CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2011

PARTIE I

1. A.B. Le fait que F soit linéaire est immédiat ($F(\lambda P + Q) = \lambda F(P) + F(Q)$). C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
De plus, si P est un polynôme de degré $\leqslant n$, il en est de même de X^2P'' et de XP', donc de $F(P)$. Ainsi, F laisse stable $R_n[X]$ et sa restriction F_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

C.D. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $F(X^k)$ est de degré $\leqslant k$, donc s'exprime comme combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^k$. Il en résulte que la matrice de F_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
Par contre, sa matrice dans la base $(X^n, \ldots, X, 1)$ est, elle, triangulaire inférieure ! La réponse de la question C. est donc ambigüe. On peut cependant la considérer comme inexacte, car l'habitude est d'écrire la base canonique sous la forme $(1, X, \ldots, X^n)$.

Q1 : Réponse A

---

2. Un calcul rapide donne $F(1) = 0$, $F(X) = 2X+1$ et pour tout entier $k \geqslant 2$, $F(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$.

On en déduit que 0 est valeur propre de F_n : F_n n'est donc pas injective, donc pas surjective non plus puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie $n+1$ (*et non pas n comme il est dit dans la réponse D*).

Le calcul précédent montre également que l'image de F_n, engendrée par les images des vecteurs de base, est de dimension n, puisque les n polynômes $F(X), \ldots, F(X^n)$ étant de degrés distincts forment une famille libre. Ainsi, $\operatorname{rg}(F_n) = n$.

Q2 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

3. On vient de voir que les coefficients diagonaux de la matrice de F_n dans la base canonique (qui est triangulaire supérieure) sont les entiers $k(k+1)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Il en résulte que le polynôme caractéristique de F_n est égal à

$$\chi_n = \det(F_n - X\mathrm{Id}) = \prod_{k=0}^{n} \big(k(k+1) - X\big) = (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \big(X - k(k+1)\big) = (-1)^{n-1} \prod_{k=0}^{n} \big(X - k(k+1)\big).$$

Il en résulte également que F_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est bien de dimension 1.

On notera l'absurdité de la réponse proposée en C : on ne peut pas parler d'endomorphisme symétrique tant que l'on n'a pas défini une structure euclidienne !

Q3 : Réponses A,D

---

4. A.B. F_n étant diagonalisable, il existe bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de F_n.

C.D. Si P_k est un vecteur propre de F_n associé à la valeur propre $k(k+1)$, on a $F(P_k) = k(k+1)P_k$. Si P_k (qui n'est pas nul par définition d'un vecteur propre) est de degré p et si a_p est son coefficient dominant, le terme dominant de $F(P_k) = (X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$ est $[p(p-1) + 2p]a_pX^p = p(p+1)a_pX^p$ donc l'égalité $F(P_k) = k(k+1)P_k$ conduit à $p(p+1) = k(k+1)$ soit $(p-k)(p+k+1) = 0$ donc à $p = k$.
Ainsi, un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$ est nécessairement de degré k ; mais un tel vecteur propre n'est évidemment pas unique puisque, si P_k est un vecteur propre , λP_k en est un aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En conclusion :

Q4 : Réponses B,C

---

5. Chaque sous-espace propre étant une droite vectorielle est engendré par un et un seul polynôme J_k de degré k et dont le coefficient dominant est égal à 1 : la famille de l'énoncé existe bien (et est unique) !

A. Réponse évidemment fausse, sans calcul, puisque $\deg(J_3)=3$ (le polynôme de l'énoncé est en fait J_2 !).

B. On cherche donc J_3 sous la forme $J_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$; la relation $F(J_3) = 12J_3$ conduit à :

$$\underbrace{(12X^3+3X^2-6X)}_{F(X^3)} + a\underbrace{(6X^2+2X-2)}_{F(X^2)} + b\underbrace{(2X+1)}_{F(X)} = 12(X^3+aX^2+bX+c)$$

d'où l'on tire facilement : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{8}$.

La réponse B est donc inexacte (un signe diffère).

D. Compte tenu du calcul précédent, la réponse D est fausse !

C. En supposant $k \geqslant 3$, on peut écrire $J_k = X^k + a_kX^{k-1} + b_kX^{k-2} + c_kX^{k-3} + S_k$ où S_k est un polynôme de degré $\leqslant k-4$. La relation $F(J_k) = k(k+1)J_k$ conduit alors à :

$$\begin{aligned}
[k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}] + a_k[k(k-1)X^k + (k-1)X^{k-2} - (k-1)(k-2)X^{k-3}]& \\
+ b_k[(k-1)(k-2)X^{k-2} + (k-2)X^{k-3} + \ldots] + c_k[(k-2)(k-3)X^{k-3} + \ldots] + \ldots& \\
= k(k+1)[X^k + a_kX^{k-1} + b_kX^{k-2} + c_kX^{k-3}] + \ldots&
\end{aligned}$$

où les pointillés $\ldots$ correspondent à des termes de degrés $\leqslant k-4$. On en déduit, par identification des coefficients des termes de mêmes degrés :

$$a_k = \frac{1}{2} \quad b_k = -\frac{k-1}{4} \quad \text{et} \quad c_k = -\frac{k-2}{8}$$

Ainsi : $J_k = X^k + \dfrac{1}{2}X^{k-1} - \dfrac{k-1}{4}X^{k-2} - \dfrac{k-2}{8}X^{k-3} + S_k$ avec $\deg S_k \leqslant k-4$ (la démonstration est à adapter dans le cas $k=2$). Finalement :

Q5 : Réponse C

---

6. A. La réponse A est évidemment fausse lorsque l'intervalle I n'est pas un segment (il existe des fonctions continues par morceaux et non intégrables !).

B. f et g étant continues par morceaux sur $[-1,1]$ y sont bornées ; on a donc

$$\forall t \in]-1,1]\ ,\ \left|\frac{f(t)g(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\right| \leqslant \sqrt{2}\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ étant continue par morceaux, positive et intégrable sur $]-1,1]$ (fonction de Riemann), il en est donc de même de la fonction (continue par morceaux) $t \mapsto \dfrac{f(t)g(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$.

Cela prouve que l'expression $\langle f|g\rangle$ a bien un sens pour $(f,g) \in E^2$. Cependant, la majoration donnée par l'énoncé est complètement farfelue (elle ne fait même pas intervenir f et g dans le membre droit de l'inégalité) !

C.D. Il est facile de voir que l'application $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

De plus, pour toute $f \in E$, $\langle f|f\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}\,dt$ est bien un réel positif ; si on suppose f continue sur $[-1,1]$, l'égalité $\langle f|f\rangle = 0$ implique (th. du cours) $\dfrac{f^2(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} = 0$ pour tout $t \in]-1,1]$ donc $f(t)=0$ pour tout $t \in]-1,1[$ donc $f=0$ sur $[-1,1]$ par continuité. Mais, comme le dit bien l'énoncé, on ne peut rien conclure de tel si l'on suppose seulement f *continue par morceaux* (prendre par exemple f nulle partout saut en un point).

En conclusion :

Q6 : Réponse D

---

7. P et Q désignent ici deux polynômes .
On peut déjà remarquer que $\mathrm{F(P)} - \mathrm{P}' = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{XP}'$ est la dérivée du polynôme $(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'$ .On a donc :

$$\langle \mathrm{F(P)}|\mathrm{Q}\rangle - \left\langle \mathrm{P}'\middle|\mathrm{Q}\right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\right]\mathrm{Q}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

ce qui suggère une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{F(P)}|\mathrm{Q}\rangle - \left\langle \mathrm{P}'\middle|\mathrm{Q}\right\rangle &= \left[(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\left(\mathrm{Q}'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{\mathrm{Q}(x)}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\left[(x-1)\sqrt{x+1}\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}(x)\sqrt{1-x}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x\\ &\qquad + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{x+1}\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x}_{=-\left\langle \mathrm{P}'\middle|\mathrm{Q}\right\rangle}\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\left\langle f(\mathrm{P})\middle|\mathrm{Q}\right\rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}'(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}\mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}'(x)\,\mathrm{d}x$$

L'expression obtenue étant symétrique en P et Q, on aura donc : $\langle \mathrm{F(P)}|\mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{F(Q)}|\mathrm{P}\rangle$ (réponse B).

Ainsi, l'endomorphisme F_n est-il auto-adjoint pour le produit scalaire considéré ; il résulte alors du cours que ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux, donc que la famille $(\mathrm{J}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est ortho*gonale* pour ce produit scalaire.
Cela implique donc $\left\langle \mathrm{J}_p\middle|\mathrm{J}_q\right\rangle = 0$ pour $p \neq q$, mais pas pour $p = q$: la réponse C est fausse.

De plus, cette famille est orthogonale, mais pas ortho*normale*, comme on le verra à la question suivante..., la réponse D est donc fausse également.

Q7 : Réponse B

---

8. J_0 est le polynôme unitaire associé à la valeur propre 0 de F, donc $\mathrm{J}_0 = 1$.
On a $\left\|\mathrm{J}_0\right\|^2 = \left\langle \mathrm{J}_0\middle|\mathrm{J}_0\right\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$. En effectuant dans cette intégrale le changement de variable $x = \cos t$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, on obtient :

$$\left\|\mathrm{J}_0\right\|^2 = \int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

(puisque $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$, $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ et $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$), de sorte que $\left\|\mathrm{J}_0\right\| = \sqrt{\pi}$. En conclusion :

Q8 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

9. A. Si, pour $t \in]-1,1[$ on pose $t = \cos 2\theta$ avec $\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,cos} t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a, par le même calcul que ci-dessus, $\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} = \tan\theta$ donc $\operatorname{Arc\,tan}\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} = \theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,cos} t$.

L'application $t \mapsto \operatorname{Arc\,tan}\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ est donc bien un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puisque la fonction Arc cos réalise d'après le cours un $\mathscr{C}^\infty$-difféomophisme entre $]-1,1[$ et $]0,\pi[$.

B.C.D. On effectue dans l'intégrale I_n, qui est convergente, le changement de variable ci-dessus, qui conduira nécessairement à une intégrale encore convergente :

$$I_n = \int_{-1}^{1} t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos 2\theta)^n \tan\theta(-2\sin 2\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta)^n(2\sin^2\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta)^n(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

soit encore $I_n = 2(K_n - K_{n+1})$.

Q9 : Réponses A,D

---

10. Le calcul des intégrales K_n (qui ressemblent aux célèbres *intégrales de Wallis*) est classique. On effectue une intégration par parties, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta)^n\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos 2\theta)^{n-1}}_{u(\theta)}\underbrace{\cos 2\theta}_{v'(\theta)}\,d\theta \\
&= \underbrace{\left[(\cos 2\theta)^{n-1}\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta(\cos 2\theta)^{n-2}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 2\theta)(\cos 2\theta)^{n-2}\,d\theta = (n-1)(K_{n-2} - K_n)
\end{aligned}$$

ce qui conduit à la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2\ ,\ K_n = \frac{n-1}{n}K_{n-2}$$

On calcule alors $K_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $K_1 = 0$. D'où immédiatement $K_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned}
K_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}K_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}K_{2p-4} = \ldots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2}K_0 \\
&= \frac{(2p)!}{\left[(2p)(2p-2)\cdots 2\right]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ce qui est la réponse B.

On a ensuite, grâce à la question 9 :

$$I_{2p} = 2(K_{2p} - K_{2p+1}) = 2K_{2p} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = 2(K_{2p+1} - K_{2p+2}) = -2K_{2p+2}$$

donc aucune des réponses C ni D n'est exacte (il manque le signe - pour I_{2p+1} dans la réponse D).

Q10 : Réponse B

---

11. A. est exacte, par définition du produit scalaire (elle est d'ailleurs vérifiée pour tous les entiers i et j, pas seulement ceux compris entre 0 et n).

B.C. Si on reprend les résultats de la question 5, on a $J_1 = X + \dfrac{1}{2}$. Donc

$$\left\|J_1\right\|^2 = \langle J_1 | J_1\rangle = \langle X|X\rangle + 2\left\langle X\middle|\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right\rangle = I_2 + I_1 + \frac{1}{4}I_0$$

Les formules établies ci-dessus donnent $I_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ et $I_0 = \pi$, donc $\left\|J_1\right\|^2 = \dfrac{\pi}{4}$: la réponse C est exacte.

De plus, $I_2 + \dfrac{\left\|J_0\right\|^2}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ donc la réponse B est fausse.

D. On avait trouvé : $J_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ donc, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\left\|J_2\right\|^2 = \langle J_2 | J_2\rangle &= \left\langle X^2 \middle| X^2\right\rangle + \frac{1}{4}\langle X|X\rangle + \frac{1}{16}\langle 1|1\rangle + 2\left\langle X^2 \middle| \frac{1}{2}X\right\rangle + 2\left\langle X^2 \middle| -\frac{1}{4}\right\rangle + 2\left\langle \frac{1}{2}X \middle| -\frac{1}{4}\right\rangle \\ &= I_4 + \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{16}I_0 + I_3 - \frac{1}{2}I_2 - \frac{1}{4}I_1\end{aligned}$$

On a, toujours avec les formules de la question 10 : $I_3 = -I_4$ et $I_2 = -I_1$, de sorte que $\left\|J_2\right\|^2 = \frac{\pi}{16}$ et $\left\|J_2\right\| = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Q11 : Réponses A,C

---

12. A. On peut écrire $X^n = J_n + Q$, avec $\deg Q \leqslant n-1$. Q peut donc s'écrire comme combinaison linéaire de $J_{n-1}, \dots, J_1, J_0$ et, puisque $\langle J_n | J_k\rangle = 0$ pour $k \neq n$, on aura $\langle Q | J_n\rangle = 0$.
Par suite, $\langle X^n | J_n\rangle = \langle J_n | J_n\rangle + \langle Q | J_n\rangle = \langle J_n | J_n\rangle$.

B.C. On a vu à la question 5 : $J_{n+1} = X^{n+1} + \frac{1}{2}X^n + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-1$.

Donc $\left\langle J_n \middle| X^{n+1}\right\rangle = \underbrace{\langle J_{n+1} | J_n\rangle}_{=0} - \frac{1}{2}\langle X^n | J_n\rangle - \underbrace{\langle J_n | Q\rangle}_{=0} = -\frac{1}{2}\langle J_n | J_n\rangle$. Aucune des deux réponses n'est exacte.

D. Même principe : on a vu : $J_{n+2} = X^{n+2} + \frac{1}{2}X^{n+1} - \frac{n+1}{4}X^n + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-1$. Donc

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle J_n | J_{n+2}\rangle}_{=0} &= \left\langle X^{n+2} \middle| J_n\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle X^{n+1} \middle| J_n\right\rangle - \frac{n+1}{4}\langle J_n | X^n\rangle + \underbrace{\langle J_n | Q\rangle}_{=0} \\ &= \left\langle X^{n+2} \middle| J_n\right\rangle - \frac{1}{4}\langle J_n | J_n\rangle - \frac{n+1}{4}\langle J_n | J_n\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne $\left\langle X^{n+2} \middle| J_n\right\rangle = \frac{n+2}{4}\langle J_n | J_n\rangle$.

Q12 : Réponses A,D

---

13. Puisque $J_{n+1} = X^{n+1} + \frac{1}{2}X^n + \dots$ et $J_n = X^n + \frac{1}{2}X^{n-1} + \dots$, on a $J_{n+1} = XJ_n + Q$ où $\deg Q \leqslant n-1$.
Puisque $\langle J_{n+1} | Q\rangle = 0$, on aura (en utilisant les résultats de la question précédente)

$$\begin{aligned}\langle J_{n+1} | J_{n+1}\rangle = \langle XJ_n | J_{n+1}\rangle = \langle J_n | XJ_{n+1}\rangle &= \left\langle J_n \middle| X^{n+2} + \frac{1}{2}X^{n+1} - \frac{n}{4}X^n + \dots\right\rangle \\ &= \left\langle J_n \middle| X^{n+2}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle J_n \middle| X^{n+1}\right\rangle - \frac{n}{4}\langle J_n | X^n\rangle + 0 \\ &= \frac{n+2}{4}\langle J_n | J_n\rangle - \frac{1}{4}\langle J_n | J_n\rangle - \frac{n}{4}\langle J_n | J_n\rangle = \frac{1}{4}\langle J_n | J_n\rangle\end{aligned}$$

La bonne relation de récurrence est donc : $x_{n+1} = \frac{x_n}{4}$. On en déduit, pour tout n, $x_n = \frac{x_0}{4^n} = \frac{\pi}{4^n}$ et finalement : $\left\|J_n\right\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$.

Q13 : Réponse C

PARTIE II

14. On a $f^2 - a\mathrm{Id}_E - b\mathrm{Id}_E + ab\mathrm{Id}_E = a^2p + b^2q - a(ap+bq) - b(ap+bp) + ab\mathrm{Id}_E = -ab(p+q) + ab\mathrm{Id}_E = 0$, d'où la relation $(f - a\mathrm{Id}_E)\circ(f - b\mathrm{Id}_E) = 0$, valable pour tous a et b réels.

Le polynôme $(X-a)(X-b)$ est donc annulateur de f ; lorsque $a \neq b$, il est scindé *à racines simples* (ce qui ne figure pas dans la réponse C) donc f est diagonalisable.

Q14 : Réponse D

---

15. A.B. Si $s = \mathrm{Id}_E - r$ alors $ros = r\circ(\mathrm{Id}_E - r) = r - r^2$ et $sor = (\mathrm{Id}_E - r)\circ r = r - r^2$, donc $r\circ s = s\circ r$. C'est la réponse A. Il n'y a cependant aucune raison pour que l'on ait $r\circ s = 0$! (considérer par exemple $r = 2\mathrm{Id}_E$ et $s = -\mathrm{Id}_E$).

C.D. D'après la question ci-dessus, on a ici $p\circ q = q\circ p$ donc $f^2 = (ap+bq)^2 = a^2p^2 + b^2q^2 + 2ab p\circ q$, et l'égalité $f^2 = a^2p + b^2q$ implique

$$a^2(p^2 - p) + b^2(q^2 - q) + 2ab p\circ q = 0$$

puis, compte tenu de $p^2 - p = p(p - \mathrm{Id}_E) = -p\circ q$ et $q^2 - q = q\circ(q - \mathrm{Id}_E) = -q\circ p$, on obtient

$$(-a^2 - b^2 + 2ab)p\circ q = 0 \quad \text{soit} \quad (a-b)^2 p\circ q = 0$$

C'est la réponse C, mais, si $a = b$, il n'y a aucune raison que $p\circ q$ soit nul (prendre par exemple $a = b = 1$).

Q15 : Réponses A,C

---

16. A. Fantaisiste : prendre par exemple $s = 2\mathrm{Id}_E$ et $r = \mathrm{Id}_E$.

B. Fantaisiste : prendre par exemple $r = 0$ et s quelconque.

C. Fantaisiste : prendre par exemple $r = 0$ et $s = \mathrm{Id}_E$.

D. Si $a \neq b$, la question précédente implique $p\circ q = 0$. La réponse de la question D est donc automatiquement fausse !

Cependant, il est vrai que p et q sont alors des projecteurs : en effet, on a la relation $p\circ(\mathrm{Id}_E - p) = p\circ q = 0$ soit $p^2 = p$ (idem pour q).

Q16 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

17. A. On a vu que $(X-a)(X-b)$ est un polynôme annulateur de f, donc, d'après le cours, le spectre de f est *inclus* dans l'ensemble des racines de ce polynôme , c'est-à-dire dans $\{a,b\}$. Il n'y a aucune raison a priori pour qu'il soit *égal* à $\{a,b\}$. Cependant, si l'un des nombres complexes a ou b n'était pas valeur propre de f, f admettrait une seule valeur propre , par exemple a, et, étant diagonalisable, serait égal à $a\mathrm{Id}_E$.

On aurait alors $f = ap + bq = a\mathrm{Id}_E = a(p+q)$ d'où $bq = aq$ d'où $a = b$ puisque l'énoncé suppose $q \neq 0$; ce cas est exclu, donc, en réalité, on a exactement $\mathrm{Sp} f = \{a,b\}$ et la réponse A est fausse.

B. On a $f = ap + bq$ donc $f - a\mathrm{Id}_E = (a-b)(p - \mathrm{Id}_E)$. Puisque $a - b \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$, d'après une propriété classique des projecteurs : la réponse B est donc inexacte.

C.D. On vient de voir que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ donc p est un projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$. La réponse C est donc inexacte, et il en est de même de la réponse D.

Rem : ces deux réponses eussent été exactes en échangeant les rôles de a et b. Est-ce une erreur d'énoncé ?...

Q17 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

18. A.B.C. E étant de dimension finie, on a les équivalences :

$$f \text{ autorphisme} \Longleftrightarrow f \text{ injectif} \Longleftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

Puisque le spectre de f est exactement égal à $\{a,b\}$, cela équivaut à $ab \neq 0$: réponse B.

D. On pourrait faire ici une démonstration par récurrence, mais on peut aussi utiliser les matrices.
En effet, puisque $a \neq b$, f est diagonalisable, donc sa matrice dans une certaine base $\mathscr{B}$ est $\operatorname{diag}(a,\dots,a,b,\dots,b)$ (avec un abus d'écriture, car il se peut que a ou b ne figure pas dans la liste).
On a vu que $p = \dfrac{1}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ donc la matrice de p dans $\mathscr{B}$ est $\operatorname{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$ et de même celle de q est $\operatorname{diag}(0,\dots,0,1,\dots,1)$.
Puisque la matrice de f^m dans $\mathscr{B}$ est $\operatorname{diag}(a^m,\dots,a^m,b^m,\dots,b^m)$, la relation $f^m = a^m p + b^m q$ est alors immédiate.

Q18 : Réponses B,D

---

19. C.D. Par définition, F est l'ensemble des combinaisons linéaires de p et q, c'est donc le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par $\{p,q\}$, et c'est en particulier un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 2.
Les deux réponses C et D sont donc inexactes.

A. Puisque $(\mathrm{F},+,.)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, pour montrer qu'il s'agit d'un sous-anneau, il ne reste plus qu'à vérifier :
- $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$: cela est vrai en prenant $x = y = 1$.
- si f, g appartiennent à F, alors $f \circ g$ appartient à F : cela est vrai comme le montre un calcul simple, puisque, d'après l'hypothèse faite à la question 17 et le résultat de la question 15, on a $p \circ q = 0$ et que l'on a établi, à la question 16, que p et q sont des projecteurs (donc $p^2 = p \in \mathrm{F}$ et $q^2 = q \in \mathrm{F}$).

B. Cependant F n'est pas un corps : en effet, puisque p et q sont des projecteurs différents de Id_{E} (par hypothèse faite dans l'énoncé), ils ne sont pas inversibles.

Q19 : Réponse A

---

20. Un élément $xp + yq$ de F est un projecteur si et seulement si $(xp+yq)^2 = xp + yq$ ce qui équivaut, compte tenu de $p \circ q = q \circ p = 0$ et de $p^2 = p$, $q^2 = q$, à $x^2 p + y^2 q = xp + yq$.
Cela équivaut à $x^2 = x$ et $y^2 = y$ lorsque (p,q) est libre. Montrons que cela est le cas : q étant non nul, dire que la famille (p,q) est liée s'écrit : $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tq $p = \alpha q$. On aurait alors $p = p^2 = \alpha^2 q^2 = \alpha^2 q$ d'où $\alpha = \alpha^2$ c'est-à-dire $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Ces deux cas sont exclus car $p \neq 0$ et $p + q = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Ainsi, la famille (p,q) est bien libre, et ce sera une base de F : les réponses C et D sont exactes.

Q20 : Réponses C,D

---

21. Comme il est dit dans les quatre réponses proposées, on cherche les solutions de l'équation $g^2 = f$ dans F, donc on cherche g sous la forme $g = xp + yq$ avec $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

L'équation $g^2 = f$ s'écrit alors $x^2 p + y^2 q = ap + bq$. Pour que g soit solution, il faut et il suffit que $x^2 = a$ et que $y^2 = b$, puisque la famille (p,q) est libre.

Puisque on travaille ici dans $\mathbb{C}$, le signe de a et b importe peu et la réponse A est inexacte.

Le cas $a = b = 0$ étant exclu par l'énoncé (on a supposé $a \neq b$ dès la question 17), il y aura deux solutions dans $\mathbb{C}$ à au moins l'une de ces équations, donc au moins deux solutions à l'équation dans F (réponse B).
Il n'y en a pas forcément quatre : prendre l'exemple $a = 1$ et $b = 0$ avec p projecteur quelconque : la réponse C est inexacte.

Enfin, si on suppose a et b non nuls, puisqu'ils sont distincts, il y aura bien quatre solutions distinctes (x,y) dans $\mathbb{C}^2$, ce qui donnera bien quatre solutions distinctes dans F puisque la famille (p,q) est libre.

Q21 : Réponses B,D

---

22. A.B. On vérifie facilement que $\mathrm{U}^2 = 3\mathrm{U}$. Donc $\mathrm{U}^{n+2} = \mathrm{U}^2\mathrm{U}^n = 3\mathrm{U}.\mathrm{U}^n = 3\mathrm{U}^{n+1}$ (réponse A fausse) et par récurrence $\mathrm{U}^n = 3^{n-1}\mathrm{U}$ pour tout entier naturel n non nul. Cette relation est inexacte pour $n = 0$ (car $\mathrm{U}^0 = \mathrm{I}_3$), donc la réponse B doit être considérée comme fausse (à moins qu'il ne s'agisse d'une erreur d'énoncé...)

C.D. On a $\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{U}$ donc la formule du binôme donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{U}^k \\
&= \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{U}^k = \mathrm{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) \mathrm{U} \\
&= \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k \right) \mathrm{U} = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) \mathrm{U} \\
&= \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)\mathrm{U}
\end{aligned}$$

En conclusion, aucune des réponses C ni D n'est exacte (sans faire de calcul, il était facile de s'en rendre compte immédiatement en faisant $n = 0$ ou $n = 1$!).

Q22 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

23. On peut chercher une telle matrice B sous la forme $\mathrm{B} = a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{U}$. L'égalité $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$ équivaut alors à

$$a^2 \mathrm{I}_3 + (2ab + 3b^2)\mathrm{U} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{U} \quad \text{soit} \quad a^2 = 1 \text{ et } 2ab + 3b^2 = 1$$

la famille $(\mathrm{I}_3, \mathrm{U})$ étant libre.

Le choix de $a = 1$ donne alors $3b^2 + 2b - 1 = 0$ soit $b = -1$ ou $b = \dfrac{1}{3}$, ce qui donne $\mathrm{B} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{U}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{I}_3 + \dfrac{1}{3}\mathrm{U}$. Le choix de $a = -1$ donne bien sûr les opposées de ces matrices.

Aucune des réponses proposées par l'énoncé ne convient.

Q23 : Réponse E (pas de réponse exacte)

PARTIE III

24. A.B f_n est évidemment continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. Elle n'y est pas intégrable puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = +\infty$.
Cependant, l'affirmation de la réponse B : « $\forall t \geqslant 0$, $f_n(t) \geqslant 1$ » (qui, effectivement, implique la non-intégrabilité de f_n) n'est pas immédiate ! A l'aide d'une calculatrice il est facile de vérifier que cette propriété est fausse dès que $n \geqslant 3$, donc l'argument de la réponse B est inexact.

C.D φ_n est la primitive de f_n s'annulant en 0. On a donc $\varphi_n'(t) = f_n(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$; φ_n est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $[\varphi_n(0), \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_n(t)[= \mathbb{R}_+$ et dont la dérivée ne s'annule pas : c'est bien un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Q24 : Réponse D

---

25. Avec les notations de l'énoncé, on a $f_n'(t) = \mathrm{e}^t \dfrac{\mathrm{N}(t)}{(1+t^n)^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc f_n' est du signe de N. De plus, $\mathrm{N}'(t) = nt^{n-2}(t - (n-1))$, on a donc facilement le tableau de variations suivant :

t	0		1		$n-1$		n		$+\infty$
$\mathrm{N}(t)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\searrow$	$1-(n-1)^{n-1}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ce qui permet de justifier la réponse C par le théorème des valeurs intermédiaires et d'en déduire le signe de f_n'.

La réponse D. est fausse : les sens de variations sont inversés !

Q25 : Réponse C

---

26. $\alpha_n \in]0,1[$ et α_n vérifie $\mathrm{N}(\alpha_n)=0$ soit $1+\alpha_n^n - n\alpha_n^{n-1}=0$ ou encore $\alpha_n^{n-1} = \dfrac{1}{n-\alpha_n}$.

Donc $\dfrac{1}{n} < \alpha_n^{n-1} < \dfrac{1}{n-1}$, ce qui implique $\alpha_n^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: les réponses A et B sont fausses.

L'équivalent obtenu ci-dessus peut aussi s'écrire : $\alpha_n^{n-1} = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'où

$$(n-1)\ln\alpha_n = \ln\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1+\mathrm{o}(1)) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{o}(1)$$

ce qui conduit à la réponse C.

La réponse D est inexacte : il faut rajouter la condition :« u_n et v_n *ne tendent pas vers* 1 » pour pouvoir affirmer que $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Q26 : Réponse C

---

27. A.B. On a vu que l'on a le tableau de variations suivants pour f_n :

t	0		α_n		1		$n-1$		β_n		n		$+\infty$
$f_n(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On a donc $0 < f_n(\beta_n) \leqslant \max(f_n(n-1), f_n(n))$. Or $f_n(n) = \dfrac{\mathrm{e}^n}{1+n^n} \sim \left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et de même $f_n(n-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On aura donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\beta_n) = 0$.

C.D. D'après la question précédente, $\ln(\alpha_n) \sim -\dfrac{\ln n}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

Or $f_n(\alpha_n) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha_n}}{1+\alpha_n^n}$ et $\alpha_n^n = \alpha_n^{n-1}\alpha_n \sim \alpha_n^{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ donc on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = \mathrm{e}$.

Q27 : Réponses A,D

---

28. On a facilement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si} \quad t\in[0,1[\\ \dfrac{e}{2} & \text{si} \quad t=1 \\ 0 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$$

donc :

Q28 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

29. La fonction g, limite simple de la suite (f_n) existe : c'est celle obtenue ci-dessus.

Pour tout $t \geqslant 0$: $f_{n+1}(t) - f_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t(t^n - t^{n+1})}{(1+t^n)(1+t^{n+1})}$ donc est du signe de $1-t$. Ainsi, pour $t\in[0,1[$, $f_{n+1}(t) \geqslant f_n(t)$: le graphe de f_{n+1} est en-dessus de celui de f_n sur $[0,1]$ (et au-dessous pour $t>1$) : c'est la réponse B.

Pour $t\in[0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n\geqslant 0}$ est croissante comme le montre le calcul ci-dessus, on aura donc aussi : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1], f_n(t) \leqslant g(t)$, c'est-à-dire que le graphe de f_n sera en-dessous de celui de g (et au-dessus pour $t>1$). C'est ce qui est indiqué dans la réponse C ; néanmoins, celle-ci est inexacte car les deux graphes se coupent en deux points : celui d'abscisse 0 et celui d'abscisse 1.

Q29 : Réponse B

---

30. A.C. La suite de fonctions (f_n), continues sur I, convergeant simplement vers g discontinue, la convergence ne peut pas être uniforme.

B. Fantaisiste : les notions de convergences absolue et normale ne sont définies que pour les *séries* de fonctions.

D. Pour $t \in [0, a]$ avec $0 < a < 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant g(t) - f_n(t) = \mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} = \frac{\mathrm{e}^t t^n}{1+t^n} \leqslant \mathrm{e}a^n$$

donc $\left\|g - f_n\right\|_\infty^{[0,a]} \leqslant ea^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela signifie qu'il y a convergence uniforme sur le segment $[0, a]$.

Q30 : Réponses C,D

---

31. Puisqu'il n'y a pas convergence uniforme, on peut d'emblée affirmer que C est fausse.

Par contre on peut applique à la suite de fonctions (f_n) le théorème de convergence dominée, exactement comme il est fort gentiment expliqué dans l'énoncé ; ce théorème permet d'écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{A}} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne facilement le résultat de la réponse C (car si $\mathrm{A} > 1$, $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} g = \int_0^1 g$, $g(t)$ étant nul pour $t > 1$.)

Q31 : Réponses B,D

---

32. Cf. question 24.D.

Q32 : Réponse A

---

33. On a simplement $x_n = \varphi_n^{-1}$. φ_n étant un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de I sur I, strictement croissant, il en est de même de x_n.

Q33 : Réponse B

---

34. Pour la raison indiquée ci-dessus :

Q34 : Réponse C

---

35. D'après la formule sur la dérivée d'une fonction réciproque, on a $x_n' = \dfrac{1}{\varphi_n' \circ \varphi_n^{-1}} = \dfrac{1}{\varphi_n' \circ x_n}$. Puisque $\varphi_n' = f_n$ on a :

Q35 : Réponse B

---

36. A.B. En dérivant la relation : $\forall \alpha \in \mathrm{I}$, $x_n'(\alpha) = \dfrac{1}{f_n(x_n(\alpha))}$, on trouve immédiatement la formule de la réponse A.

C.D. Il en résulte que x_n'' s'annule et change de signe aux points α tels que $f_n'(x_n(\alpha))$ en fait de même, c'est-à-dire lorsque $x_n(\alpha) \in \{\alpha_n, \beta_n\}$, soit $\alpha \in \left\{x_n^{-1}(\alpha_n), x_n^{-1}(\beta_n)\right\}$, et puisque $x_n^{-1} = \varphi_n$ on conclut :

Q36 : Réponses A,C

---

37. *Rem : on supposera ici qu'il y a une erreur d'énoncé et qu'il faut lire* $(-1)^{k+1}$ *et non* $(-1)^{n+1}$ *dans la définition de la série...*

On sépare les termes d'indices pairs et impairs dans la 1ère série :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

ce qui permet d'obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Puis on sépare, dans la série (convergente) donnée, les termes d'indices pair et impairs :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}$$

Q37 : Réponse B

---

38. Soit x réel strictement positif fixé. Posons $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1} t^{kx}}{k}$.

Pour $t \in [0,1]$, la suite (u_k) est alternée ; on a $\left|u_k\right| \leqslant \dfrac{1}{k}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$; enfin, la suite $(\left|u_k\right|)$ est décroissante puisque $\dfrac{\left|u_{k+1}\right|}{\left|u_k\right|} = \dfrac{k}{k+1} t^x < 1$.

La série de l'énoncé vérifie donc le critère spécial sur les séries alternées. En particulier, on a la majoration du reste $\left|\mathrm{R}_k\right| \leqslant \left|u_{k+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui donne $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|\mathrm{R}_k\right\|_\infty^{[0,1]} = 0$. La série est donc uniformément convergente sur $[0,1]$, d'où la réponse B (il n'y a pas de raison de se limiter à l'intervalle ouvert $]0,1[$).

La réponse C est également exacte : en effet, pour $t \in [0,1[$, $\left|u_k\right| = \dfrac{(t^x)^k}{k} \leqslant (t^x)^k$, et $(t^x)^k$ est le terme général d'une série géométrique de raison $t^x < 1$ donc convergente.

Enfin, il y a évidemment divergence grossière pour $t > 1$ donc la réponse D est fausse.

Q38 : Réponses B,C

---

39. On connaît le développement en série entière :

$$\forall z \in]-1,1[\ ,\ \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$$

et on sait aussi que cette formule reste vraie pour $z = 1$.
On peut donc écrire pour tout $t \in [0,1]$

$$\ln(1+t^x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{kx}}{k}$$

.
Puisqu'il y a convergence uniforme de la série précédente sur $[0,1]$ donc sur $[\alpha,1]$, on peut l'intégrer terme à terme, ce qui donne

$$u(x) = x\int_\alpha^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\int_\alpha^1 t^{kx}\,\mathrm{d}t = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(kx+1)}\left[1-\alpha^{kx+1}\right]$$

Ce résultat correspond à la réponse A.

La réponse C est également exacte : la justification est très clairement donnée par l'énoncé !

Q39 : Réponses A,C

---

40. A.B. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{k(kx+1)} = \dfrac{1}{k^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^{kx+1} = 0$ puisque $\alpha \in]0,1[$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v_k(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Puisque la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 1} v_k(x)$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$, on peut utiliser le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} v_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

C.D. Nous allons démontrer que la réponse C est exacte.

Cependant, je n'ai pas réussi à voir le lien entre cette question et les précédentes... Peut-être n'y en a t-il aucun... Si quelqu'un a une idée, je suis preneur !

Soit $\alpha > \mathrm{e}-1$. Par définition, $\displaystyle\int_0^{x_n(\alpha)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \alpha$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t < \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}-1$ donc $\displaystyle\int_1^{x_n(\alpha)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t > \alpha-(\mathrm{e}-1) > 0$. Il en résulte en particulier $x_n(\alpha) > 1$.

On a alors :

$$\int_1^{x_n(\alpha)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{x_n(\alpha)} \int_1^{x_n(\alpha)} \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \mathrm{e}^{x_n(\alpha)} \frac{1-x_n(\alpha)^{1-n}}{n-1} < \frac{\mathrm{e}^{x_n(\alpha)}}{n-1}$$

d'où $\mathrm{e}^{x_n(\alpha)} > (n-1)(\alpha-(\mathrm{e}-1))$ puis $x_n(\alpha) > \ln(n-1)+\ln(\alpha-(\mathrm{e}-1))$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(\alpha) = +\infty$.

Q40 : Réponses B,C

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆