ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS DE RECRUTEMENT EXTERNE
D'ELEVES PILOTES DE LIGNE

EPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 4

QUESTIONS LIEES :

(1,2,3,4,5)
(6,7,8)
(9,10,11,12,13,14)
(15,16,17,18,19,20,21)
(22,23,24,25,26,27)
(28,29,30.31,32)
(33,34)
(35,36,37,38)
(39.40)

Cette épreuve comporte 40 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet. **Chaque candidat devra choisir au plus 32 questions parmi les 40 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 32 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 01, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 32 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

A chaque question numérotée entre 01 et 40, correspond sur la feuille–réponses une ligne de cases qui porte le même numéro. (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne de 01 à 40 vous vous trouvez en face de quatre possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
  vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.
- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.
- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case e.

Attention toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

a réel tel que $0 \leq a < 2\pi$, on pose

$$z_1 = 1 + \cos a + i \sin a$$
$$z_2 = \sqrt{1 + \sin 2a} + i\sqrt{1 - \sin 2a}$$

Question n° 01 :

Nous pouvons écrire $z_1 = 1 + e^{ia}$ donc pour tout a, le module $|z_1|$ de z_1 est

a) strictement supérieur à 1.

b) inférieur ou égal à 1.

Nous pouvons écrire aussi $z_1 = 2\,e^{ia/2} \cos a/2$, soit pour tout a

c) $|z_1| = 2 \cos a/2$.

d) $|z_1| = 2\,|\cos a/2|$.

Question n° 02 :

Nous avons pour $0 \leq a < \pi$,

a) $\sqrt{1 + \sin 2a} = \cos a + \sin a$.

b) $\sqrt{1 - \sin 2a} = \cos a(1 - \tan a)$.

Nous avons pour $\pi \leq a < 2\pi$,

c) $\sqrt{1 + \sin 2a} = \cos a + \sin a$.

d) $\sqrt{1 - \sin 2a} = -\cos a(1 - \tan a)$.

Question n° 03 :

Nous en déduisons que le module de z_2 est

a) constant, pour tout a.

b) nul pour une certaine valeur de a.

Nous en déduisons que l'argument z_2 est

c) $\dfrac{\pi}{4} - a$, pour tout a.

d) $\dfrac{3\pi}{4} - a$, pour $\pi \leq a < 2\pi$.

Question n° 04 :

Nous posons, $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$, alors

a) Z n'existe pas pour certaines valeurs de a.

Dans le cas contraire, Arg Z vaut

b) $\dfrac{\text{Arg } z_1}{\text{Arg } z_2}$.

c) 2 Arg z_1.

d) $\text{Arg}(z_1 \bar{z}_2)$.

Question n° 05 :

Pour $0 \leq a \leq \pi$, nous avons

a) $|Z| = \sqrt{2} \cos a/2$.

b) $\text{Arg } Z = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{3\pi}{4}$.

Pour $\pi \leq a < 2\pi$, nous avons

c) $|Z| = \sqrt{2} \cos(-a/2)$.

d) $\text{Arg } Z = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

On considère le polynôme : $P(x) = (x+1)^7 - x^7 - 1$. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

Question n° 06 :

Nous avons

a) j est une racine cubique de l'unité.

b) $j^2 - j + 1 = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad j^{2n} = j$.

d) $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $j^{n/2} = 1$.

Question n° 07 :

Un étude des zéros de P et de P' (dérivée de P), montre que

a) j et donc $\bar{j}$ sont deux zéros de P.

b) j et donc $\bar{j}$ sont deux zéros de P'.

c) P admet 6 zéros distincts 2 à 2.

d) P admet un seul zéro double réel.

Question n° 08 :

Soient les polynômes Q et R tels que

$$P(x) = Q(x)\left(x^2 + x + 1\right) + R(x), \quad \text{avec} \quad \deg R \leq 1.$$

a) R n'existe pas.

Dans le cas contraire, alors son expression est

b) 0.

c) $x^2 + x + 1$.

d) $x + 1$.

NB : Le 0 du b) veut dire polynôme identiquement nul.

On considère les fonctions f et g de la variable réelle x, définies par

$$g(x) = x(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)^2$$
$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Question n° 09 :

La décomposition en éléments simples de f dans $\mathbb{R}$ est

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 + x + 1} + \frac{\epsilon x + \varphi}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}.$$

a) La décomposition précédente est impossible.

Dans le cas contraire

b) f étant impaire, alors α et β sont opposés.

c) $x^2 + x + 1$ n'admettant pas de racines réelles, alors δ et φ sont nuls.

d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$, alors $\gamma = \varphi$ et $\delta = \epsilon$.

Question n° 10 :

Les expressions $x\,f(x)$, $(x+1)\,f(x)$ et $\left(x^2 + x + 1\right)^2 f(x)$, permettent de déterminer certains coefficients. Nous avons

a) $\alpha + \beta = 0$.

b) $\beta + \gamma + \delta = -1$.

c) $\gamma = \epsilon = 0$.

d) $\varphi = 1$.

On considère, dans les questions suivantes, l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt, \quad \text{avec} \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n}, \quad n \geq 1.$$

Question n° 11 :

a) φ_n n'étant pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors I_n n'existe pas.

b) I_n est définie sur $\mathbb{R}$.

c) φ_n n'est pas continue au point 0, mais I_n existe sur $\mathbb{R}$.

d) I_n n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question n° 12 :

En écrivant $\varphi_{n+1}(t) = \varphi_n(t) - \dfrac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}$ et à l'aide d'une intégration par parties, nous obtenons la relation de récurrence, pour $n \geq 1$

a) $2n\, I_{n+1}(x) = (2n+1)\, I_n(x) + J_n(x)$.

b) $2n\, I_{n+1}(x) = (2n-1)\, I_n(x) - J_n(x)$.

c) $2n\, I_{n+1}(x) = (2n-1)\, I_n(x) + J_n(x)$.

d) $(2n-1)\, I_{n+1}(x) = 2n\, I_n(x) + J_n(x)$.

où $J_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^n}$.

Question n° 13 :

Nous avons

a) $I_1(x) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, x$.

b) $I_1(x) = (\text{Arctan}\, \sqrt{x})^2$.

et nous déduisons de la question 12

c) $I_2(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - \text{Arctan}\, x$.

d) $2\, I_2(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + \text{Arctan}\, x$.

Question n° 14 :

La décomposition canonique de $u(x) = x^2 + x + 1$ est

a) $u(x) = \dfrac{4}{3}\left[\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$.

b) $u(x) = \dfrac{4}{3}\left[\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$.

Ce résultat nous permet de déterminer une primitive F de f.

c) $F(x) = -\ln \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{3}{4} I_1\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{9}{16} I_2\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

d) $F(x) = \ln \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{3}{4} I_1\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{9}{16} I_2\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

Pour a réel (resp $a = +\infty$), on appelle voisinage V de a tout intervalle ouvert de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$, $\alpha > 0$ (resp $]A, +\infty[$, $A > 0$.) On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

f et g étant deux fonctions définies sur l'intervalle I, par définition

$$f \underset{a}{=} o(g) \iff \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } \forall x \in V \cap I \text{ on ait } |f(x)| \leq \epsilon\, |g(x)|$$

ϵ étant un réel strictement positif donné.

Question n° 15 :

Nous avons

a) $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

b) $f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$

c) $x^2 \underset{+\infty}{=} o\left(x^2+1\right).$

d) $o(f) + o(f) \underset{a}{=} o(f).$

Dans les questions suivantes, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = (\text{ch } x)^{1/x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Question n° 16 :

a) f n'admet pas de développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$.

Dans le cas contraire, nous pouvons écrire

$$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o\left(x^2\right)$$

b) $\alpha = 1$ car $f(0) = 1$.

c) $\gamma = 0$ car c'est un développement limité à l'ordre 2.

d) $\beta = 2\, f'(0)$, résultat déduit de la formule de Taylor.

Question n° 17 :

Etudions f pour $x \to +\infty$.

a) $\dfrac{1}{x} \ln(\text{ ch } x) \underset{+\infty}{=} o(1).$

b) $\dfrac{1}{x} \ln(\text{ ch } x) \underset{+\infty}{=} o(x).$

c) $\dfrac{1}{x} \ln(\text{ ch } x) \underset{+\infty}{=} 1 + o(-x).$

d) $\dfrac{1}{x} \ln(\text{ ch } x) \underset{+\infty}{=} 1 + o(1).$

Question n° 18 :

Nous déduisons de la question précédente que

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e.$

De manière analogue, pour $x \to -\infty$, nous obtenons

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e.$

Question n° 19 :

Etude de la dérivée f' de la fonction f. Nous pouvons écrire pour $x \neq 0$

$$f'(x) = h(x)\, \frac{f(x)}{x^2}.$$

a) $h(x) = \ln(\text{ch } x) + x \text{ sh } x.$

b) $h(x) = \ln(\text{ch } x) - x \text{ th } x.$

c) h est une fonction paire.

d) $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Question n° 20 :

Nous en déduisons les variations de f de courbe représentatice $\mathcal{C}$ dans le repère Oxy.

a) f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) f est concave sur $\mathbb{R}_+$.

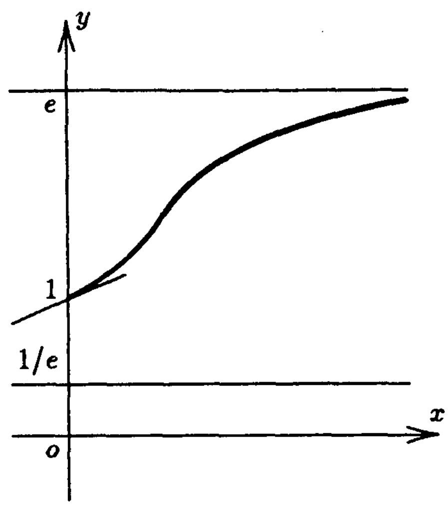
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \times f(-x) = 1$ donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à O.

d) $\mathcal{C}$ admet au moins un point d'inflexion.

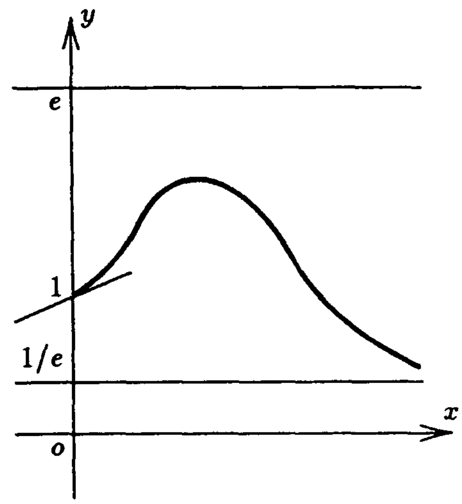
Question n° 21 :

$\mathcal{C}$ est représentée sur $[0, +\infty[$ par

a)

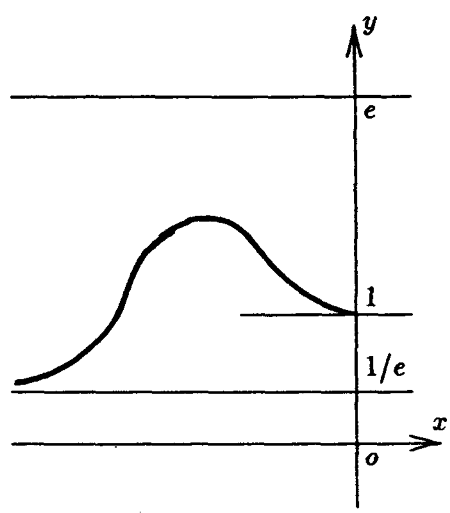


b)

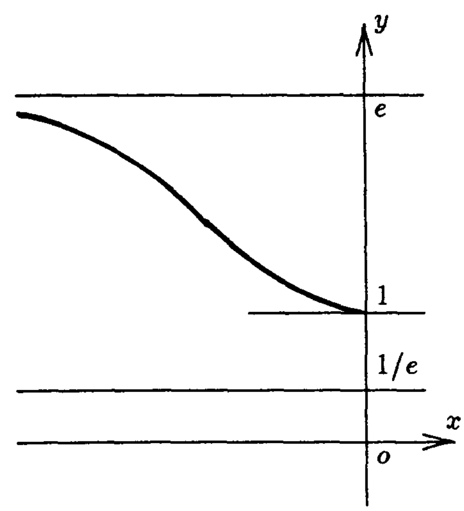


$\mathcal{C}$ est représentée sur $]-\infty, 0]$ par

c)



d)



On considère la fonction de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2}$$

de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormé Oxy.

Question n° 22 :

Etude de f.

a) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) f est π−périodique.

c) f est une fonction paire car c'est la composée de deux fonctions impaires.

d) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui même car c'est la composée de deux bijections.

Question n° 23 :

Etude de la dérivée f' de f.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

c) f est dérivable sur au moins un intervalle de $\mathbb{R}$.

d) $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ sur au moins un intervalle de $\mathbb{R}$.

Question n° 24 :

Il résulte de la question précédente que

a) $f(x) = 2 \text{ Arctan } x$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2 \text{ Arctan } x + \pi$ si $x < -1$.

c) $\mathcal{C}$ admet en $x = 1$ deux demi-tangentes perpendiculaires.

d) $\mathcal{C}$ est convexe si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ et concave si $x > \dfrac{\pi}{2}$.

Question n° 25 :

Soient $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

a) Le théorème des accroissements finis permet d'encadrer la valeur de $f(b)$.

b) L'assertion a) est fausse.

Dans le cas où l'assertion a) est vraie, alors

c) $f(b) < \dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{12}$.

d) $f(b) > \dfrac{2\pi + \sqrt{3}}{12}$.

Dans les deux questions suivantes, on considère l'équation

$$(1+x^2)\sin x = 2x \qquad (E)$$

Question n° 26 :

Nous avons pour les solutions de l'équation (E).

a) Toute solution est dans $[-1, 1]$.

b) Il existe une et une seule solution sur $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, n entier.

(E) n'admet qu'une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ car

c) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui même.

d) la fonction $x \to x - f(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question n° 27 :

Soit α une solution de (E) sur l'intervalle $[2n\pi, (2n + \frac{1}{2})\pi]$, $n \geq 1$ fixé.

a) (E) n'admet aucune solution, donc α n'existe pas.

Dans le cas contraire

b) $\alpha = f(\alpha)$.

c) $\alpha = f(\alpha) + 2n\pi$.

d) $\alpha = -f(\alpha) + 2n\pi$.

λ étant un paramètre réel, on considère l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+\lambda x)}}.$$

Question n° 28 :

Dans cette question $\lambda = 0$. alors nous avons

a) $I(0)$ n'existe pas.

Dans le cas où $I(0)$ existe, alors sa valeur est

b) 2. c) -1. d) Arcsin 1.

Dans **toutes** les questions suivantes, on suppose que $\lambda \neq 0$ et l'on considère la fonction $\varphi_\lambda(x) = (1-x)(1+\lambda x)$, de courbe représentive C_λ dans le repère Oxy.

Question n° 29 :

a) C_λ passe par deux points fixes A et B, c'est-à-dire indépendant de la valeur de λ.

b) C_λ admet un extremum, pour tout λ.

c) Il existe une et une seule valeur de λ telle que pour cette valeur C_λ soit la droite (AB).

d) Pour tout λ, C_λ coupe l'axe Ox en deux points distincts.

Question n° 30 :

Il résulte de la question précédente que $I(\lambda)$ existe pour λ de l'intervalle

a) $]-\infty, 1]$. b) $]0, +\infty[$. c) $]-\infty, 0[$. d) $[-1, 0[$.

Dans toutes les questions suivantes, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

Question n° 31 :

Dans cette question, on suppose que $\lambda \in \mathcal{D} \cap]0, +\infty[$. Il est alors possible d'écrire $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda}\left[1 - (\alpha x + \beta)^2\right]$$

où α et β sont des expressions de λ.

a) α et β sont positifs. b) $|\beta| \leq 1$, pour tout λ.

Si l'on effectue le changement de variable $u = \alpha x + \beta$ dans $I(\lambda)$, nous obtenons

c) $I(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin } \beta\right]$. d) $I(\lambda) = \dfrac{-1}{\sqrt{\lambda}}$ Arccos β.

Question n° 32 :

Dans cette question, on suppose que $\lambda \in \mathcal{D} \cap]-\infty, 0[$. Il est alors possible d'écrire $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = -\frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda}\left[(\gamma x + \delta)^2 - 1\right]$$

où γ et δ sont des expressions de λ.

a) $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. (cf question 31). b) $\alpha = -\gamma$ et $\beta = -\delta$.

Après un changement de variable convenable, nous obtenons alors

c) $I(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} \ln \dfrac{1-\lambda+2\sqrt{-\lambda}}{1+\lambda}$.

d) $I(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{argsh} \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

Dans l'espace vectoriel des fonctions numériques $\mathcal{F}$, on considère la famille $(\mathcal{B})$ de fonctions

$$\begin{cases} f_0 : x \longrightarrow |x| \\ f_1 : x \longrightarrow |x-1| \\ f_{-1} : x \longrightarrow |x+1| \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par cette famille $\mathcal{B}$.

Question n° 33 :

La famille $\mathcal{B}$ est

a) génératrice mais non libre.

b) libre et génératrice.

La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est

c) inférieure ou égale à 2.

d) supérieure ou égale à 3.

Question n° 34 :

On considère le sous espace $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ formé des fonctions affines, soit

$$\mathcal{A} = \{f : x \longrightarrow \alpha x + \beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$f = a\, f_0 + b\, f_1 + c\, f_{-1}.$$

a) Pour (α, β) fixés, non simultanément nuls, il existe un unique triplet (a, b, c) tel que

b) Le triplet précédent n'est pas unique.

c) $\mathcal{A}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension 2.

d) Le sous espace vectoriel $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$ est une droite vectorielle.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Soient les familles de polynômes

$$P_k = X^k, \quad Q_k = X^k(1-X)^{n-k} \quad \text{et} \quad R_k = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$$

où $k = 0, 1, \cdots n$.

Question n° 35 :

Etude de quelques familles de $\mathcal{E}$ ayant $n+1$ éléments.

a) La famille $(P_0,\ P_1,\ \cdots, P_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.

b) La famille $(Q_0,\ Q_1,\ \cdots, Q_n)$ n'est une base de $\mathcal{E}$.

c) Si S est un polynôme quelconque de $\mathcal{E}$, alors la famille $(S^{(0)},\ S^{(1)}, \cdots, S^{(n)})$ est une base de $\mathcal{E}$ ($S^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de S).

d) La famille $(R_0,\ R_1,\ \cdots, R_n)$ est une base de $\mathcal{E}$ si et seulement si n est impair.

Dans **toutes** les questions suivantes, on suppose $n = 3$ et on considère l'application φ de $\mathcal{E}$ dans lui même définie par

$$\varphi(P_k) = R_k \quad \text{pour} \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$$

et la matrice carrée définie par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question n° 36 :

a) φ n'est pas une application linéaire.

Dans le cas contraire, le rang de cette application linéaire est

b) 3 car la famille $(R_0,\, R_1,\, R_2,\, R_3)$ est liée.

c) 4 car la famille $(R_0,\, R_1,\, R_2,\, R_3)$ est libre.

d) 4 car la famille $(P_0,\, P_1,\, P_2,\, P_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

Question n° 37 :

Etude de la matrice M.

a) M est la matrice de φ dans une base convenable de $\mathcal{E}$.

b) Il n'existe aucune base de $\mathcal{E}$ dans laquelle φ puisse s'exprimer avec la matrice M.

c) Toutes les matrices carrées d'ordre 4 étant diagonalisables (il n'en est pas de même pour les matrices carrées d'ordre 3), alors M est diagonalisable.

d) Toutes les matrices carrées d'ordre n inversibles sont de rang n.
La matrice M est inversible donc est de rang 4.

Question n° 38 :

Etude des valeurs propres de la matrice M.

a) $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M^2 = \lambda\, I$ (I désigne la matrice unité d'ordre 4).

b) M admet 4 valeurs propres réelles, distinctes deux à deux.

c) M est inversible et $M^{-1} = 4\, M$.

d) M admet 2 valeurs propres réelles doubles.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, nous considérons les sous espaces vectoriels A et B d'équations

$$A : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad B : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

où les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ s'écrivent sous la forme $(x,\, y,\, z,\, t)$.

Question n° 39 :

Etude de A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.

a) A et B sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.

b) $A \cup B$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4, donc confondu avec $\mathbb{R}^4$.

c) $A \cap B$ est un plan vectoriel de R^4.

d) $A \cap B$ est réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}^4$.

Question n° 40 :

On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} \vec{a} = (0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \vec{b} = (1,\ -1,\ -2,\ 0) \\ \vec{c} = (1,\ 1,\ 2,\ 1) \\ \vec{d} = (-2,\ 0,\ 0,\ -1) \end{cases}$$

On note V le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $A \cup B$.

a) La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est une base de V.

b) La famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ n'est pas une base de V.

Une équation de V est

c) $y + 2z = 0$.

d) x=0.