CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2009

PARTIE I

1. Pour $x \geqslant 0$, on calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ (attention au cas $x=0$!), ce qui permet de montrer que

la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$

f n'étant pas continue en 0, alors que les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, la convergence ne peut être uniforme, ni sur $[0,1]$, ni sur $[0,+\infty[$. Donc les réponses A,B,C sont fausses.

Cependant, si K est un compact inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $a>0$ tel que $K\subset[a,+\infty[$ et on a alors $\|f_n\|_\infty^K \leqslant \|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant e^{-na}$ ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty^K=0$, c'est-à-dire, par définition, que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur K.

Q1 : Réponse D

---

2. Pour tout $x\geqslant 0$, on a $0\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$, d'où $0\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$: la suite (v_n) est décroissante, minorée par 0, donc converge.
C'est la réponse A. La réponse C est donc fausse. La majoration donnée dans la réponse D ne permet pas de conclure.
Enfin, puisque $\dfrac{1}{1+x}\leqslant 1$ pour tout $x\geqslant 0$, on a

$$v_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx=\left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1=\frac{1-e^{-n}}{n}$$

donc l'encadrement de la réponse B est exact, et permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=0$.

Q2 : Réponses A,B

---

3. Le changement de variable $u=x^n$ (soit $x=u^{\frac1n}$) donne

$$w_n=\int_0^1 nx^n f(x)\,dx = n\int_0^1 uf\left(u^{\frac1n}\right)\left(\frac1n u^{\frac1n-1}\right)du=\int_0^1 u^{\frac1n} f\left(u^{\frac1n}\right)du$$

Or, $\lim\limits_{n\to\infty} u^{\frac1n}=1$ si $u>0$ (puisque $u^{\frac1n}=e^{\frac1n\ln u}$), donc la suite de fonctions (g_n) définies par $g_n(u)=u^{\frac1n}f\left(u^{\frac1n}\right)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $g : u\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u=0 \\ f(1) & \text{si } u>0\end{cases}$ (car f continue).

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $u\in[0,1]$, on a $|g_n(u)|\leqslant\|f\|_\infty$, et la fonction constante $u\mapsto\|f\|_\infty$ est évidemment intégrable sur $[0,1]$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g_n=\int_0^1 g$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=f(1)$. En conclusion :

Q3 : Réponse E (aucune réponse exacte)

PARTIE II

4. A. Réponse fausse. Considérer par exemple : $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

B. Réponse fausse. Considérer par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. Réponse exacte. En effet, dans ce cas, on peut trouver une base commune de vecteurs propres, c'est-à-dire une même matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$ avec D, D' diagonales, et on aura alors $AB = PDD'P^{-1}$.

D. Réponse fausse. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $A^2 = 0$ est daigonalisable, mais pas A.

Cependant, on peut démontrer facilement l'implication : A diagonalisable $\Longrightarrow$ A^2 diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$ alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ ...
On peut aussi démontrer (exercice !) que la réciproque est vraie si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ ...

Q4 : Réponse C

---

5. Je n'ai pas bien compris ! Il suffit de choisir A et B telles que $A + B = I$ et $\lambda = 1$ pour voir que les quatre réponses sont fantaisistes !
Il doit manquer une hypothèse... Détaillons :

Avec les hypothèses, on a $M^2 - \lambda M = 0$, donc $X^2 - \lambda X$ est un polynôme annulateur de M. λ étant supposé non nul, ce polynôme est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable, et ses valeurs propres sont *incluses* dans l'ensemble $\{0, \lambda\}$; elle aura exactement deux valeurs propres si et seulement si $X^2 - \lambda X$ est son polynôme minimal, c'est-à-dire si $M \neq 0$ (cela est dit dans l'énoncé) et $M \neq \lambda I$: voilà l'hypothèse « oubliée »...

Q5 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

6. A. C. Ces deux réponses sont fausses. Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. Réponse fausse. Le contre-exemple a déjà été vu dans la question 4 : prendre $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = X^2$.

D. Réponse exacte : en effet, A étant diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc il en sera de même de celui de B, et B est diagonalisable.

Q6 : Réponse D

---

7. Comme le précisait l'erratum distribué en début d'épreuve, il fallait lire C et D dans les réponses, et non A et B...

- Si le système possède une solution, alors C et D annulent le polynôme $X^2 + 1$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc sont diagonalisables dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. La réponse D est fausse.
- Si le système possède une solution (C, D), il possède aussi la solution $(-C, -D)$. Puisque $\operatorname{tr}(-C) = -\operatorname{tr}(C)$, la réponse C est fausse.
- Si (C, D) est solution, alors C et D sont diagonalisables, de spectre inclus dans $\{-i, i\}$.
  On a de plus $(C - iI_n)D = -D(C + iI_n)$ donc, si $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

  $$X \in E_{-i}(C) \Longleftrightarrow (C + iI_n)X = 0 \Longleftrightarrow D(C + iI_n)X = 0 \Longleftrightarrow (C - iI_n)DX = 0 \Longleftrightarrow DX \in E_i(C)$$

  (la deuxième *équivalence* vient du fait que D est inversible).

  Le sous-espace propre $E_i(C)$ est donc l'image par D (ou plutôt par l'application linéaire associée à D) du sous-espace propre $E_{-i}(C)$; D étant bijective, ces deux sous-espaces propres ont donc même dimension. Il en résulte que n est nécessairement pair, et que D est semblable à la matrice (par blocs) : $\begin{bmatrix} iI_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -iI_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$. Sa trace est donc nulle. Idem pour la matrice C.

  Rem : Il est facile de démontrer que, réciproquement, si n est pair, le système a une solution ; il suffit de considérer les matrices $C = \begin{bmatrix} iI_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & -iI_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 0 & iI_{\frac{n}{2}} \\ iI_{\frac{n}{2}} & 0 \end{bmatrix}$.

Q7 : Réponse B

PARTIE III

8. $U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ d'où $U_0^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -8 & -8 & -2 \\ 28 & 24 & 5 \end{pmatrix}$. Donc :

Q8 : Réponse A

---

9. On calcule le polynôme caractéristique de U_t :

$$\chi_{U_t} = \begin{vmatrix} 2-X & 3 & 1 \\ t & -4-X & -2 \\ 4 & 12 & 5-X \end{vmatrix} = -X^3 + 3X^2 + (-2+3t)X - 3t = -(X-1)(X^2 - 2X - 3t)$$

(pas d'astuce particulière pour ce calcul : on utilise bestialement la règle de Sarrus...).

1 sera toujours valeur propre . Le discriminant réduit du trinôme $X^2 - 2X - 3t$ est $1 + 3t$, donc le nombre de valeurs propres réelles dépend de son signe...

Q9 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

10. A. B. Pour $t = 0$, on trouve que les valeurs propres de U_0 sont $0, 1, 2$. La réponse A est exacte, la réponse B est fausse.

C. D. 0 est valeur propre de U_t si et seulement si 0 est racine de $X^2 - 2X - 3t$, ce qui équivaut à $t = 0$.

Q10 : Réponses A,D

---

11. Le discriminant réduit du trinôme $X^2 - 2X - 3t$ est $1 + 3t$, donc ce trinôme possède deux racines distinctes si et seulement si $t > -\frac{1}{3}$. Cependant, pour que U_t possède trois valeurs propres réelles distinctes, il faut en plus que aucune des deux racines du trinôme $X^2 - 2X - 3t$ ne soit égale à 1 ; or 1 est racine de $X^2 - 2X - 3t$ si et seulement si $-1 - 3t = 0$, ce cas est donc exclu.
Conclusion :

Q11 : Réponse B

---

12. Le polynôme caractéristique d'une matrice 3×3 est TOUJOURS de degré 3 ! Donc :

Q12 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

13. C'est le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_{U_t}(U_t) = 0$...

Q13 : Réponse B

---

14. La division euclidienne s'écrit : $X^n = P_t Q_t + R_t$ avec $\deg R_t \leqslant 2$, c'est-à-dire $R_t = aX^2 + bX + c$.

A. B. Pour $t = 0$, $P_t = -X(X-1)(X-2)$ et il suffit de faire $X = 0$, $X = 1$ et $X = 2$ dans l'égalité précédente pour trouver $c = 0$, $a + b = 1$ et $4a + 2b = 2^n$, d'où $a = 2^{n-1} - 1$, $b = 2 - 2^{n-1}$; c'est la réponse A.

C. D. Pour $t = -\frac{1}{3}$, $P_t = -(X-1)^3$. On applique alors l'égalité précédente à $X = 1$, puis on dérive et on fait de nouveau $X = 1$, puis on re-dérive et on fait encore $X = 1$.

On obtient : $R(1)=1,\ R'(1)=n$ et $R''(1)=n(n-1)$, donc d'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} R(X) &= R(1)+(X-1)R'(1)+\frac{(X-1)^2}{2}R''(1) \\ &= 1+n(X-1)+\frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2 \\ &= \dots = \frac{n(n-1}{2}X^2+n(2-n)X+\frac{n^2-3n+2}{2} \end{aligned}$$

ce qui est la réponse C. Conclusion :

$\boxed{\textbf{Q14 : Réponses A,C}}$

---

15. On reprend les calculs de la question précédente.
On a $X^n = P_tQ_t+R_t$ donc $U_t^n = \underbrace{P_t(U_t)}_{=0}Q_t(U_t)+R_t(U_t)=R_t(U_t)$ soit ici

$$\begin{aligned} U_0^n &= (2^{n-1}-1)U_0^2+(2-2^{n-1})U_0 \\ &= (2^{n-1}-1)\cdot\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -8 & -8 & -2 \\ 28 & 24 & 5 \end{pmatrix}+(2-2^{n-1})\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et après quelques vérifications passionnantes, on conclut :

$\boxed{\textbf{Q15 : Réponses B,C}}$

PARTIE IV

16.
- Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, le produit PQ appartient encore à $\mathbb{R}[X]$ donc, par hypothèse, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b PQ\omega$ est absolument convergente, donc convergente.
Par conséquent, $\langle P|Q\rangle$ existe, et la réponse A est fausse.
- Il est facile de vérifier que l'application $(P,Q)\mapsto\langle P|Q\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
- Elle sera définie si et seulement si $\displaystyle\int_a^b P^2\omega=0\Longrightarrow P=0$. Or $\displaystyle\int_a^b P^2\omega=0\Longrightarrow P^2(x)\omega(x)=0$ pour tout $x\in]a,b[$ (puisque $P^2\omega$ est une fonction continue positive). Pour pouvoir conclure $P=0$, il *suffit* que l'ensemble des points où ω ne s'annule pas soit infini (car, alors, le polynôme P s'annulant en une infinité de points sera le polynôme nul).
Cela sera effectivement réalisé si $\omega(x)>0$ pour tout x, mais ce n'est pas une condition nécessaire. La réponse D (« que si ... ») est donc inexacte.
Conclusion :

$\boxed{\textbf{Q16 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$

---

17. A. Réponse fausse : Il est vrai que, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que, pour tout n, P_n soit de degré n, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}[X]$ (exercice !). Mais la réciproque est fausse : par exemple, la famille $\{X-1,X+1\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, et en la complétant par les X^k pour $k\geqslant 2$, on obtient une base de $\mathbb{R}[X]$ qui ne contient pas de polynôme de degré 0...

B. Réponse fausse : si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, c'est évidemment une famille libre, mais la réciproque est fausse ! Considérer par exemple la famille des polynômes $\left\{X^{2n},n\in\mathbb{N}\right\}$...

C. Réponse fausse : déjà, l'application définie dans la question précédente n'est pas nécessairement un produit scalaire... Et quand bien même, il existe des bases de $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas orthogonales !

D. Réponse fausse : $\mathbb{R}[X]$, même de dimension infinie, possède des bases ! Par exemple, la base canonique $\{X^n,n\in\mathbb{N}\}$...

$\boxed{\textbf{Q17 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$

---

18. Pour tout polynôme P, on a, pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{|P(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$ où $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ $\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{Arc}\sin x\right]_{-1}^{1} = \pi\right)$, donc, d'après les théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité de fonctions positives, il en est de même de $x \mapsto |P(x)|\,\omega(x)$, et cela, pour tout polynôme P. Conclusion :

$$\boxed{\textbf{Q18 : Réponse C}}$$

---

19. Des résultats et des calculs classiques concernant les polynômes de Tchebychev :

- $\cos(n\theta) = \mathscr{R}e\,(e^{in\theta}) = \mathscr{R}e\,((e^{i\theta})^n) = \mathscr{R}e\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathscr{R}e\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k}\right)$

  d'où : $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k (\sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} (-1)^k (\sin^2\theta)^k (\cos\theta)^{n-2k}$

  et finalement, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ avec $T_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$. (c'est bien un polynôme !).

- Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et S_n vérifiant $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = S_n(\cos\theta)$. Alors, pour tout $x \in [-1,1]$ on aura $T_n(x) = S_n(x)$ soit $(T_n - S_n)(x) = 0$.
  Le polynôme $T_n - S_n$ ayant une infinité de racines est le polynôme nul, donc $T_n = S_n$, ce qui prouve l'unicité.

$$\boxed{\textbf{Q19 : Réponse C}}$$

---

20. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta$ (on utilise la formule de trigonométrie bien connue $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$).
Donc $T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta)$ pour tout θ réel, d'où, pour tout $x \in [-1,1]$,
$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$.
Cette égalité entre fonctions polynômes étant vraie pour une infinité de valeurs, on en déduit l'égalité des polynômes , soit $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.
Conclusion :

$$\boxed{\textbf{Q20 : Réponse B}}$$

---

21. $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et la formule de récurrence précédente donne $T_2 = 2X^2 - 1$ puis $T_3 = 4X^3 - 3X$.
La relation de récurrence précédente permet de démontrer facilement par récurrence sur n la propriété :

$$\mathscr{H}_n : \begin{cases} T_n \text{ est de degré } n \\ \text{son coefficient dominant est } 2^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1 \\ \text{sa parité est celle de } n \end{cases}$$

(on démontre les trois propriétés en même temps dans une seule récurrence, il est maladroit de faire trois récurrences séparées !).

$$\boxed{\textbf{Q21 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$$

---

22. Voir ci-dessus.

$$\boxed{\textbf{Q22 : Réponse C}}$$

---

23. Soient n, p deux entiers naturels.

Pour le calcul de $\langle T_n|T_p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, on effectue le changement de variable $x = \cos\theta$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$:

$$\langle T_n|T_p\rangle = \int_0^{\pi} T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[\cos(n+p)\theta + \cos(n-p)\theta\right] d\theta$$

Donc :

- si $n \neq p$: $\langle T_n|T_p\rangle = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n+p}\sin(n+p)\theta + \dfrac{1}{n-p}\sin(n-p)\theta\right]_0^{\pi} = 0$.
- si $n = p$: $\langle T_n|T_n\rangle = \|T_n\|^2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n\theta)+1}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 1$ (et $\|T_0\|^2 = \pi$).

  $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ (mais pas orthonormale). Puisque $\deg(T_n) = n$ pour tout n, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Q23 : Réponse C

---

24. *Rem :* après les polynômes de Tchebychev, les polynômes d'Hermitte...

(E_n) est évidemment une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène, à coefficients non constants. C'est la réponse B.

Le coefficient de y'' étant non nul, l'ensemble de ses solutions forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, donc la réponse C est fausse.

Enfin, si f est solution de (E_0), on a $f''(x) - 2xf'(x) = 0$ d'où (équation différentielle linéaire du premier ordre en f') $f'(x) = C\cdot e^{x^2}$, où C est une constante réelle. Donc la réponse D est inexacte.

Q24 : Réponse B

25.

- S_n est l'intersection de l'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0, qui est un espace vetoriel, et de l'ensemble des solutions de (E_n), sui est un espace vectoriel de dimension 2. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Soit f appartenant à S_n, c'est-à-dire f est développables en série entière au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad , \quad \text{cette série entière ayant un rayon de convergence } R > 0$$

f est solution de (E_n) si et seulement si , pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + 2n\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + 2\sum_{k=0}^{+\infty}(n-k)a_k x^k = 0$$

d'où

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)}a_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } a_0, a_1 \text{ quelconques}$$

Pour $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, ces relations permettent de définir une série entière dont on notera la somme f_0 ; les coefficients d'indices impairs de cette série sont nuls ; si n est pair, f_0 sera un polynôme , car, pour $k = n$, la relation de récurrence donne $a_{n+2} = 0$, puis $a_{n+4} = 0$ etc... ; sinon, on obtiendra une série entière avec des coefficients a_{2k} tous non nuls, et de rayon de convergence infini puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right| = 0$.

De même, pour $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on obtient une série entière, notée f_1, qui est un polynôme si n est impair, et une série entière de rayon de convergence infini sinon.

Pour a_0, a_1 quelconques, la série entière obtenue ci-dessus sera donc égale à $f = a_0 f_0 + a_1 f_1$. C'est donc, dans tous les cas, une série entière de rayon de convergence infini (la condition de l'énoncé de la réponse A visait à exclure les cas des solutions f_0 et f_1, mais je ne vois pas pourquoi...). La réponse A est donc exacte, et la réponse B fausse.

Enfin, on vient de voir que *certaines* solutions vérifiaient une des conditions des réponses C et D, mais ce n'est pas le cas de toutes !

$$\boxed{\textbf{Q25 : Réponse A}}$$

---

26. On vient de répondre à cette question. Une des fonctions (et une seulement) f_0 et f_1 est un polynôme (selon la parité de n). On ne peut pas trouver de base formée de deux fonctions polynômes, sinon toutes les solutions seraient polynomiales, ce qui n'est pas le cas.

$$\boxed{\textbf{Q26 : Réponse A}}$$

27.
- $H_0(x) = 1$.
- $\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$ donc $H_1(x) = 2x$.
- $\dfrac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$ donc $H_2(x) = 4x^2 - 2$.
- Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\mathscr{P}_n \ : \ H_n \text{ est un polynôme de degré } n, \text{ de la parité de } n \text{ et de coeff. dominant } 2^n$$

  On vient de voir que cela est vrai pour $n = 0, 1, 2$. Si $\mathscr{P}_n$ est vérifiée, alors

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) = \frac{d}{dx}\left[(-1)^n e^{-x^2} H_n(x)\right] = (-1)^n \left[H_n'(x) - 2xH_n(x)\right]e^{-x^2}$$

  donc $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$, ce qui permet de démontrer $\mathscr{P}_{n+1}$.

Par conséquent :

$$\boxed{\textbf{Q27 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$$

28.
- Dans cette question, on considèrera le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}\,dx$$

  L'énoncé n'est guère précis : il n'est pas dit que l'intervalle $I =]a, b[$ est ici $\mathbb{R}$, et on ne demande pas de vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ répond bien aux conditions d'intégrabilité requises...
- Un résultat utile pour la suite : si P est un polynôme , alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} P(x)\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) = 0$ (cela découle de $\dfrac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2}) = (-1)^k e^{-x^2} H_k(x)$ et H_k polynôme).
- On va utiliser ici la formule d'intégration par parties généralisée :

$$\text{pour } u, v \text{ de classe } \mathscr{C}^n \text{ , } \int uv^{(n)} = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v$$

  On aura donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
\langle P|H_n\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,dx \\
&= (-1)^n \underbrace{\left[P(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}) - \ldots + (-1)^{n-1}P^{(n-1)}(x)e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ d'après le résultat préliminaire}} + (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x)e^{-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

  ce qui est la formule de la réponse C.

- En appliquant cette formule à $P = H_n$, on obtient

$$\langle H_n|H_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}(H_n)(x)e^{-x^2}\,dx = n!2^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

puisque H_n est de degré n et a pour coefficient dominant 2^n.

Rem : En utilisant toujours la relation du C, on obtient facilement que $\langle H_n|H_m\rangle = 0$ si $n \neq m$, c'est-à-dire que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire considéré.

Q28 : Réponses A,C

---

29. - On a déjà vu que l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, on peut donc d'emblée éliminer les réponses C et D.

- Si $f(x) = e^{-x^2}$, on a $f'(x) = -2xf(x)$ et, en dérivant n fois cette égalité par la formule de Leibniz, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\big(-2xf(x)\big) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$$

d'où

$$e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) = -2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) - 2ne^{x^2}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})$$

ce qui donne : $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (tous ces calculs étant valables si $n \geqslant 1$, ce qui n'est pas dit dans l'énoncé)...

Or, on a montré, à la question 27, la relation : $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$; en comparant avec la relation que l'on vient d'obtenir, on a : $H_n' = 2nH_{n-1}$.

D'où $H_n''(x) = 2nH_{n-1}'(x) = 2n[2xH_{n-1}(x) - H_n(x)] = 2xH_n'(x) - 2nH_n(x)$, ce qui montre que H_n est solution de (E_n).

En conclusion :

Q29 : Réponse A

---

30. L'hypothèse supplémentaire : $\omega \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b \omega(x)\,dx \neq 0$ implique qu'il existe une infinité de points de $]a,b[$ où ω n'est pas nulle, ce qui implique que $\langle .|.\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (cf question 16).

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt (par exemple) permet alors de construire une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$; cette famille répond aux conditions de la réponse A (donc toutes les autres réponses sont fausses).

Q30 : Réponse A

PARTIE V

31. La fonction sin étant bornée, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

Elle admet donc bien un DL d'ordre 2 en zéro, donc a fortiori un DL d'ordre 1, ce qui implique qu'elle est dérivable en 0 (et $f'(0) = 0$, car le coefficient du terme en x dans le DL est nul).

Cependant, l'implication : « f admet un DL d'ordre 2 en 0 $\Rightarrow$ f deux fois dérivable en 0 » est fausse. En effet :

$\forall x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2\sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}$, et $f'(0) = 0$ donc $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, c'est-à-dire que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Q31 : Réponse C

---

32. $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = e^{\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = e^{-\frac{x}{2}+o(x)} = 1-\dfrac{x}{2}+o(x)$

Ce DL d'ordre 1 en 0 montre que f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0)=1$, et que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, les réponses B et C sont fausses ; il y a une « erreur » de signe dans la réponse A ; la réponse D est incomplète (puisqu'il manque le prolongement de f en 0), mais je pense qu'on peut la considérer comme exacte.

Q32 : Réponse D

33.
- M est fini, puisque f' est continue sur le compact $[a,b]$ donc y est bornée.
- La formule de Taylor avec reste intégrale appliqué à une primitive F de f s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = (b-a)F'(a)+\int_a^b (b-t)F''(t)\,dt = (b-a)f(a)+\int_a^b (b-t)f'(t)\,dt$$

— Lorsque $f(a)=0$, on aura donc (on suppose $a \leqslant b$) :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (b-t)f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b (b-t)\left|f'(t)\right|\,dt \leqslant M\int_a^b (b-t)\,dt = M\frac{(b-a)^2}{2}$$

C'est la réponse B (l'hypothèse $f(b)=0$ ne sert pas ici).

— On a aussi, en remplaçant b par $\dfrac{a+b}{2}$: $\left|\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt\right| \leqslant M\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-t)\,dt = M\frac{(b-a)^2}{8}$.

Si on suppose en plus $f(b)=0$, on obtiendra de la même façon $\left|\displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{8}$, et, finalement :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,dt\right|+\left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$$

ce qui est la réponse D.
Les réponses A et C sont, elles, inexactes (il suffit de prendre l'exemple $f=1$). Conclusion :

Q33 : Réponses B,D

34.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 1$ donc $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-1 = \dfrac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$.
  Quand $x\to 0^-$, $\operatorname{Arctan}\sqrt{-x} \sim \sqrt{-x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.
  Ainsi, f est continue en 0.
- Pour $x>0$:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) &= \ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})\\ &= \sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(-\sqrt{x}-\frac{x}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)+o(x^{\frac{3}{2}})\\ &= 2\sqrt{x}+2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+o(x^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

  d'où $f(x) \underset{x\to 0^+}{=} 1+\dfrac{x}{3}+o(x)$: il s'agit d'un DL d'ordre 1, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \dfrac{1}{3}$.
- Pour $x<0$:

$$\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) = \sqrt{-x}-\frac{(\sqrt{-x})^3}{3}+o((-x)^{\frac{3}{2}}) = \sqrt{-x}-\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{3}+o((-x)^{\frac{3}{2}})$$

  donc $f(x) \underset{x\to 0^-}{=} 1+\dfrac{x}{3}+o(x)$: f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \dfrac{1}{3}$.

  Finalement, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$. Les réponses B et C sont donc fausses.

- Le même principe, mais avec des DL d'ordres supérieurs, montre que f admet un DL d'ordre 2 en 0 (c'est le même à droite et à gauche), et que c'est bien celui qui figure dans la réponse D.

Q34 : Réponse D

---

35. L'équation du cercle est : $(x+2)^2+(y-2)^2=8$,soit $(y-2)^2=-x^2-4x+4$, d'où $x\in[-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}]$ et $y=2\pm\sqrt{-x^2-4x+4}$.
Pour $y\leqslant 2$, on a $y=2-\sqrt{-x^2-4x+4}$.

Q35 : Réponse C

---

36. Au voisinage du point O, on a $y\leqslant 2$ d'où (encore un DL !) :

$$\begin{aligned}
y=2-\sqrt{-x^2-4x+4}&=2-2\sqrt{1-x-\frac{x^2}{4}}\\
&=2-2\left(1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{1}{8}\left(x+\frac{x^2}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\left(x+\frac{x^2}{4}\right)^3+o(x^3)\right)\\
&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)
\end{aligned}$$

en utilisant le DL bien connu : $\sqrt{1+h}\underset{h\to 0}{=}1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{16}+o(h^3)$.et on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{1-x}&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)\\
&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

don, au voisinage de 0 :

$$f(x)-y=\frac{7}{12}x^3+o(x^3)$$

qui est du signe de $\frac{7}{12}x^3$ donc du signe de x.
Conclusion :

Q36 : Réponse D

PARTIE VI

37.
- $c_n\leqslant d_n$ est évident puisque $C_n\subset D_n$. Les réponses C et D sont donc fausses.
- Soit $\varphi:\{0,1,\dots,2n\}\longrightarrow\mathbb{Z}$ telle que $\varphi(x+1)-\varphi(x)=\pm 1$. En notant, pour $k\in[1,2n]$, $\varepsilon_k=\varphi(k)-\varphi(k-1)$, on a $\varepsilon_k=\pm1$ et $\varphi(2n)=\varphi(0)+\sum_{k=1}^{2n}\varepsilon_k$.
  Calculer d_n revient à trouver le nombre de $2n$-uplets $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n})$ avec $\varepsilon_k=\pm1$ et de somme nulle.
  Pour cela il faut choisit n des ε_k égaux à $+1$ (et, forcément, les autres seront égaux à -1). Il y a donc $\binom{2n}{n}$ possibilités, soit $d_n=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$.

Q37 : Réponse B

---

38. $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$. Les d_n sont strictement positifs, et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$. Le rayon de convergence de cette série entière est donc égal à $\dfrac{1}{4}$.

Puisque $c_n \leqslant d_n$, un résultat du cours permet d'affirmer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ sera, a priori, supérieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

Rem : en fait, on va voir ci-après que le rayon de convergence est égal à $\dfrac{1}{4}$, mais la seule inégalité $c_n \leqslant d_n$ ne permet pas de conclure, donc la réponse C est inexacte.

Q38 : Réponse D

---

39. Sur l'intervalle ouvert de convergence de la série entière qui définit f, on peut faire le produit de Cauchy : $[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

Donc $x[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$ et $1 + x[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$,

$b_n = a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k} = c_n$.

Ainsi, $1 + x[f(x)]^2 = f(x)$. En résolvant l'équation $xY^2 - Y + 1 = 0$ avec $Y \geqslant 0$, on trouve qu'il faut $x \leqslant \dfrac{1}{4}$ (donc le rayon de convergence de la série sera inférieur à $\dfrac{1}{4}$, et par suite égal à $\dfrac{1}{4}$), et que $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.
Conclusion :

Q39 : Réponses C,D

---

40. Il ne reste plus qu'à faire le développement en série entière de $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour trouver les c_n ...

On « sait » que, pour $|x| < 1$, on a : $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \dfrac{x^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)}$.

Donc, pour $|x| < \dfrac{1}{4}$: $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{2x^{n+1}}{n+1}$

puis : $1 - \sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{2x^{n+1}}{n+1}$

et enfin $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{x^n}{n+1}$, d'où $c_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Q40 : Réponse B

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆