CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2014

PARTIE I (intégrales de Wallis et formule de Stirling)

1. La fonction $x \mapsto (\sin x)^n$ étant continue positive et non identiquemlent nulle, son intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est strictement positive.

Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin x < 1$ donc $(\sin x)^{n+1} < (\sin x)^n$ d'où $\mathrm{I}_{n+1} < \mathrm{I}_n$.

Q1 : Réponses A,B

---

2. On fait une intégration par parties, pour $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin x}_{u'} . \underbrace{(\sin x)^{n-1})}_{v} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-\cos x . \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$

donc $\mathrm{I}_n = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$ ce qui donne $\mathrm{I}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$.

Q2 : Réponse B

---

3. On en déduit

$$\mathrm{I}_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\mathrm{I}_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{I}_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)!}{[(2n)(2n-2)\ldots 2]^2}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et de même

$$\mathrm{I}_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}\mathrm{I}_1 = \frac{[(2n)(2n-2)\ldots 3]^2}{(2n+1)!}\mathrm{I}_1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q3 : Réponses C,D

---

4. La suite (I_n) étant décroissante à termes strictement positifs, l'inégalité $\mathrm{I}_{2n+1} \leqslant \mathrm{I}_{2n} \leqslant \mathrm{I}_{2n-1}$ implique $\dfrac{\mathrm{I}_{2n+1}}{\mathrm{I}_{2n-1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-1}} \leqslant 1$, et puisque $\mathrm{I}_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\mathrm{I}_{2n-1}$ on obtient finalement, pour $n \geqslant 1$

$$\frac{2n}{2n+1} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-1}} \leqslant 1\,.$$

C'est la réponse C. Mais (piège ?) puisque $2n \geqslant n-1$, l'inégalité de la réponse A, bien que moins précise, est également vraie !

Q4 : Réponses A,C

---

5. L'encadrement ci-dessus implique $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-1}} = 1$. Donc :

Q5 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

6. D'après les calculs faits à la question 3, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-1}} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{2n(2^{n-1}(n-1)!)^2} = \frac{n(2n)!^2}{2^{4n}n!^4}\pi = \pi u_n^2$$

donc d'après la question 5 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi u_n^2 = 1$ et puisque $u_n > 0$, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Q6 : Réponse B

---

7. $F_n = n!\left(\dfrac{n}{e}\right)^{-n} n^{-1/2}$ et $F_{n+1} = (n+1)!\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{-(n+1)} (n+1)^{-1/2}$ donc

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = (n+1)e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1/2} = e\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-1/2}$$

puis $\ln F_{n+1} - \ln F_n = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Q7 : Réponse C

---

8. Puis un développement limité :

$$\begin{aligned} V_n &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1+\frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) - \left(\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{6n^3}\right) + \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Q8 : Réponse D

---

9. La série de terme général V_n est donc somme de la série de terme général $-\dfrac{1}{12n^2}$, qui est convergente, et d'une série dont le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{12n^3}$, donc qui est elle aussi convergente. Elle est donc convergente.

Par télescopage : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} V_p = \sum_{p=1}^{n} \ln(F_{p+1}) - \ln(F_p) = \ln(F_{n+1}) - \ln F_1$.

Q9 : Réponses A,C

---

10. $F_{2n} = (2n)!\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{-2n}(2n)^{-1/2}$ et $F_n^2 = n!^2\left(\dfrac{n}{e}\right)^{-2n} n^{-1}$ donc $\dfrac{F_{2n}}{F_n^2} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}2^{-2n}2^{-1/2}n^{1/2} = \dfrac{u_n}{\sqrt{2}}$.

Q10 : Réponse C

---

11. On a vu que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ donc la question précédente implique $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n}}{F_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Or, puisque la série de terme général V_n converge, la suite de terme général $\ln F_n$ converge (question 9), donc la suite (F_n) converge vers un réel $\ell > 0$ (par composition avec la fonction $\exp$). On a donc aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{2n}}{F_n^2} = \frac{\ell}{\ell^2} = \frac{1}{\ell}$ ce qui donne finalement $\ell = \sqrt{2\pi}$.

On retrouve ici la formule de Stirling : $\displaystyle n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

Q11 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

12. Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ donne immédiatement $I_n = J_n$. Et puisque $\cos x \leqslant 1$ on a $J_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Q12 : Réponses B,D

---

13. Le changement de variable $x=\sin t$ donne $\mathrm{K}_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,\mathrm{d}t=2\mathrm{J}_{2n+1}=2\mathrm{I}_{2n+1}$ puis d'après la question 3 : $\mathrm{K}_n=2\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q13 : Réponses B,C

---

14. Les réponses A, C et D sont fausses (sans calcul) puisque L_n n'est pas de signe constant. La réponse B est triviale.

Q14 : Réponse B

PARTIE II (intégrales elliptiques du 1er ordre)

15. Puisque a et b ne sont pas nuls, $t\mapsto(t^2+a^2)(t^2+b^2)$ reste >0 sur $\mathbb{R}$ donc :

Q15 : Réponse C

---

16. Réponse immédiate.

Q16 : Réponse B

---

17. En utilisant l'équivalent précédent, et d'après les théorèmes de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions positives, les intégrales $\mathrm{I}(a,b)$ et $\mathrm{J}(a,b)$ sont convergentes, et, par parité, $\mathrm{J}(a,b)=2\mathrm{I}(a,b)$.

Q17 : Réponse B

---

18. Le changement de variable $t=a\tan\theta$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ (car $a>0$) conduit à

$$\mathrm{I}(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)(b^2+a^2\tan^2\theta)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

ou encore, en changeant θ en $\frac{\pi}{2}-\theta$: $\mathrm{I}(a,b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$.

Q18 : Réponse B

---

19. A. Pour $x>0$, $g(x)=\mathrm{I}(1,x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}$. La fonction $h:(x,\theta)\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ d'après les théorèmes usuels ; de plus, pour tout x dans un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha>0$ on a $|h(x,\theta)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\alpha^2\sin^2\theta}}=\varphi(\theta)$, avec φ continue donc intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; c'est l'hypothèse de domination, et il résulte du théorème de continuité des intégrales à paramètre que la fonction g est continue sur $[\alpha,+\infty[$ pour tout $\alpha>0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

B. $g(1)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}$.

C. D. – *1ère solution :* Si l'on utilise la définition initiale de I, on a

$$g(x)=\mathrm{I}(1,x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}\geqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}$$

d'où

$$g(x)\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\Big[\ln(t+\sqrt{t^2+x^2})\Big]_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{\sqrt2}\Big[\ln(1+\sqrt{1^2+x^2})-\ln x\Big].$$

On en déduit immédiatement : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$.

– *2ème solution :* Pour $x>y>0$ on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta}}$ soit $g(x)\leqslant g(y)$: g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Si elle était majorée par un réel M on aurait

$$\forall x>0\ ,\ \forall\alpha\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big[\ ,\ \int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}\leqslant\mathrm{M}.$$

Or le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre permet de dire que, si $\alpha<\frac{\pi}{2}$, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, puisque l'on a ici, pour tout $x\geqslant0$, l'hypothèse de domination $\left|\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\cos\theta}$, et $\theta\mapsto\dfrac{1}{\cos\theta}$ est continue donc intégrable sur $[0,\alpha]$.

On a donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}=\ln\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, et on aboutirait à

$$\forall\alpha\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big[\ ,\ \ln\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\mathrm{M}$$

ce qui conduit à une absurdité lorsque l'on fait tendre α vers $\frac{\pi}{2}$.

En conclusion, g est décroissante et non majorée sur $\mathbb{R}_+^*$; d'après le théorème de la limite monotone, on a $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$.

Conclusion :

Q19 : Réponses A,D

---

20. On note encore $h(x,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}}=\left(\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta\right)^{-1/2}$ pour $x>0$ et $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\theta)=-x\sin^2\theta\left(\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta\right)^{-3/2}$; $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout x dans un segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ on a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\theta)\right|\leqslant\dfrac{\beta\sin^2\theta}{\left(\cos^2\theta+\alpha^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$ qui est une fonction continue de θ donc intégrable sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$: c'est l'hypothèse de domination, et le théorème de régularité d'une intégrale à paramètre permet d'affirmer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x>0\ ,\ g'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-x\sin^2\theta}{\left(\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

Les réponses C et D sont donc fausses.

Q20 : Réponse B

---

21. $\mathrm{I}(a,b)=\mathrm{I}(b,a)$ a déjà été démontré à la question 18 (changement de variable $\theta\to\frac{\pi}{2}-\theta$).

$\mathrm{I}(\lambda a,\lambda b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\lambda^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=}}=\frac{1}{\lambda}\mathrm{I}(a,b)$ puisque $\lambda>0$.

Les réponses B et D sont donc exactes, les 2 autres sont fantaisistes.

Q21 : Réponses B,D

---

22. Un calcul rapide donne, pour $a, b > 0$: $\mathrm{I}(a,b) = \dfrac{1}{a} g\left(\dfrac{b}{a}\right)$ donc :

Q22 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

23. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

On a $\mathrm{I}(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$.

On a $\mathrm{J}\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)(s^2+ab)}}$.

En posant $s = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{ab}{t}\right)$, on aura

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2+ab}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$s^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{a^2b^2}{t^2} - 2ab\right) + \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{t^4 + a^2b^2 + (a^2+b^2)t^2}{4t^2} = \frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{4t^2}$$

$$s^2 + ab = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{a^2b^2}{t^2} - 2ab\right) + ab = \frac{1}{4}\left(t^2 + \frac{a^2b^2}{t^2} + 2ab\right) = \frac{(t^2+ab)^2}{4t^2} \text{ d'où } \sqrt{s^2+ab} = \frac{t^2+ab}{2t}$$

et finalement

$$\mathrm{J}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\left(s^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)(s^2+ab)}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+ab}{2t^2} \cdot \frac{2t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \cdot \frac{2t}{t^2+ab}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{I}(a,b).$$

Q23 : Réponse B

---

24. Il est facile de vérifier par récurrence que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n (ce qui permet aussi de justifier la définition de ces suites).

On peut donc appliquer le résultat du calcul précédent :

$$\mathrm{I}(a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{J}((a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{J}\left(\frac{a_n+b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = \mathrm{I}(a_n, b_n)$$

ce qui démontre que la suite $n \mapsto \mathrm{I}(a_n, b_n)$ est constante. On aura donc, pour tout entier n, $\mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(a_0, b_0) = \mathrm{I}(a,b)$.

Q24 : Réponse C

---

25. Calcul déjà fait à la question 22 !

Q25 : Réponse A

Cette partie est inachevée !! La relation $\mathrm{I}(a,b) = \dfrac{1}{a} g\left(\dfrac{b}{a}\right)$ permet en fait de montrer la continuité de l'application $(a,b) \mapsto \mathrm{I}(a,b)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, puisque l'on a vu que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On démontre alors classiquement que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc convergent vers le même réel $\ell > 0$, noté habituellement $\mathrm{M}(a,b)$ et appelé *moyenne arithmético-géométrique de a et b*.
Finalement, la relation $\mathrm{I}(a_n,b_n) = \mathrm{I}(a,b)$ donne, par passage à la limite, $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(\ell,\ell) = \dfrac{\pi}{2\ell}$.
On a donc la formule

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}(a,b)}$$

qui permet de calculer rapidement les intégrales elliptiques (la convergence des deux suites (a_n) et $(b_{n},)$ étant très rapide).

PARTIE III

26. Question de cours.

Q26 : Réponses B,C

---

27. Cours : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. Les réponses C et D sont farfelues.

Q27 : Réponse B

---

28. Là encore, c'est du cours : si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ donc X^p est un polynôme annulateur de u ; les valeurs propres de u étant incluses dans les racines d'un polynôme annulateur, la seule valeur propre possible de u est 0, et, réciproquement, 0 est bien valeur propre de u puisque u n'est pas injectif. On a donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$, d'où la réponse D (et C est fausse puisque $\prod \lambda_i = 0$).

Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, tous les endomorphismes de E sont trigonalisables, d'où la réponse B.

Q28 : Réponses B,D

---

29. Si $\mathrm{Sp}(u) = 0$, puisque u est trigonalisable, il existe une base où la matrice T de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale. Le polynôme caractéristique de u est donc $\chi_u = \det(\mathrm{T} - \mathrm{X}\mathrm{I}_n) = (-1)^n \mathrm{X}^n$, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $u^n = 0$. C'est la réponse A.

La matrice de u^k dans la base précédentes est T^k, donc ne comporte que des zéros sur la diagonale et par suite sa trace est nulle ; c'est la réponse B.
Les deux autres réponses sont évidemment fausses.

Q29 : Réponses A,B

---

30. C'est du cours... (ou refaire le calcul rapidement !).

Q30 : Réponse B

---

31. Toujours d'après le cours, on sait que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A d'ordre 3 s'écrit :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}\,\mathrm{A})\lambda^2 + a\lambda + \det \mathrm{A} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}.$$

Si λ_i pour $i \in [\![1,3]\!]$ sont les valeurs propres complexes de A, donc les racines de χ_{A}, les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé donnent : $a = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$. Or

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big(\big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\big) - \big(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big((\mathrm{tr}\,\mathrm{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)\Big)$$

donc finalement

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr} A)\lambda^2 - \frac{1}{2}\Big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big)\lambda + \det A$$

et aucune des réponses proposées n'est exacte.

Q31 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

32. Soit on calcule, soit on utilise la formule précédente si on l'a trouvée...

Q32 : Réponse B

---

33. χ_A étant un polynôme annulateur de A, on déduit du calcul précédent

$$A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$$

d'où $I_3 = A(-A^2 - 3A - 3I_3)$, ce qui montre que $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$.

Q33 : Réponse A

---

34. En multipliant la relation $A^3 = -3A^2 - 3A - I_3 = 0$ par A on obtient

$$A^4 = -3A^3 - 3A^2 - A = -3(-3A^2 - 3A - I_3) - 3A^2 - A = 6A^2 + 8A + 3I_3.$$

Q34 : Réponse B

---

35. Si $u = uv - vu$ alors $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(uv) - \operatorname{tr}(vu) = 0$.
On a aussi $u^2 = u^2v - uvu = u^2v - (u + vu)u = u^2v - u^2 - vu^2$ d'où $2u^2 = u^2v - vu^2$ (voir aussi question 39). On en déduit $\operatorname{tr}(u^2) = 0$.
Si λ_1 et λ_2 sont les 2 valeurs propres complexes de u, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$ d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On en déduit que u est nilpotent et, en particulier, n'est pas inversible.
Les réponses A,B, C sont donc automatiquement fausses.

Q35 : Réponse D

---

36. u étant un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension 2, on a $u^2 = 0$. C'est la réponse C et les 3 autres sont automatiquement fausses.

Q36 : Réponse C

---

37. u étant supposé non nul, il existe bien un vecteur e tel que $u(e) \neq 0$.
D'après ce que l'on vient de voir, $u^2(e) = 0$: c'est la réponse A, et la réponse B est fausse.

Si α et β sont des scalaires tels que $\alpha u(e) + \beta e = 0$ alors en appliquant u on obtient $\alpha u^2(e) + \beta u(e) = 0$ d'où $\beta u(e) = 0$ puis $\beta = 0$ et enfin $\alpha = 0$. Cela prouve que le système $\{u(e), e\}$ est libre.

Q37 : Réponses A,C

---

38. La base $\mathscr{B}$ de l'énoncé est évidemment la base $\{u(e), e\}$ précédente.

La réponse A est immédiate.

$uv - vu = u$ implique $uv(e_1) - vu(e_1) = u(e_1)$ et puisque $u(e_1) = 0$ on obtient $u[v(e_1)] = 0$. Il en résulte que $v(e_1)$ appartient au noyau de u donc est colinéaire à e_1 : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_1) = \lambda e_1$.
On a ensuite $uv(e_2) - vu(e_2) = u(e_2)$ donc $u[v(e_2)] = v(e_1) + e_1 = (\lambda + 1)e_1$. Si l'on pose $v(e_2) = ae_1 + be_2$, on aura $u[v(e_2)] = au(e_1) + bu(e_2) = be_1$ d'où $\lambda + 1 = b$ ce qui donne $v(e_1) = (b - 1)e_1$.
On obtient donc pour v la matrice de la réponse D.

Remarque : l'énoncé ne le demandait pas, mais il est facile de vérifier, par un calcul matriciel, que, réciproquement, si v est de cette forme, on a bien $uv - vu = u$.

$\boxed{\textbf{Q38 : Réponses A,D}}$

---

39. $S_k = ku^k$ est classique et se démontre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ (je ne le refais pas ici). Toutes les autres réponses sont fantaisistes.

$\boxed{\textbf{Q39 : Réponse D}}$

---

40. D'après le résultat précédent : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(u^k) = \dfrac{1}{k}\Big(\operatorname{tr}(u^k v) - \operatorname{tr}(v u^k)\Big) = 0$.

Là encore, c'est un exercice archi-classique que d'en déduire que la seule valeur propre possible de u est 0, donc u est nilpotent.

$\boxed{\textbf{Q40 : Réponses A,C}}$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆