

CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2007

PARTIE I

1. D'après l'énoncé, 0 est racine simple de P , donc $P = XQ$ avec 0 non racine de Q , c'est-à-dire $Q(0) \neq 0$. Et il n'y a pas de condition supplémentaire sur $Q'(0)$.

Q1 : Réponse C

2. Puisque $Q(0) \neq 0$, le polynôme Q n'est pas divisible par X , donc les seuls polynômes qui divisent à la fois X et Q sont les polynômes constants.

Donc X et Q sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur pgcd est égal à 1.

De même, les seuls polynômes qui divisent à la fois X^2 et Q sont les polynômes constants, donc X^2 et Q sont premiers entre eux. Ils vérifient donc forcément l'identité de Bezout ! Même si la formulation de la question D. est maladroite (à cause du « puisque »), la phrase est exacte.

Remarque : la notion de pgcd ne figure que dans le programme MP, pas dans le programme PSI ni PC. Mais les épreuves de l'ICNA sont communes aux trois filières...

Q2 : Réponses A,D

3. *Remarque :* le théorème de décomposition des noyaux ne figure que dans le programme MP...

Les polynômes X et Q étant premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux s'écrit :

$$\text{Ker}(f \circ Q(f)) = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$$

Puisque P est annulateur de f par hypothèse, on a $P(f) = f \circ Q(f) = 0$ (ce qui est la réponse D., l'écriture $fQ(f)$ pour désigner $f \circ Q(f)$ étant licite); donc $\text{Ker}(f \circ Q(f)) = E$, et $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$.

Cela donne donc les réponses B. et D. Je pense que c'est ce qu'attendait le correcteur, malheureusement, la réponse à la question A est elle aussi exacte !! En effet :

Dans la question 2., on a vu que X^2 et Q sont aussi premiers entre eux. Donc, d'après le th. de décomposition des noyaux : $\text{Ker}(f^2 \circ Q(f)) = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker } Q(f)$. Mais, puisque $f \circ Q(f) = 0$, on a aussi $f^2 \circ Q(f) = 0$ donc $E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker } Q(f)$. C'est la réponse A.

Finalement :

Q3 : Réponses A,B,D (3 réponses exactes)

4. Puisque $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$, on a $\dim \text{Ker } Q(f) + \dim \text{Ker } f = n$, donc d'après le théorème du rang, $n - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f = n - \dim \text{Ker } Q(f) = \dim \text{Im } Q(f)$. Cela donne les réponses B. et D.; là encore, je pense que c'est ce qu'attendait le correcteur. Malheureusement, les réponses aux deux autres questions sont aussi exactes !! En effet :

On a vu dans la question précédente que $E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Ker } Q(f)$; donc $n = \dim \text{Ker } f^2 + \dim \text{Ker } Q(f)$ soit $\dim \text{Ker } Q(f) = n - \dim \text{Ker } f^2 = \dim \text{Im } f^2$ d'après le théorème du rang. Ce sont les réponses A. et C.

Conclusion :

Q4 : Réponses A,B,C,D (4 réponses exactes)

5. A. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f$ pour tout endomorphisme f de E , mais on n'a pas forcément $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$!! (contre-exemples donnés en cours; un exercice classique consiste d'ailleurs à démontrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \dots$).

B. On a déjà vu que $Q(f) \circ f = 0$ donc, pour tout $x \in E$, $Q(f)[f(x)] = 0$ donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$.

- C. est exacte. En effet, on sait que $f \circ Q(f) = Q(f) \circ f = 0$ donc, en composant par f à droite et à gauche, on obtient $f^2 \circ Q(f) = Q(f) \circ f^2 = 0$. Même si l'affirmation $f^2 \circ Q(f) = P(f)$ semble fausse (on a $P = XQ$ et non $P = X^2Q$), elle est vraie ici puisque tous ces endomorphismes sont nuls ! L'égalité $Q(f) \circ f^2 = 0$ implique alors $\text{Im } f^2 \subset \text{Ker } Q(f)$.
- D. On a vu à la question B. : $\text{Im } f \subset \text{Ker } Q(f)$ et, dans la question 4, $\dim \text{Im } Q(f) = \dim \text{Ker } f$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \text{Ker } Q(f) = \dim \text{Im } f$. Les deux sous-espaces vectoriels $\text{Im } f$ et $\text{Ker } Q(f)$ étant inclus l'un dans l'autre, et de même dimensions, sont égaux.
- Enfin, on a vu à la question 3 : $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } Q(f)$. On a donc $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Q5 : Réponses B,C,D (3 réponses exactes)

6. A. est vraie pour la même raison que dans la question 5.B, le fait que E est de dimension finie n'ayant pas servi.
- B. Même chose que dans la question 5., la dimension n'intervenant pas ici.
- C. Tout polynôme Q s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{\deg Q} a_k X^k = a_0 + X \sum_{k=1}^{\deg Q} a_k X^{k-1}$, ou encore sous la forme $Q = a + XQ_1$, avec $a = Q(0)$.
- D. L'égalité $Q = XQ_2$ est impossible, puisque $Q(0) \neq 0$.
- Enfinement :

Q6 : Réponses A,B,C (3 réponses exactes)

7. A. La relation $Q = a + XQ_1$ implique $Q(f) = a\text{Id}_E + f \circ Q_1(f)$, donc, pour tout $x \in E$: $Q(f)(x) = ax + f \circ Q_1(f)(x)$. Si x appartient à $\text{Ker } Q(f)$, puisque $a = Q(0)$ est non nul, on en tire $0 = ax + f \circ Q_1(f)(x)$ soit $x = \frac{-1}{a} f[Q_1(f)(x)] = f\left(\frac{-1}{a} Q_1(f)(x)\right)$ (f étant linéaire). C'est la réponse proposée ici.
- B. Faux ! l'écriture $Q_1(f)(x)$ n'a aucun sens puisque Q_1 est un polynôme et $f(x)$ un vecteur...(dans la ligne du dessus, c'est $Q_1(f)(x)$...attention à la place des parenthèses!!)
- C. Faux ! L'écriture $f(x)Q_1(f)(x)$ n'a aucun sens : produit de deux vecteurs ?
- D. La relation démontrée en A. prouve que, si $x \in \text{Ker } Q(f)$, alors $x \in \text{Im } f$, c'est-à-dire l'inclusion $\text{Ker } Q(f) \subset \text{Im } f$. L'inclusion réciproque a été vue dans la question 6, on en déduit donc $\text{Ker } Q(f) = \text{Im } f$ puis $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ d'après la relation établie dans la question 3.
- Enfinement :

Q7 : Réponses A,D

8. Tout ce que permet de dire le cours dans le cas général, c'est que, si P est un polynôme annulateur de f , le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de P .

On notera aussi l'absurdité de la phrase de la question D : en effet, par définition, si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on appelle valeur propre de f tout élément λ de $\mathbb{K}$ tel que etc... Cela n'a donc aucun sens de parler du spectre dans $\mathbb{C}$ d'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel!! (par contre, à l'aide du polynôme caractéristique, on peut effectivement parler du spectre dans $\mathbb{C}$ d'une matrice à coefficients réels.)

En conséquence, je ne sais pas quoi répondre à cette question : il est vrai que le spectre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est, par définition, formé de réels, mais parler du « spectre dans $\mathbb{C}$ » sans considérer les matrices ne veut rien dire. Et dans ce cas, il n'y a aucune raison que les valeurs propres d'une matrice à coefficients réels soient réelles!!

Bref :

Q8 : Réponse B

ou

Q8 : Réponses B,D

9. La trace de f est la somme de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (lorsque l'on considère la matrice de f , puisque le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{C}[X]$), chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité. Ici, les valeurs propres possibles (même dans $\mathbb{C}$) sont 0 et 1. La trace de f sera donc un entier positif ou nul, égale au nombre de fois où figure la valeur propre 1, c'est-à-dire à l'ordre de multiplicité de 1.

Enfin, cette trace est nulle si et seulement si 1 n'est pas valeur propre, ce qui équivaut à $f - \text{Id}_E$ bijectif. La justification donnée à la question D. est donc exacte.

Q9 : Réponses C,D

PARTIE II

10. C'est directement du cours.

Q10 : Réponses A,C

11. La matrice A est de rang 2, puisqu'elle possède 12 colonnes identiques, et que la treizième est linéairement indépendante des autres. D'après le théorème du rang, le noyau de f est donc de dimension 11. 0 est donc valeur propre de f . D'après le cours, l'ordre de multiplicité de 0 est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé, i.e à celle de $\text{Ker } f$.
(en fait, il y a même égalité ici, puisqu'on a vu à la question 1. que f est diagonalisable).

Q11 : Réponse E (pas de bonne réponse)

12. A. $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f , on peut donc parfaitement définir l'endomorphisme *induit* par f sur $\text{Im } f$ (ce n'est pas une simple restriction!).
- B. g est bien un *endomorphisme* de $\text{Im } f$ puisque $\text{Im } f$ est stable par f , et $\text{Im } f = \text{Vect}(e_7, u)$, puisque l'image d'un endomorphisme est le sous-espace vectoriel engendré par les images des vecteurs de base; ici $e_7 = f(e_i)$ pour $i \neq 7$ et $u = f(e_7)$.
- C. D. Pour répondre à cette question, il suffit d'exprimer les images $f(e_7)$ et $f(u)$ des vecteurs de la base (e_7, u) de $\text{Im } f$ en fonction de ceux-ci. Or $f(e_7) = u$ et $f(u) = \sum_{i \neq 7} f(e_i) + f(e_7) = 12e_7 + u$. C'est donc la deuxième matrice qui convient.

Q12 : Réponses B,D

13. En calculant le polynôme caractéristique de la matrice précédente, on trouve $\chi_g = X^2 - X - 12$. On sait que χ_g divise χ_f (th. du cours), et que 0 est une valeur propre d'ordre (a priori) ≥ 11 , donc $\chi_f = -X^{11} \chi_g$.

Q13 : Réponse A

14. A. B. Le spectre de A est donc l'ensemble des racines du polynôme $-X^{11}(X^2 - X - 12)$, c'est l'ensemble $\{-3, 0, 4\}$.
- C. D. A est diagonalisable; si U désigne la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres (rangés dans un ordre convenable), on a $A = UDU^{-1}$ (ou $D = U^{-1}AU$) avec $D = \text{diag}(4, -3, 0, 0, \dots, 0)$. Aucune des réponses C. et D. n'est donc exacte.

Q14 : Réponse B

15. A. B. On a : $D = \text{diag}(4, -3, 0, 0, \dots, 0) = 4P_1 - 3P_2$, et $D^n = \text{diag}(4^n, (-3)^n, 0, 0, \dots, 0) = 4^n P_1 + (-3)^n P_2$.
 $A = UDU^{-1}$ implique $A^n = UD^nU^{-1}$, d'où $A^n = U(4^n P_1 + (-3)^n P_2)U^{-1} = 4^n A_1 + (-3)^n A_2$.
Réponse A.

C. D. A étant diagonalisable, son polynôme minimal Π_A est scindé à racines simples, et ses racines sont les valeurs propres de A . Donc $\Pi_A = X(X+3)(X-4)$. On sait de plus qu'il s'agit d'un polynôme annulateur de A .

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit : $X^n = X(X+3)(X-4)Q(X) + aX^2 + bX + c$. En faisant successivement $X = 0$, $X = -3$ et $X = 4$, on obtient le système (puisque $n \geq 1$) :

$$\begin{cases} 0 = c \\ (-3)^n = 9a - 3b \\ 4^n = 16a + 4b \end{cases}$$

qui conduit à

$$c = 0 \quad b = \frac{4 \cdot (-3)^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}}{7} \quad a = \frac{4^{n-1} - (-3)^{n-1}}{7}$$

On a alors $A^n = \Pi_A(A)Q(A) + aA^2 + bA + cI_3 = aA^2 + bA + cI_3$, ce qui donne la formule de la question C.

Q15 : Réponses A,C

PARTIE III

16. A. Réponse fausse : la série $\sum u_n(x)$ n'est pas absolument convergente ; en effet $|u_n(x)| \sim \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- B. Réponse fausse : la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme !
- C. Réponse fausse. La convergence normale d'une série de fonctions est, par définition, la convergence de la série $\sum \|u_n\|_\infty$; or, le fait que $\|u_n\|_\infty$ converge vers zéro ne suffit pas à assurer la convergence de la série !
- D. Réponse fausse. Je détaille : pour tout $x > 0$, la série de terme général $u_n(x)$ vérifie le critère spécial sur les séries alternées. On connaît alors la majoration du reste : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x}$. Mais, par définition, la convergence uniforme de la série équivaut à la convergence *uniforme* vers zéro de la suite (R_n) . C'est bien le cas ici, puisque $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$, mais la convergence *simple* évoquée dans l'énoncé ne suffit pas.

Q16 : Réponse E (aucune réponse exacte)

17. A. Réponse fausse : la « justification » donnée est fantaisiste.
- B. Le début de la réponse est exact : c'est la définition de la convergence normale, et la majoration donnée est correcte. Cependant, une série normalement convergente est automatiquement absolument convergente. La fin de la réponse est donc inexacte.
- C. Réponse fausse, voir ci-dessous.
- D. Réponse exacte. La justification est donnée dans la réponse B, et le reste est un résultat du cours.

Q17 : Réponse D

18. • Il est facile de vérifier que : $\forall t \in [0,1], \frac{1+t^2}{2} \geq t$. Donc $a_n \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. La réponse C est donc exacte, et la réponse B est inexacte.
- Puisque $t^2 \leq t$ pour $t \in [0,1]$, on a $\frac{1+t^2}{2} \leq \frac{1+t}{2}$ d'où $a_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt$, puis, en faisant le changement de variable $u = \frac{1+t}{2}$, on trouve $a_n \leq 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^n du = 2 \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \leq \frac{2}{n+1}$.
- Cette majoration montre bien que la suite (a_n) tend vers zéro.

Q18 : Réponses C,D

19. A. La série de terme général (b_n) ne peut être absolument convergente, puisque la série de terme général (a_n) diverge !

B. Pour $t \in [0, 1]$, $0 < \frac{1+t^2}{2} \leq 1$ donc $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ et $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$. La suite est donc bien positive décroissante.

J'ai déjà montré dans la question précédente, par une simple majoration, que la suite tend vers zéro. On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée. En effet :

Posons $f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.

- Les f_n sont continues sur $[0, 1]$.
- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{pour } t = 1 \end{cases}$$

- La majoration de l'énoncé est exacte, elle fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 0$.

C. Ce qui a été démontré à la question précédente prouve exactement que la série de terme général (b_n) vérifie le critère spécial sur les séries alternées.

D. Réponse fausse d'après ce qui précède.

Q19 : Réponses B,C

20. L'encadrement obtenu à la question 18 : $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$ montre, d'après un résultat du cours, que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est exactement égal à 1.

Q20 : Réponse A

21. Pour $t \in [0, 1]$, on a bien $|r_n(t)| \leq |x|^n$, donc $\|r_n\|_\infty \leq |x|^n$, et, puisque la série de terme général $|x|^n$ converge ($|x| < R = 1$ par hypothèse), la série de fonctions de t de terme général r_n est normalement convergente sur $[0, 1]$. elle sera donc uniformément et absolument convergente.

Par contre, on peut s'interroger sur la fin de la réponse C : la série de terme général x^n est absolument convergente parce que $|x| < 1$, mais pas pour tout $x \in \mathbb{R}$. La justification « étant absolument convergente sur $\mathbb{R}$ » étant inexacte, je pense qu'il faut considérer la réponse comme fausse.

Q21 : Réponse E (aucune réponse exacte)

22. On vient de voir que, pour tout $x \in]1, 1[$, la série de fonctions de terme général $r_n(t)$ est normalement donc uniformément convergente sur le segment $[0, 1]$.

On peut donc, d'après un résultat du cours, l'intégrer terme à terme.

Q22 : Réponse A

23. La série de terme général $r_n(t)$ est une série géométrique de raison $q = \frac{x(1+t^2)}{2}$. Pour $|x| < 1$ et $t \in [0, 1]$, on a $|q| < 1$ donc la série converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(t) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x(1+t^2)}{2}}$$

Q23 : Réponse B

24. $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 r_n(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(t) \right) dt$ en intégrant terme à terme, ce qui est licite en vertu de la question 22. D'où :

$$W(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1 - \frac{x(1+t^2)}{2}} = \frac{-2}{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{x-2}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

Pour $x > 0$ (donc $x \in]0, 1[$), on a $W(x) = \frac{2}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{2-x}{x} - t^2}$ avec $\frac{2-x}{x} > 0$.

Je rappelle qu'une primitive de $\frac{1}{a^2 - t^2}$ est $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+t}{a-t} \right|$ ou $\frac{1}{a} \operatorname{Arg th} \left(\frac{t}{a} \right)$ (pour $|t/a| < 1$ pour cette dernière expression).

Notons $a = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$. On a bien ici $\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \in]0, 1[$, d'où

$$W(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{Arg th} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{2}{x} \sqrt{\frac{x}{2-x}} \operatorname{Arg th} \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

ce qui n'est pas tout à fait la réponse A ; on peut légitimement penser à une faute de frappe dans l'énoncé (parenthèse mal placée à la fin de l'expression), mais, ainsi écrite, la réponse est inexacte.

L'autre expression de la primitive donne

$$W(x) = \frac{2}{x} \frac{1}{2a} \ln \frac{a+1}{a-1} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{2-x}} \ln \frac{\sqrt{\frac{2-x}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{2-x}{x}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}$$

ce qui n'est pas tout à fait la réponse C (à cause du facteur 2, mais là, il semble que ce soit fait exprès...). Tous ces calculs passionnants pour conclure :

Q24 : Réponse E (aucune réponse exacte)

OU

Q24 : Réponse A (coquille énoncé)

25. Dans le cas $x \in]-1, 0[$, on a $W(x) = \frac{-2}{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \frac{x-2}{x}}$ avec ici $\frac{x-2}{x} > 0$.

On sait qu'une primitive de $\frac{1}{t^2 + a^2}$ est $\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{a} \right)$, ce qui donne ici, en posant $a = \sqrt{\frac{x-2}{x}}$

$$W(x) = \frac{-2}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

La série de terme général $w_n(x) = a_n x^n$ vérifie le critère spécial sur les séries alternées lorsque $x \in]-1, 0[$ (en effet, la suite (a_n) est à termes positifs et décroît vers 0). Son reste d'ordre n sera donc majoré, en valeur absolue, par $|a_{n+1} x^{n+1}|$, donc par a_{n+1} , ce qui prouve qu'il converge uniformément vers 0. La série de terme général w_n est donc uniformément convergente sur $[-1, 0]$ et, par suite, la fonction W est continue sur $[-1, 0]$.

En particulier, pour $x = -1$, on aura

$$W(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} W(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ici, la faute de frappe de l'énoncé apparaît clairement : il manque le « / » pour la fraction... On peut donc considérer que la réponse D est exacte.

Q25 : Réponse D (coquille énoncé)

26. D'après le cours, la réponse A est exacte (théorème de la double limite).

Mais la réponse C est également correcte, puisque, pour pouvoir écrire une expression comportant

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)$, il est nécessaire que cette série converge !

Q26 : Réponses A;C

27. On a vu à la question 16 que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. On peut donc appliquer le résultat précédent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

(résultat connu sur la série harmonique alternée).

Q27 : Réponse A

28. On a vu à la question 17 que la série de fonctions de terme général $v_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On peut donc là encore utiliser le résultat rappelé dans la question 26 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

après télescopage.

Attention, on ne peut pas « couper la série en deux », car les séries de termes généraux $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n+1}$ sont divergentes : la réponse D est fausse.

Q28 : Réponse B

29. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc $\|u'_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série numérique convergente, donc la série de fonctions de terme général u_n est normalement (donc uniformément) convergente sur $[0, +\infty[$.

La réponse A est exacte : il s'agit du théorème du cours sur la dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Les réponses B et D sont donc fausses.

La réponse C est inexacte, les fonctions u_n n'étant pas définies sur $\mathbb{R}$.

Q29 : Réponse A

30. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'_n(x) = \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$.

Pour tout $n \geq 2$, $v'_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{n}{n^2 - 1} \geq \frac{1}{n}$, donc $\|v'_n\|_{\infty}^{[0, \infty[} \geq \frac{1}{n}$ et la série de terme général v'_n ne peut donc pas être normalement convergente sur $[0, +\infty[$, ni a fortiori sur $\mathbb{R}$. Les réponses A et C sont donc fausses.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $v'_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $v'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 1}$, qui est le terme général d'une série convergente, mais pas celui d'une série absolument convergente. La réponse B est donc exacte.

La convergence en moyenne quadratique « sur $\mathbb{R}$ » n'a guère de sens ! Cela ferait référence à la norme $f \mapsto \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$, qui n'a rien à faire ici ! On peut donc dire que la réponse D est fausse.

Rem : La convergence en moyenne quadratique sur un intervalle de longueur 2π , c'est-à-dire celle relative à la norme $f \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$ me semblerait plus appropriée... Il faudrait montrer déjà

que la série de terme général v'_n converge simplement sur $\mathbb{R}$: c'est exact, mais cela nécessite l'usage de la transformation d'Abel ; ensuite, il y aura effectivement convergence en moyenne quadratique puisque la série $\sum b_n(f)^2 = \sum \left(\frac{n}{n^2-1}\right)^2$ converge...

Q30 : Réponse B

PARTIE IV

31. La fonction f est définie en tout point t tel que $t \neq 0$ et $1 + xt^2 > 0$. Elle sera donc définie sur $]0, +\infty[$ lorsque $x \geq 0$; lorsque $x < 0$, il faut de plus $xt^2 > -1$ soit $t^2 < -\frac{1}{x}$, soit, puisque $t > 0$, $t < \frac{1}{\sqrt{-x}}$, et elle sera donc définie alors seulement sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{-x}}\right[$.

Attention : l'affirmation dans C est fausse : $1 + xt^2$ est strictement positif pour tout t inférieur à...

Attention : le terme « uniquement » dans la réponse B est de trop ; l'affirmation est encore vraie pour $x=0$...

Les théorèmes usuels assurent ensuite sa continuité sur son domaine de définition.

Enfin, pour $x > 0$, $\ln(1 + xt^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} xt^2$ donc $f(t)$ est bien équivalente en 0 à $\frac{xt}{1+t^2}$, ce qui permet de la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Q31 : Réponse D

32. Pour $x \geq 0$, on a $1 + xt^2 \geq 1$ donc $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. C'est la réponse A, et la réponse B est donc fausse.

Soit $x > 0$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + xt^2) = +\infty$ donc $\ln(1 + xt^2) \sim \ln(xt^2) = \ln x + 2 \ln t \sim 2 \ln t$, d'où $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln t}{t^3}$. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$, c'est-à-dire $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Q32 : Réponses A,D

33. Il suffit de lire, puisque l'énoncé (réponse D) fournit la démonstration complète...

Mais il y a un PIÈGE ! En effet, il est écrit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui est faux ! (elle est intégrable sur $[1, +\infty[$, par contre). Du coup, la réponse D devient fausse !

Q33 : Réponse E (aucune réponse exacte)

34. Si on lit bien la définition initiale de f , il est marqué :

« On considère la fonction f de la variable réelle t , définie sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$... »

Alors, parler de fonction impaire ou d'intégrabilité sur $]-\infty, +\infty[$ pour une telle fonction n'a absolument aucun sens !

Sans même lire le contenu entier des réponses, on répond aussitôt :

Q34 : Réponse E (aucune réponse exacte)

35. A. B. Un calcul simple montre que la formule de la réponse B est exacte. Mais le problème est que l'énoncé ne définit clairement pas F en $(0,0)$, ni ϕ en 0...Question douteuse...

C. On sait que, pour tout $u \in]-1, 1[$, $\ln(1 + u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k}$, donc, pour $u \neq 0$, $\psi(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^{k-1}}{k}$, et cette égalité reste vraie pour $u = 0$. ψ est donc bien développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence égal à 1 ; d'après le cours, elle est donc bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

D. Cela n'a pas de sens, pour les fonctions de plusieurs variables, de parler de différentiabilité sur un ensemble qui est fermé !!

Q35 : Réponses B(?),C

Rem : Je pense que, pour la suite, il fallait considérer ϕ prolongée par continuité en 0, en posant $\phi(0) = 1$ puisque $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Cela permet alors, à l'aide la formule de la question B. de prolonger $F(x, t)$ pour $t = 0 \dots$

36. C'est du calcul...

Dans la réponse D, il manque $(1 + xt^2)$ au dénominateur...

Q36 : Réponse A

37. Si x peut prendre des valeurs négatives, le dénominateur de $D_1 F$ pourra s'annuler pour t tel que $t^2 = -\frac{1}{x}$, d'où problème... Les réponses A et C sont donc fausses.

Les applications $(x, t) \mapsto x$ et $(x, t) \mapsto t$ étant continues sur $\mathbb{R}^2$, $D_1 F$ sera donc continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Rem : Cela exige bien sûr que l'on ait défini $F(x, t)$ lorsque $t = 0$, ce que ne fait pas l'énoncé ! (cf. remarque fin Q.35).

Q37 : Réponse B

38. D'abord, f ne peut être majorée par une fonction de t indépendante de x pour tout x réel positif, puisque, à t fixé, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, t) = +\infty$! La réponse C est donc exacte, et les réponses A et B fausses.

Il y a aussi des problèmes si on prend $x \in [-A, A]$ avec $A > 0$, car alors la fonction n'est plus définie pour tout t positif lorsque $x < 0$. La réponse D est fausse.

Q38 : Réponse C

39. Pour $x \geq 0$ (seulement), on considère $g(x) = \int_0^{+\infty} F(x, t) dt$.

On sait déjà que la fonction F est continue par rapport à x et par rapport à t (avec $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$).

De plus, si A est un réel > 0 , on a, pour tout $x \in [0, A]$, $|F(x, t)| \leq \frac{\ln(1 + At^2)}{t(1 + t^2)}$, fonction positive, continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur cet intervalle comme on l'a déjà vu à la question 33.

L'hypothèse de domination est donc satisfaite; le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres donne alors la continuité de g sur $[0, A]$, avec $A > 0$ quelconque, donc sur $\mathbb{R}_+$.

Q39 : Réponse B

40. • Il s'agit ici d'appliquer le théorème sur la dérivabilité d'une intégrale à paramètres. Les quatre premières hypothèses ne posent pas de problème; reste l'hypothèse de domination pour $|D_1 f|$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $|D_1 F(x, t)| \leq \frac{t}{(1 + at^2)(1 + t^2)}$ qui est une fonction continue sur $[0, +\infty[$, positive, et intégrable sur $[0, +\infty[$ (équivalente $+\infty$ à $\frac{1}{at^3}$). Le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètres permet alors de conclure que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et ce, pour tout $a > 0$, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Rem : Le théorème mentionné ci-dessus montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, mais ne permet pas de d'affirmer qu'elle n'est pas dérivable en 0, comme il est indiqué dans la réponse A. Voir ci-dessous.

- Et, pour tout $x > 0$, on a : $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+xt^2)(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+xu)(1+u)}$ en effectuant le changement de variables $u = t^2$, $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, pour $x \neq 1$, $g'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\frac{-x}{1-x}}{1+xu} + \frac{\frac{1}{1-x}}{1+u} \right] du = \frac{1}{2(1-x)} \left[\ln \left(\frac{1+u}{1+xu} \right) \right]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = \frac{\ln x}{2(x-1)}.$

g étant de classe $\mathcal{C}^1$ cette relation se prolonge en $x = 1$: $g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$

- Enfin, le calcul ci-dessus montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty$, donc g n'est pas dérivable en $0^+.$

Q40 : Réponses A,D

