 33 (0) 5 62 17 40 23
www.enac.fr

ENAC
ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Admissions et Vie des Campus

Toulouse, le **10 AVRIL 2015**

Affaire suivie par Mme. Viviane BAROLLO
Tél. : 05.62.17.40 76

De : Viviane BAROLLO	Tél : **05.62.17. 40 76**	Fax : **05.62.17.40 79**
A : TOUS **CHEFS DE CENTRE**	Tél :	Fax :

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 1

CONCOURS EPL/S 2015

ERRATA 3

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

A la : Question 24 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = k \times u_n$ il faut lire $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = k(u_n)$

7, avenue Edouard Belin - BP 54005 - 31055 Toulouse Cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00 - Fax + 33 (0) 5 62 17 40 23
www.enac.fr

ENAC

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Admissions et Vie des Campus Toulouse, le **10 AVRIL 2015**

Affaire suivie par Mme. Viviane BAROLLO
Tél. : 05.62.17.40 76

De : Viviane BAROLLO	Tél : **05.62.17. 40 76**	Fax : **05.62.17.40 79**
A : TOUS **CHEFS DE CENTRE**	Tél :	Fax :

Nombre de pages (y compris celle-ci) : 1

<u>CONCOURS EPL/S 2015</u>

ERRATA 4

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

A la Question 34 :

A)Les vecteurs colonnes de A forment un système lié et donc la matrice **est n'est** pas inversible.

Il faut lire :

A)Les vecteurs colonnes de A forment un système lié et donc la matrice **n'est pas inversible**.

7, avenue Edouard Belin - BP 54005 - 31055 Toulouse Cedex 4
Tél. + 33 (0) 5 62 17 40 00 - Fax + 33 (0) 5 62 17 40 23
www.enac.fr