ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Avril 1992

CONCOURS DE RECRUTEMENT

ELEVES - PILOTES DE TRANSPORT (EPT-T)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES Spéciale T

A LIRE TRES ATTENTIVEMENT

DUREE: 4 heures
Coefficient 4

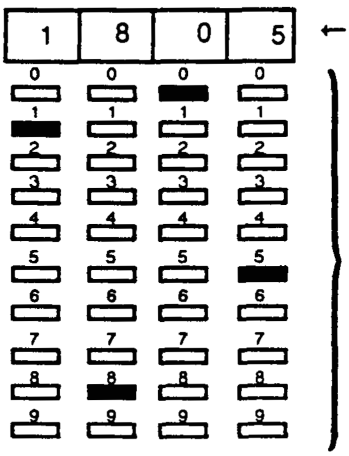
L'épreuve de Mathématiques "OBLIGATOIRE" de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

INSTRUCTIONS POUR REMPLIR LA FEUILLE DE REPONSES

1) Indiquez le concours et l'épreuve en rayant les mentions inutiles.

2) Inscrivez votre n° d'inscription dans la partie supérieure gauche de la feuille réponses ; supposons que votre numéro d'inscription (qui figure sur votre convocation) soit 1805 :

NUMERO



← a) inscrivez les 4 chiffres dans les cases ci-contre.

b) noircissez :

. pour le chiffre 1 le rectangle 1ère colonne ligne des 1.

. pour le chiffre 8 le rectangle 2ème colonne ligne des 8.

. pour le chiffre 0 le rectangle 3ème colonne ligne des 0.

. pour le chiffre 5 le rectangle 4ème colonne ligne des 5.

(voir modèle ci-contre)

3) Inscrivez vos : NOM
Prénoms
Date de naissance

4) La feuille de réponses doit être remplie à l'aide d'un crayon **n° 2 ou HB**, à l'exclusion de tout autre moyen d'écriture. **En effet, le lecteur optique ne détecte que les marques faites au crayon et il les lit même si elles ont été gommées - DONC PAS DE GOMMAGE -**

- Utilisez le questionnaire comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement. En cas d'erreur sur la feuille de réponses, n'hésitez pas à en demander une nouvelle aux surveillants.

- Prenez soin, lorsque vous noircissez une marque, de ne pas déborder sur les marques avoisinantes sous peine de pénalisation pour réponses multiples. (correction automatique)

- Votre feuille de réponses ne doit pas être souillée, froissée, pliée, écornée ou porter des inscriptions superflues sous peine d'être rejetée par la machine et de ne pas être corrigée.

T.S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 50 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet. **Chaque candidat devra choisir au plus 40 questions parmi les 50 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 40 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 40 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 50, correspond sur la feuille–réponses une ligne de cases qui porte le même numéro. (les lignes de 51 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e. Pour chaque ligne de 1 à 50 vous vous trouvez en face de quatre possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
  vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.
- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.
- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case e.

Attention toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

7) EXEMPLE :

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut

a) 3 b) 5 c) 4 d) −1

Question 2 : le produit (−1) (−3) vaut

a) −3 b) −1 c) 4 d) 0

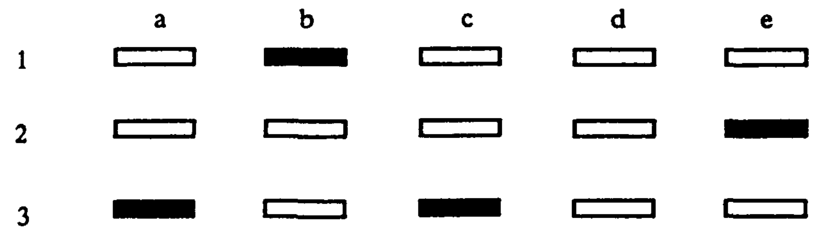
Question 3 : les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$ sont

a) 1 b) 0 c) −1 d) 2

QUESTIONS LIEES :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
(10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)
(18, 19, 20, 21, 22)
(23, 24, 25, 26)
(27, 28, 29, 30)
(31, 32, 33)
(34, 35)
(36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44)
(45, 46, 47, 48, 49, 50)

Vous marquerez sur la feuille-réponses :



On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équations paramétriques, dans le repère orthonormé Oxy

$$x(t) = \frac{t^2-1}{t}, \quad y(t) = \frac{t-1}{t(t+1)}$$

t paramètre réel.

Question n° 01 :

Les fonctions x et y sont définies et continues sur l'ensemble $\mathcal{I}$ qui vaut

a) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.

Les fonctions x et y sont dérivables et à dérivées continues sur l'ensemble $\mathcal{D}$ qui vaut

c) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Question n° 02 :

Pour $t=0$, $\mathcal{C}$ admet

a) une branche infinie.

b) pour asymptote, la droite $y = 2x - 1$.

c) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe Ox.

d) pour asymptote, la droite $y = x + 2$.

Question n° 03 :

Pour $t = -1$, $\mathcal{C}$ admet

a) deux branches infinies distintes (pour $t \to -1^+$ et pour $t \to -1^-$).

b) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe Oy.

c) pour asymptote, une droite parallèle à l'axe Ox.

d) pour asymptote, l'axe Ox.

Question n° 04 :

$\mathcal{C}$ admet

a) au plus deux asymptotes.

b) au moins deux asymptotes.

c) deux asymptotes parallèles à Ox.

d) deux asymptotes parallèles à Oy.

Question n° 05 :

a) $x' > 0$, $\forall\, t \in \mathcal{D}$.

b) x' est nulle pour $t^2 = 1$.

c) x est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}$.

d) x admet un extremum en $t = 1$.

Question n° 06 :

On suppose que y' s'annule pour deux valeurs $\alpha < 0 < \beta$. Si vous jugez que cette hypothèse n'est pas posssible, alors marquer la case e pour votre réponse. Dans le cas contraire

a) $\alpha\beta = -1$.

b) $\alpha + \beta = 1$.

c) $\alpha\beta = 1$.

d) $\alpha + \beta = 2$.

Question n° 07 :

A partir du tableau de variation des fonctions x et y, nous obtenons les informations suivantes :

a) x étant une fonction impaire, alors $\mathcal{C}$ admet l'axe Oy pour axe de symétrie.

b) x est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) y est bornée sur l'intervalle $]-1, 0[$.

d) y admet un extremum (et un seul) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Question n° 08 :

La recherche des points doubles de $\mathcal{C}$ est obtenue par la résolution du système $x(t_1) = x(t_2),\ y(t_1) = y(t_2)$, où $t_1 < t_2$.

a) Le sytème précédent n'admet aucune solution.

Si le système précédent admet une solution alors

b) $t_1 = -1 - \sqrt{2}$, $t_2 = -t_1$.

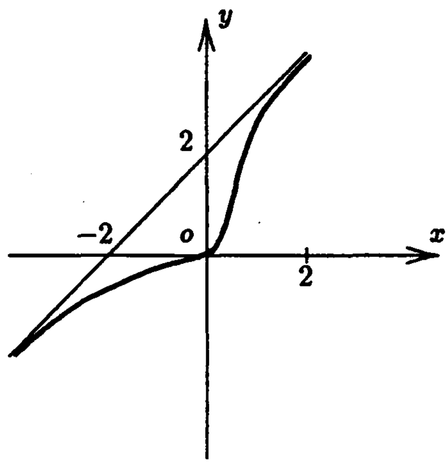
c) $t_1 = -1 - \sqrt{2}$, $t_2 = -1 + \sqrt{2}$.

d) $t_1 = -1 + \sqrt{2}$, $t_2 = -1 - \sqrt{2}$.

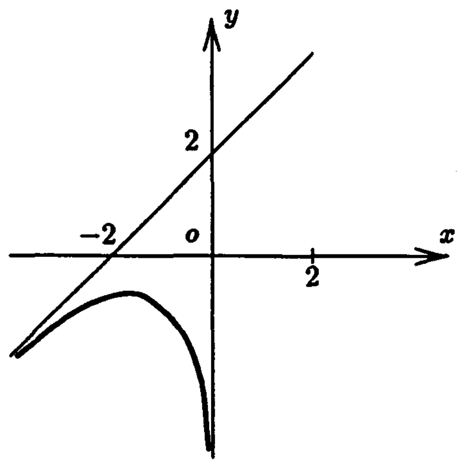
Question n° 09 :

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $\mathcal{C}$ est représentée par

a)

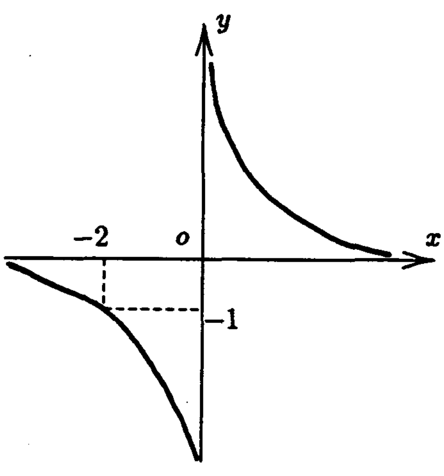


b)

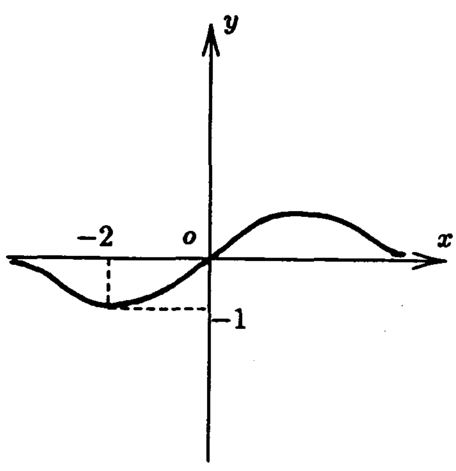


Sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, $\mathcal{C}$ est représentée par

c)



d)



On considère la fonction de la variable réelle x, définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + x^2}$$

α paramètre réel.

Question n° 10 :

Le comportement de f au voisinage $x = 0$ est

a) $f(x) \sim x^{\alpha-2}$. b) $f(x) \sim x^{\alpha}$.

Le comportement de f au voisinage $x = +\infty$ est

c) $f(x) \sim x^{\alpha-2}$. d) $f(x) \sim x^{\alpha}$.

Question n° 11 :

On note, si elle existe $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x > 0$.

a) F existe pour tout α réel. b) F n'existe que si $\alpha > -1$.

c) F existe si $-1 < \alpha < 1$. d) F n'existe que si $\alpha < 1$.

Question n° 12 :

$F(+\infty)$ est définie pour

a) $\alpha < 1$. b) $-1 < \alpha < 1$. c) $\alpha > -1$. d) $\alpha > 1$.

Question n° 13 :

On considère la fonction $g(u) = \dfrac{1}{u^2 + 2bu + 1}$, où b est tel que $|b| < 1$.

A une constante additive prés, g admet pour primitive

a) $G(u) = \ln(u^2 + 2bu + 1)$. b) $G(u) = \text{Arctan}\,(u + \sqrt{1 - b^2})$.

c) $G(u) = \ln \dfrac{u + \sqrt{1 - b^2}}{u - \sqrt{1 - b^2}}$. d) $G(u) = \text{Arctan}\, \dfrac{u + b}{\sqrt{1 - b^2}}$.

Dans les questions suivantes, on note $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, où α est tel que $I(\alpha)$ existe.

Question n° 14 :

On considère l'intégrale $I(-\frac{1}{2})$, et on effectue dans cette intégrale le changement de variable $t \to \varphi(t) = \sqrt{t}$.

a) Le changement de variable proposé n'a pas de sens car la fonction φ n'est pas bijective.

Si ce changement de variable est possible, alors nous obtenons une nouvelle intégrale qui s'exprime par

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,d\varphi}{1 + \varphi^4}$. c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,d\varphi}{1 + \varphi}$. d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\varphi\,d\varphi}{1 + \varphi^4}$.

Question n° 15 :

On considère l'intégrale $I(\frac{1}{2})$, et on effectue dans cette intégrale le changement de variable $t \to \psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

a) Le changement de variable proposé n'a pas de sens car la fonction ψ n'est pas bijective.

Si ce changement de variable est possible, alors nous obtenons une nouvelle intégrale qui s'exprime par

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,d\psi}{1 + \psi^4}$. c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,d\psi}{1 + \psi}$. d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\psi\,d\psi}{1 + \psi^4}$.

Question n° 16 :

Nous pouvons écrire

a) $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} = \dfrac{1/2}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \dfrac{1/2}{t^2-t\sqrt{2}+1}$.

b) $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} = \dfrac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \dfrac{t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}$.

c) $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} = \dfrac{1}{t^2-1} + \dfrac{1}{t^2+1}$.

d) $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} = \dfrac{t-\sqrt{2}}{t^2-1} + \dfrac{t+\sqrt{2}}{t^2+1}$.

Question n° 17 :

Nous admettons que le changement de variable $t \to \varphi(t) = t^2$ dans l'intégrale $I(\frac{1}{2})$ et les résultats qui précédent permettent d'écrire que

$$I(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\, dt.$$

La valeur de l'intégrale $I(\frac{1}{2})$ est

a) 0.

b) -1.

c) $5\,\dfrac{\pi}{7}$.

d) $\pi\sqrt{2}$.

Soit la fonction de la variable réelle x définie par

$$F(x) = \int_0^1 |x-t|\, f(t)\, dt$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$.

On note $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, $B(x) = \displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt$, $\forall\, x \in [0,1]$.

Question n° 18 :

Pour $x \leq 0$, nous avons

a) $F(x)$ constant.

b) $F(x) = -x\, A(1) + B(1)$.

c) $F(x) = 2\,x\, A(1) - B(1)$.

d) $F(x) = x\, A(1) + B(1)$.

Question n° 19 :

Pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons

a) $F(x)$ constant.

b) $F(x) = -2\,x\, A(1) + x\, B(1)$.

c) $F(x) = 2\,x\, A(x) - 2\, B(x)$.

d) $F(x) = 2\,x\, A(x) + 2\, B(x)$
$- x\ A(1) + B(1)$.

Question n° 20 :

Pour $x \geq 1$, nous avons

a) $F(x)$ constant.

b) $F(x) = x\, A(1) + B(1)$.

c) $F(x) = x\, A(1) - B(1)$.

d) $F(x) = x\, A(1) + B(x)$.

Dans les deux questions suivantes on suppose que $f(t) = t^2$.

Question n° 21 :

La fonction $F(x)$ est alors :

a) $F(x) = -\dfrac{x}{3}$, $\forall\, x \in]-\infty, 0]$.

b) $F(x) = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}$, $\forall\, x \in]-\infty, 0]$.

c) $F(x) = -\dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}$, $\forall\, x \in [0,1]$.

d) $F(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{4}$, $\forall\, x \in [1, +\infty[$.

Question n° 22 :

a) La fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction F admet un seul extremum sur $\mathbb{R}$.

A 10^{-3} prés par défaut

c) le maximum de F est 0,052.

d) le minimum de F est 0,052.

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$(x^2+1)\,y' + 3\,x\,y = x \qquad (E)$$

dont l'équation homogène associé est

$$(x^2+1)\,y' + 3\,x\,y = 0 \qquad (E_1)$$

Question n° 23 :

L'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel

a) de dimension 1.

b) de dimension 2.

L'ensemble des solutions de (E_1) est un espace vectoriel

c) de dimension 1.

d) de dimension 2.

Question n° 24 :

a) Il n'existe pas de solution particulière polynômiale de (E).

Dans le cas contraire, une solution particulière polynômiale de (E) est

b) $y_0(x) = \dfrac{x}{3}$.

c) $y_0(x) = \dfrac{1}{3}$.

d) $y_0(x) = 2\,\dfrac{x}{3}$.

Question n° 25 :

Les solutions de (E_1) s'obtiennent

a) par séparation des variables.

b) en posant $y = y_0\,z$, où y_0 est une solution particulière. Alors z vérifie une équation du premier degré à coefficients constants.

Une solution de (E_1) est

c) $y_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

d) $y_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Question n° 26 :

a) Nous déduisons de ce qui précède que (E) n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas, où (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$, alors

b) il existe une seule solution sur $\mathbb{R}$.

c) il existe une infinité de solution sur $\mathbb{R}$, car (E) est une équation linéaire du premier ordre. (Le résultat est acquis par cette hypothèse).

d) la seule solution de (E) est $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \dfrac{1}{3}$.

On note $v_{+\infty} =]A, +\infty[$ et $v_2 =]2-\eta, 2+\eta[$, où A et η sont des réels strictement positifs.
On considère la fonction de la variable réelle f définie sur $I =]2+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Question n° 27 :

a) $\forall\, A > 0$, il n'existe pas $\eta > 0$ tel que l'on ait $f(v_2 \cap I) \subset v_{+\infty}$.

Dans le cas où, $\forall\, A > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que l'on ait $f(v_2 \cap I) \subset v_{+\infty}$, alors nous pouvons choisir

b) $\eta = \dfrac{1}{A}$. c) $|2-\eta| \leq \dfrac{1}{A}$. d) $\eta < \frac{1}{A}$.

Question n° 28 :

L'étude proposée à la question précédente, permet de préciser pour f et sa courbe représentative $\mathcal{C}$, que :

a) la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

b) la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 2$, pour asymptote horizontale.

c) f est prolongeable par continuité en $x = 2$ (à droite).

d) f n'est pas prolongeable par continuité en $x = 2$ (à droite).

Question n° 29 :

On se propose dans cette question de déterminer, s'il existe, un intervalle $v_3 =]3-\epsilon, 3+\epsilon[$, où ϵ est un réel strictement positif tel que l'on ait

$$\forall\, x \in v_3 \cap I \implies |f(x) - f(3)| \leq 2\,|x-2| \qquad (1)$$

a) La réponse est négative (ie : il n'existe aucune valeur possible pour ϵ telle que (1) soit vérifiée).

Si la réponse est positive, alors nous pouvons choisir

b) $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. c) $\epsilon > \dfrac{1}{2}$. d) $\epsilon < \dfrac{1}{2}$.

Question n° 30 :

La relation (1) permet d'établir que la fonction f est

a) continue au point $x = 3$.

b) discontinue au point $x = 3$.

c) continue sur I.

d) bornée dans l'intervalle $]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[$.

On considère la fonction de la variable complexe définie par

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2i} \qquad (1)$$

Question n° 31 :

a) f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

b) f est une involution (ie : $f = f^{-1}$).

D'une manière générale toute fonction de la variable complexe définie par $f(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$, est pour tout a, b, c, d complexes tels que : $ad - bc \neq 0$

c) une involution.

d) une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

Dans les deux questions suivantes f est la fonction définie par (1).

Question n° 32 :

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel est :

a) sur une droite.

b) sur la droite passant par les points A et B d'affixes respectives -1 et 2i, et privée du point B.

c) le cercle de diamètre AB.

d) le cercle de diamètre AB privé du point B.

Question n° 33 :

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$ est :

a) sur une droite.

b) sur la droite passant par les points A et B d'affixes respectives -1 et 2i, privée du point B.

c) le cercle de diamètre AB.

d) le cercle de diamètre AB privé du point B.

On considère la variable aléatoire X obéissant à la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de moyenne μ et d'écart-type σ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} Prob(X \leq 4) &= 0,1271 \\ Prob(X < 16) &= 0,9967 \end{aligned}$$

Soit la variable aléatoire $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Extraits de la table de la loi normale centrée réduite :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

t	...	1.00	1.10	1.20	...	1.90	2.00	2.10	...	2.60	2.70	2.80	...
0.00	...	.8413	.8643	.8849	...	.9713	.9773	.9821	...	.9953	.9965	.9975	...
0.02	...	.8461	.8686	.8888	...	.9726	.9783	.9830	...	.9956	.9967	.9976	...
0.04	...	.8508	.8729	.8925	...	.9738	.9793	.9838	...	.9959	.9968	.9978	...
0.06	...	.8554	.8770	.8962	...	.9750	.9803	.9846	...	.9961	.9971	.9979	...
0.08	...	.8599	.8810	.8997	...	.9762	.9812	.9854	...	.9963	.9973	.9980	...

Par exemple F(2.06) = 0.9803.

Question n° 34 :

a) T n'est pas une variable aléatoire.

Dans le cas où T est une variable aléatoire, alors

b) T est centrée, mais non réduite.

c) T est centrée et réduite.

d) T obéit à la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Question n° 35 :

Les valeurs de μ et σ définies ci-dessus vérifient le système :

a) $\begin{cases} \mu + 1,14\,\sigma = 4 \\ \mu + 2,72\,\sigma = 16 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \mu - 1,14\,\sigma = 4 \\ \mu - 2,72\,\sigma = 16 \end{cases}$.

Nous avons alors les valeurs de μ et σ

c) $\mu = 7,5$ et $\sigma = 3,1$.

d) $\mu = 4$ et $\sigma = 3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $F_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $F_{-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ et l'on pose de manière habituelle $\vec{u} = (x, y, z)$.

Question n° 36 :

a) F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) $x - 5y + 2z = 0$ est une équation de F_1.

c) F_1 est de dimension 3, donc f est diagonalisable.

d) F_1 est de dimension 2.

Question n° 37 :

a) F_{-1} étant un sous espace vectoriel de dimension 2, alors -1 est une valeur propre de f.

b) Le noyau de f est vide (ie : $\operatorname{Ker} f = \emptyset$).

c) $F_{-1} = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Imf} f$.

d) -1 est la seule valeur propre de f.

Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{I} = \vec{i} - \vec{k},\ \vec{J} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{K} = \vec{k})$.

Question n° 38 :

$\mathcal{B}$ est une famille

a) libre mais pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

b) non libre mais génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Dans le cas où $\mathcal{B}$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice de f dans cette nouvelle base est

c) triangulaire supérieure.

d) telle que les termes de la diagonale principale sont tous égaux à 1.

Question n° 39 :

Il existe une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$

a) ne soit pas inversible.

b) soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) soit telle que $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) soit telle que $P = A$.

Question n° 40 :

Soit n un entier naturel non nul et l'endomorphisme f^n de matrice A^n dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$. On pose $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Il existe une base dans laquelle f^n a pour matrice B_n.

b) Les matrices B_n et A^n ne sont pas semblables mais sont équivalentes.

c) Le déterminant de A^n est 1.

d) La somme des éléments diagonaux de A^n est $3n$.

Question n° 41 :

Nous avons

a) $(A-I)^2 = O$ (O désigne la matrice nulle de $\mathbb{R}^3$).

b) $A^n = A^2$, $\forall\, n \geq 2$.

c) $\forall\ n \geq 0$, il existe deux suites (α_n) et (β_n) et une matrice B tels que $A^n = (A-I)^2 B + \alpha_n A + \beta_n I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

d) le c) n'est vrai que seulement si $n \leq 3$.

Question n° 42 :

Nous pouvons écrire dans l'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X]$

$$X^n = (X-1)^2\, Q(X) + \alpha\, X + \beta, \text{ pour } n \geq 0.$$

Nous avons

a) α et β sont des constantes (indépendantes de n).

b) $\alpha + \beta = 1$.

c) $\alpha = n$.

d) $\beta < 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Soient les trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) définies pour $n \geq 0$ par les relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4\,a_n - 15\,b_n + 3\,c_n \\ b_{n+1} = a_n - 4\,b_n + c_n \\ c_{n+1} = 2\,a_n - 10\,b_n + 3\,c_n \end{cases}$$

où $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$. Les questions précédentes permettent le calcul explicite de ces trois suites mais il est également possible de déterminer ces trois suites par d'autres méthodes.

Si l'on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, le système peut s'écrire $U_{n+1} = A\, U_n$.

Question n° 43 :

a) Nous avons la relation matricielle

$$U_{n+1} = A^n\, U_0.$$

b) Nous avons la relation matricielle

$$U_n = A^n\, U_0.$$

c) La derniére colonne de A^n suffit pour obtenir l'expression de U_n.

d) La premiére colonne de A^n suffit pour obtenir l'expression de U_n.

Question n° 44 :

a) Pour tout n, $b_n = 2c_n$ et $a_n = 1 + 3c_n$.

b) Pour tout n, $c_n = 2b_n$ et $a_n = 1+3b_n$.

c) Pour tout n, $a_n = 1+3n$, $b_n = 1-5n$ et $c_n = 2n+1$.

d) Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites arithmétiques de raisons différentes.

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, soient les points non alignés, A, B et C.
On considère l'application de $\mathcal{P}$ dans lui même définie par

$$\varphi(M) = (m+1)\ \overrightarrow{AM}\ + (-3m+2)\ \overrightarrow{BM}\ + (3m-4)\ \overrightarrow{CM}$$

où m est un paramètre réel.

Question n° 45 :

Pour tout m réel, nous avons

a) φ est injective, mais non surjective.

b) φ est bijective.

c) Si de plus m est différent de 1, alors il existe un unique point M tel que $\varphi(M) = \vec{0}$.

d) Il existe une valeur unique de m pour laquelle l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = \varphi(A)$ a pour cardinal 2.

Dans la suite, on note I le barycentre (s'il existe) des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1, -3 et 3. On note J l'unique point (s'il existe) tel que $\varphi(J) = \vec{0}$, pour $m = 0$.

Question n° 46 :

a) Le point J n'existe pas.

Dans l'hypothèse où J existe alors

b) il est unique.

c) les équations $\varphi(M) = \vec{0}$ et $(m-1)\ \overrightarrow{IM}\ +\ \overrightarrow{IJ}\ = \vec{0}$ sont équivalentes.

d) L'ensemble des points M tels que l'on ait $\varphi(M) = \vec{0}$ est, lorsque m décrit $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, une droite parallèle à la droite IJ.

Dans toutes les questions suivantes, on suppose $m \neq 1$ et on considère un repère orthonormé Axy avec $B(3,1)$ et $C(-2,6)$. M désignant l'unique point tel que $\varphi(M) = \vec{0}$.

Dans les deux questions suivantes $m = 2$.

Question n° 47 :

Nous avons

a) Le triangle ABC est rectangle et isocèle.

b) Les droites AI et BC sont parallèles.

c) La droite BM coupe le segment $[AC]$ en son milieu.

d) I est le milieu du segment $[MJ]$.

Question n° 48 :

Si K désigne le milieu du segment $[BC]$ et L celui du segment $[AC]$, alors nous avons

a) les droites AK et IJ parallèles.

b) L est sur la droite BI.

c) L est sur la droite MK.

d) la droite BL coupe le segment $[MI]$ en son milieu.

Dans les deux questions suivantes $m = \frac{2}{3}$. k étant un paramètre réel, soit l'ensemble

$$E_k = \{S \in \mathcal{P} \quad \text{tel que} \quad \frac{5}{3} SA^2 - 2\,SC^2 = k\}.$$

Question n° 49 :

a) M a pour coordonnées (36,−12).

b) L'ensemble E_k est caractérisé par la relation $MS^2 = 3\,(200 - k)$.

c) $E_k = \emptyset \iff k > 400$.

d) E_k est un cercle de centre M si et seulement si $k \leq 400$.

Question n° 50 :

a) Il existe deux (exactement) valeurs de k telles que $A \in E_k$.

b) Il n'existe aucune valeur de k telle que $C \in E_k$.

c) $L \in E_0$ (L est le milieu du segment $[AC]$).

d) Pour tout point N de la droite AC distinct de M, il existe une et une seule valeur de k telle que $N \in E_k$.