

# CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2007

## PARTIE I

1. Directement d'après le cours sur l'expression analytique d'une application linéaire :

Q1 : Réponse C

2. A. La réponse est exacte : le rang d'une matrice est toujours inférieur ou égal au nombre de ses lignes et colonnes.  
 B. Un rapide calcul donne  $\det M = 1$ , donc  $M$  est inversible, donc de rang 3.  
 C. Le rang est 3, mais la raison invoquée est fantaisiste : prendre l'exemple d'une matrice dont toutes les colonnes sont égales...

Q2 : Réponse A

3. A. C'est évidemment faux !  
 B.  $M$  est effectivement triangulaire inférieure par blocs : il y a le bloc  $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$  en haut à gauche, et le bloc  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  en bas à droite.  
 C. Déjà justifié dans la question précédente.  
 D.  $M$  est effectivement inversible, mais cela n'a rien à voir avec sa trace. Il est facile de trouver une matrice de trace non nulle et inversible, ou une matrice de trace nulle et non inversible !

Q3 : Réponses B,C

4. On commence par faire le calcul :  $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$ .  
 A.  $\chi_M$  est bien de degré 3, mais la raison invoquée est fautive : d'une manière générale, le degré du polynôme caractéristique est égal à la taille de la matrice.  
 B. 1 est bien racine, et la raison donnée est exacte : prendre la valeur d'un polynôme en 1 revient à faire la somme de ses coefficients.  
 C. Effectivement,  $\chi_M$  n'est pas divisible par  $\lambda$ , sinon son coefficient constant serait nul, mais ce coefficient constant, c'est le déterminant, pas la trace !  
 D. Réponse fautive compte tenu du calcul précédent.

Q4 : Réponse B

5. A. D'après le cours, l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est seulement *inclus* dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur.  
 B. D'après le cours, directement par définition d'une valeur propre, 0 est valeur propre d'un endomorphisme  $f$  si et seulement si  $f$  est non injectif. Ce n'est pas le cas ici.  
 C. D.  $\chi_f(\lambda) = (1-\lambda)^3$  : 1 est valeur propre triple.

Q5 : Réponses B,D

6. A. Si  $M$  était diagonalisable, admettant 1 pour seule valeur propre, elle serait semblable à la matrice identité, donc égale à  $I$  (car  $P^{-1}IP = I$ ). Ce n'est pas le cas.  
 B. Il n'y a, de toutes façons, aucun rapport entre le fait d'être diagonalisable et celui d'être bijectif.

- C. Effectivement, une matrice dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé n'est pas trigonalisable (et a fortiori pas diagonalisable). Mais ce n'est pas le cas ici.
- D. On a déjà dit que  $f$  n'était pas diagonalisable, donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ne peut être égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre. On a donc forcément, et sans calcul,  $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) < 3$ .  
Le polynôme caractéristique de  $f$  étant scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $f$  est trigonalisable : c'est un théorème du cours.

**Q6 : Réponses A,D**

7. A.  $f$  est injectif, donc son noyau est réduit à  $\{0\}$ .
- B. Si  $v$  vérifie  $f(v) = \lambda v$ , c'est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  seulement *s'il est non nul* ! (piège...)
- C.  $-1$  n'étant pas valeur propre, il n'y a même pas de calcul à faire.
- D. Le plan d'équation  $-2x + 2y + z = 1$  est un plan *affine*, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , il n'y a donc même pas besoin de faire de calcul pour dire que l'affirmation est fausse.

**Q7 : Réponse E (pas de bonne réponse)**

8. A. Si  $f$  a pour matrice  $N$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ , on a  $f(u_1) = u_1$  et  $f(u_2) = u_2$  donc  $(f - \text{Id})(u_1) = (f - \text{Id})(u_2) = 0$ . Donc  $u_1$  et  $u_2$  appartiennent à  $\text{Ker}(f - \text{Id})$ ; cet espace étant de dimension strictement inférieure à 3, ils en forment une base.
- B. La matrice de  $f - \text{Id}$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$  est  $N - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on voit qu'elle est de rang 1.
- C. L'image de  $f - \text{Id}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs colonnes de la matrice précédente, c'est donc bien la droite vectorielle engendrée par  $u_2$ .
- D. Toujours à l'aide de la matrice ci-dessus, on vérifie facilement que  $(f - \text{Id})^2 = 0$ .

**Q8 : Réponses A,C**

9. A.B  $M - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ ; toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles à la troisième.
- L'image de  $f - \text{Id}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs dont les coordonnées dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  sont les colonnes de  $M - I$ . On peut donc choisir comme base de ce sous-espace vectoriel le vecteur  $u_2 = e_2 - 2e_3$ .
- C.D Pour trouver une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire de  $\text{Ker}(f - \text{Id})$ , on peut chercher les vecteurs  $u$  de coordonnées  $(a, b, c)$  tels que  $(f - \text{Id})(u) = 0$ , donc résoudre le système  $(M - I) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$ . On trouve le plan d'équation  $-2a + 2b + c = 0$ , et il ne reste plus qu'à donner une base  $(u_1, u_2)$  de ce plan.
- On pouvait aussi se contenter de vérifier que les vecteurs donnés dans la réponse D. sont bien linéairement indépendants et invariants par  $f$ , ce qui n'est pas le cas de ceux donnés dans la réponse C.

**Q9 : Réponses B,D**

10.  $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & c \end{vmatrix} = -2a + 2b + c$

**Q10 : Réponse E (pas de bonne réponse)**

11. Pour que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  considérée à la question 10 soit une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est égale à  $N$ , il faut et il suffit que

- Ce soit une base de  $\mathbb{R}^3$  (1)
- et que  $f(u_3) = u_2 + u_3$  (2) (les conditions  $f(u_1) = u_1$  et  $f(u_2) = u_2$  ayant déjà été vérifiées).

La condition (1) s'écrit  $-2a + 2b + c \neq 0$ , d'après le calcul fait à la question 10.

La condition (2) conduit au système  $M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1+b \\ -2+c \end{pmatrix}$ , qui équivaut à  $-2a + 2b + c = 1$  (tiens!...)

Finalement, et en lisant bien les questions :

**Q11 : Réponse D**

12. On vient de voir que la matrice de  $f$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $M$ , et que sa matrice dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$  est  $N$ .  $M$  et  $N$  sont donc semblables. La justification donnée dans la question B. est fautive : deux matrices de même rang sont équivalentes, pas forcément semblables.

De plus, si  $P$  est la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à la base  $(u_1, u_2, u_3)$ , i.e dont les colonnes sont formées des coordonnées des  $u_j$  en fonction des  $e_i$ , on a d'après le cours :  $N = P^{-1}MP$ .

Finalement :

**Q12 : Réponse D**

13. A.B  $N = P^{-1}MP$  donc  $N - I = P^{-1}(M - I)P$  :  $N - I$  et  $M - I$  sont donc semblables; puisque  $(N - I)^2 = 0$ , on a donc aussi  $(M - I)^2 = 0$ .

C.D Pour que l'on puisse appliquer la formule du binôme pour calculer  $(A + B)^n$ , il suffit que  $A$  et  $B$  commutent! Mais la condition n'est pas nécessaire (par exemple, on peut toujours l'appliquer pour  $n = 1$ , même si  $A$  et  $B$  ne commutent pas!). La justification « il faut que les matrices  $A$  et  $B$  commutent » est donc fautive.

**Q13 : Réponse A**

14. En écrivant  $M = I + (M - I)$ , puisque  $I$  et  $M - I$  commutent, on aura

$$M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (M - I)^k = I + n(M - I)$$

puisque  $(M - I)^k = 0$  si  $k \geq 2$ . Les deux formules données dans A. et B. sont donc fausses.

Et on a  $\frac{M^n}{n} = \frac{1}{n}I + (M - I)$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{n} = M - I$ .

**Q14 : Réponse C**

## PARTIE II

15. L'équation différentielle (E) est une équation linéaire du second ordre, qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(E) \quad y'' + \frac{3}{x-1}y' + \frac{1}{x(x-1)} = 0$$

Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$  et  $x \mapsto \frac{3}{x-1}$  étant continues sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que :

- l'ensemble des solutions de (E) sur  $] -\infty, 0[$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
- l'ensemble des solutions de (E) sur  $] 0, 1[$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.
- l'ensemble des solutions de (E) sur  $] 1, +\infty[$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

**Q15 : Réponses C,D**

16. Supposons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R > 0$ , solution de (E). On a alors, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ , d'où

$$\sum_{\substack{n \geq 2 \\ n=0}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n=1}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 3 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ce qui donne, pour tout  $n \geq 0$ ,  $[n(n-1) + 3n + 1]a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$ , ou  $(n+1)^2 a_n = n(n+1)a_{n+1}$ , et, puisque  $n+1 \neq 0$  :

$$(n+1)a_n = n a_{n+1}$$

**Q16 : Réponse B**

17. La relation de récurrence précédente donne, pour  $n = 0$ ,  $a_0 = 0$ , et montre que, si  $a_1 = 0$ ,  $f$  est la fonction nulle, et que, si  $a_1 \neq 0$ , les  $a_n$  sont non nuls pour  $n \geq 1$ .

On a dans ce cas :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , donc le rayon de convergence de la série entière est égal à 1 (d'après la règle de d'Alembert). C'est la réponse C.

*Cependant* : ce qui précède ne vaut que pour une solution *non nulle* ! Or l'énoncé ne précise pas que l'on considère une solution non nulle...

**Q17 : Réponse C (ou E ?)**

18. C'est du cours :

**Q18 : Réponses B,D**

19. La relation de récurrence obtenue à la question 16 donne  $a_0 = 0$  et s'écrit  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$  pour  $n \geq 1$ , d'où, pour tout  $n$  :  $a_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} a_1 = n a_1$ .

**Q19 : Réponse A**

20. On a donc, pour  $|x| < 1$ ,  $f(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = a_1 x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = a_1 \frac{x}{(1-x)^2}$ .

**Q20 : Réponse D**

21. La fonction  $y_0 : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$  vérifie, d'après les calculs précédents, la relation  $x(x-1)y_0''(x) + 3xy_0'(x) + y_0(x) = 0$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Le calcul formel de la dérivée étant le même sur tous les intervalles, elle vérifiera également cette relation sur chacun des intervalles  $I_k$ .

**Q21 : Réponse B**

22. C'est la méthode de variation de la constante. Il suffit de calculer :

$$y' = z'y_0 + zy'_0, \quad y'' = z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0, \text{ donc}$$

$$y \text{ vérifie (E)} \iff x(x-1)[z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0] + 3x[z'y_0 + zy'_0] + zy_0 = 0 \iff x(x-1)z''y_0 + [2x(x-1)y'_0 + 3xy_0]z' = 0$$

compte tenu de la relation  $x(x-1)y''_0 + 3xy'_0 + y_0 = 0$ .

En divisant par  $x(x-1)y_0$ , on obtient la relation  $z'' + \left[2\frac{y'_0}{y_0} + \frac{3}{x-1}\right]z' = 0$ , ce qui est la réponse A, et c'est bien une équation linéaire différentielle du premier ordre vérifiée par  $z'$ .

**Q22 : Réponses A,C**

23. Un peu de calcul donne  $\frac{y'_0(x)}{y_0(x)} = -\frac{x+1}{x(x-1)}$ , donc la relation précédente devient  $z'' + \frac{x-2}{x(x-1)}z' = 0$ .

Les résultats du cours sur la résolution des équations différentielles linéaire du premier ordre permettent d'écrire :

$$z' = \lambda \exp\left(-\int \frac{x-2}{x(x-1)} dx\right). \text{ Or : } -\int \frac{x-2}{x(x-1)} dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\ln x^2 + \ln|x-1|, \text{ d'où finalement}$$

$$z'(x) = \lambda \frac{x-1}{x^2} \quad \text{avec } \lambda \text{ constante dépendant de l'intervalle } I_k \text{ choisi}$$

De cette relation, on tire

$$z(x) = \lambda \left( \ln|x| + \frac{1}{x} \right) + \mu = \lambda \frac{x \ln|x| + 1}{x} + \mu$$

Finalement :

**Q23 : Réponse E (pas de bonne réponse)**

24. Puisque  $y = zy_0$ , on déduit du calcul précédent :

$$y(x) = \left[ \lambda \frac{x \ln|x| + 1}{x} + \mu \right] \frac{x}{(x-1)^2} = \lambda \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu \frac{x}{(x-1)^2}$$

C'est la réponse B ; dans la réponse D, il manque une valeur absolue.

**Q24 : Réponse B**

25. Par définition, une solution d'une équation différentielle du second ordre doit être au moins deux fois dérivable. Elle est donc nécessairement classe  $\mathcal{C}^1$ , et ses restrictions aux intervalles  $I_k$  sont des solutions sur  $I_k$ , donc appartiennent à  $\mathcal{S}_k$ . La réponse C est donc exacte, et les réponses B et D fausses.

Une telle solution est donc définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ \lambda_2 \frac{x \ln|x| + 1}{(x-1)^2} + \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

On aura alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lambda_1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lambda_2$ . La continuité de  $g$  en 0 équivaut donc à  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

Les fonctions  $x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$  et  $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$  étant dérivables en 0, la fonction  $g$  sera dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si la fonction  $x \mapsto \lambda \frac{x \ln|x|}{(x-1)^2}$  est dérivable en 0, i.e si la fonction  $x \mapsto \lambda x \ln|x|$  l'est, ce qui n'est possible que si  $\lambda = 0$ .

On a donc

$$g(x) = \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad g(x) = \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} \text{ si } x \in ]0, 1[$$

et il est facile de vérifier que les dérivées à droite et à gauche de  $g$  en 0 coïncident si et seulement si  $\mu_1 = \mu_2$ .

En conclusion, les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$  sont les fonctions de la forme :  $x \mapsto \mu \frac{x}{(x-1)^2}$ , ce qui montre que la réponse A est fausse (on pouvait d'ailleurs répondre directement à cette question sans aucun calcul, puisque, d'après la question 21, la fonction  $y_0 : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^2}$  convient !)

**Q25 : Réponse C**

26. Je viens de répondre à cette question ; la réponse A est fausse puisque, après calcul, on a trouvé justement  $a = 0$  ; la réponse B est fausse puisque, après calcul, on a trouvé justement  $b = c$  (mais  $\lambda = g(0)$  est exact). Enfin, dans la réponse D, il y a  $(x+1)^2$  au lieu de  $(x-1)^2$ ...

**Q26 : Réponse C**

27. Cette question a elle aussi été traitée :

**Q27 : Réponse A**

28. Pour les mêmes raisons que celles exposées dans la question 25, une solution  $h$  sur  $]0, +\infty[$  doit être de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce qui permet d'éliminer les réponses B, C et D.

Malheureusement, on ne peut pas répondre à la question A sans faire quelques calculs...

Pour  $x > 0$ ,  $|x| = x$  donc une solution  $h$  sur  $]0, +\infty[$  doit être de la forme :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln x + 1}{(x-1)^2} + \mu_1 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ \lambda_2 \frac{x \ln x + 1}{(x-1)^2} + \mu_2 \frac{x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

Puisque  $\frac{x \ln |x| + 1}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$  et que  $\frac{x}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)^2}$ , l'existence de limites à droite et à gauche en 0 exige  $\mu_1 = -\lambda_1$  et  $\mu_2 = -\lambda_2$ . Ainsi,  $h$  est nécessairement de la forme

$$h(x) = \begin{cases} \lambda_1 \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ \lambda_2 \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

Le DL de  $x \mapsto x \ln x + 1 - x$  au voisinage de 1 s'écrit

$$x \ln x + 1 - x = x \left[ (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right] + 1 - x = (2-x) \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) = \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

(on écrit  $2-x = (1-x) + 1$ ..)

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{\lambda_1}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{\lambda_2}{2}$ , et  $h$  sera continue en 1 si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Finalement,  $h$  doit être de la forme :  $h(x) = \lambda \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2}$ . Il reste à étudier la dérivabilité de cette fonction en 1.

Si on poursuivait le DL précédent, on obtiendrait facilement que  $h$  possède un développement limité d'ordre 1 en  $x = 1$ , et  $y$  est donc dérivable. Le fait qu'elle est effectivement deux fois dérivable, donc sera solution de (E) sera démontré dans la question 32, donc je ne détaille pas plus ici.

En admettant provisoirement ce résultat, on peut en déduire qu'il existe d'autres solutions que la solution nulle, et la réponse A est inexacte.

**Q28 : Réponse E (pas de bonne réponse)**

29. •  $\ell$  est effectivement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  d'après les théorèmes usuels.

- Le développement limité de  $\ell$  au voisinage de 1 s'écrit, en reprenant les calculs faits ci-dessus :

$$\ell(x) = a \left( \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right) + a + b + (a+b)(x-1)$$

La réponse B est donc exacte.

- On a ensuite :

$$\frac{\ell(x)}{(x-1)^2} = \frac{a+b}{(x-1)^2} + \frac{a+b}{x-1} + \frac{a}{2} + o(1)$$

et il est donc exact que cette fonction possède une limite finie en 1 si et seulement si  $a+b=0$  ; cette limite vaut alors  $\frac{a}{2}$ .

Et donc (???) :

**Q29 : Réponses A,B,D**

30. Les calculs ont été faits à la question 28.

**Q30 : Réponse A**

31. On connaît le développement en série entière :

$$\forall x \in ]-1, 1[ , \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

donc

$$\forall x \in ]0, 2[ , \ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

puis

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0, 2[ , x \ln x + 1 - x &= (x-1) \ln x + \ln x - (x-1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} - (x-1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left[ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right] (x-1)^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui, en divisant par  $(x-1)^2$ , prouve que  $h$  est développable en série entière au voisinage de 1, avec un rayon de convergence égal à 1, et est la formule de la réponse C.

**Q31 : Réponses B,C**

32. On sait qu'une fonction développable en série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence, donc le résultat de la question précédente prouve que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, 2[$ . Comme elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  par les théorèmes usuels, on conclut :

**Q32 : Réponse D**

33. Les calculs précédents montrent que l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $h = ah_0$ , où  $h_0$  est la fonction de l'énoncé. La réponse B est donc exacte, et la réponse A est fausse.

Une solution sur  $\mathbb{R}$  doit nécessairement être aussi une solution sur  $] -\infty, 1[$  et sur  $]0, +\infty[$ , donc être de la forme :

$$f(x) = \lambda \frac{x}{(x-1)^2} \text{ pour } x \in ] -\infty, 1[ \quad \text{et} \quad f(x) = a \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} \text{ si } x > 0$$

La seule solution possible est la fonction nulle.

**Q33 : Réponses B,d**

### **PARTIE III**

34. D'après les théorèmes usuels,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, 1[...$

**Q34 : Réponses C,D**

35. L'énoncé fournit des explications très détaillées, pas besoin d'en dire beaucoup plus...

Mais il y a un PIÈGE ; en effet, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$  citée dans la réponse B est intégrable *au voisinage* de 1, mais pas sur  $] -\infty, 1[$  (car équivalente, en  $-\infty$ , à  $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ) !

**Q35 : Réponse D**

36. Calcul facile.

**Q36 : Réponse A**

37. A. Réponse exacte, bien que la positivité de la fonction ne serve à rien.

B. Réponse fausse :  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = 1$ .

C. D. Pour  $n \geq 1$ ,  $I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} (\sin t - 1) dt$ . La fonction  $t \mapsto (\sin t)^{n-1} (\sin t - 1)$  étant continue, négative et non identiquement nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , son intégrale est strictement négative, donc la suite  $(I_n)$  est strictement décroissante.

**Q37 : Réponses A,D**

38. Il s'agit de la relation de récurrence classique sur les intégrales de Wallis, que l'on obtient en intégrant par parties :

Pour  $n \geq 2$  :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} \sin t dt = \underbrace{\left[ \cos t (\sin t)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2 t}_{=1-\sin^2 t} (\sin t)^{n-2} dt = (n-1)[I_{n-2} - I_n]$$

$$\text{donc } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

**Q38 : Réponse B**



39. D'après la relation précédente :

- $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dots = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \dots \frac{2}{3} I_1 = \frac{[2p \cdot (2p-2) \dots 2]^2}{(2p+1)!} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$
- $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \dots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!}{[2p \cdot (2p-2) \dots 2]^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$ , ce qui est la formule donnée dans l'énoncé pour  $I_{2p+1}$ ...

Il était d'ailleurs facile de vérifier que les deux formules données sont fausses, simplement en examinant le cas  $p = 0$ .

**Q39 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

40. On a bien sûr  $u_n = I_n$ .

La relation  $nI_n = (n-1)I_{n-2}$  implique  $nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-1} I_{n-2}$  donc la suite  $n \mapsto nI_n I_{n-1}$  est constante. On a donc, pour tout  $n \geq 1$ ,  $nI_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$  (la réponse B est donc fausse).

D'autre part, la suite étant décroissante, on a, pour  $n \geq 2$ ,  $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$ , d'où  $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$  puisque  $I_n$  est strictement positif.

On a donc, compte tenu de la relation de récurrence :  $1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{n}{n-1}$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$ , ce qui signifie

que  $I_n \sim_{n \rightarrow \infty} I_{n-1}$ . La relation  $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$  implique alors  $nI_n^2 \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ , d'où, puisque  $I_n > 0$  :  $I_n \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général  $I_n$  est divergente.

**Q39 : Réponse E (aucune réponse exacte)**

