

CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2008

PARTIE I

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ ne contenant pas 0. Conformément au programme, cela n'a pas de sens d'étudier son intégrabilité sur un intervalle de la forme $]x, +\infty[$ lorsque $x < 0$. La réponse C est fausse ; de toute façon, la justification donnée dans cette réponse est fausse également.

Au voisinage de 0, $f(t) \sim \frac{1}{t^{n+1}}$, et, puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}$) n'est pas intégrable au voisinage de 0, f non plus. La réponse B est inexacte.

Au voisinage de $+\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$ donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Elle sera donc intégrable sur tout intervalle $[x, +\infty[$ avec $x > 0$, mais la justification donnée dans la réponse D est inexacte (l'équivalent proposé est fantaisiste). La réponse A est également fausse : f étant à valeurs positives, il y a équivalence entre la convergence de l'intégrale et l'intégrabilité (= absolue convergence).

Q1 : Réponse E (aucune réponse exacte)

2. La fonction f étant continue et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, on aura $I_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$. La réponse C est fausse.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{t^{n+1}} \leq \frac{1}{x^{n+1}}$ pour $t \geq x$, et, puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut écrire :

$$I_n(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x^{n+1}} e^{-x} < \frac{1}{x^{n+1}} \quad \text{car } x > 0$$

(on a démontré au passage $I_n(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} = f(x)$, mais cette inégalité n'est vraie que pour $x > 0$ donc la réponse A est fausse).

Si $x \geq 1$, l'inégalité précédente implique $I_n(x) < \frac{1}{e}$. Conclusion :

Q2 : Réponses B,D

3. A. Réponse fausse, puisque f n'est pas intégrable au voisinage de 0.
 B. La relation de l'énoncé est exacte (il s'agit de la relation de Chasles), et elle est valable en fait pour tout $x > 0$. La réponse est donc fausse.
 C. D. La fonction $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ est une primitive de f puisque f est continue, donc la relation de la réponse B implique que I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et NON sur $\mathbb{R} !$, réponse C fausse) et a pour dérivée $-f(x)$.

Q3 : Réponse E (aucune réponse exacte)

4. • On va d'abord établir une relation de récurrence entre les I_n . En intégrant par parties, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(n+1)} dt = \left[-e^{-t} t^{-(n+1)} \right]_x^{+\infty} - (n+1) \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(n+2)} dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1) I_{n+1}(x)$$

- On en tire : $I_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} - I_1(x)$ puis $I_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \left[\frac{e^{-x}}{x^2} - 2I_2(x) \right] = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2I_2(x)$ puis
 $I_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \left[\frac{e^{-x}}{x^3} - 3I_3(x) \right] = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \frac{e^{-x}}{x^3} - 2 \cdot 3 \cdot I_3(x)$ puis
 $I_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \frac{e^{-x}}{x^3} - 2 \cdot 3 \left[\frac{e^{-x}}{x^4} - 4I_4(x) \right] = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \frac{e^{-x}}{x^3} - 2 \cdot 3 \frac{e^{-x}}{x^4} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot I_4(x)$
 etc... et une récurrence immédiate donne

$$e^x I_0(x) = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right] + (-1)^n n! e^x I_n(x)$$

ce qui donne (pour $n \geq 1$, et $f_0(x) = 0$ par définition) :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$$

tous ces calculs étant évidemment valables pour tout réel $x > 0$. Autrement dit, la formule de la réponse A est exacte, mais la condition « x réel positif ou nul » est inexacte, et les formules données dans les réponses B et C sont inexactes (k au lieu de $k-1$, $k+1$ au lieu de k ...).

- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on a $I_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)I_{n+1}(x) = f(x) - (n+1)I_n(x)$, en reprenant la **notation désastreuse** de l'énoncé (qui note f une fonction qui dépend de n , donc dans la relation précédente il faut comprendre que f n'est pas toujours la même !). Cela donne la réponse D, qui est en fait vraie pour tout $x > 0$ et pas seulement $x \geq 1$.

Finalement :

Q4 : Réponse D

5. *Erreur d'énoncé* : on supposera bien sûr qu'il s'agit de la fonction φ et non ψ ...

D'après la question précédente, on a $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x^k} + r_n(x)$ avec $a_k = (-1)^{k-1} (k-1)!$ et $r_n(x) = (-1)^n n! e^x I_n(x)$.

On a vu à la question 2 que : $\forall x > 0$, $0 < I_n(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$, donc $|r_n(x)| \leq \frac{n!}{x^{n+1}}$, donc en notant $r_n(x) = \frac{\varepsilon_n(x)}{x^n}$, on a $|\varepsilon_n(x)| < \frac{n!}{x}$ et par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$.

On a donc bien obtenu un DL de φ au voisinage de $+\infty$ à tout ordre n . En lisant bien l'énoncé, on voit que la seule réponse exacte est la réponse C, les réponses B et D comportant des « petites » erreurs...

Q5 : Réponse C

6. On a vu que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^n}$ et $u_0 = 0$. On peut donc calculer, pour $x > 0$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \geq 1$ (et non pour tout n entier naturel, la réponse C est donc fausse). On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n+1}{x}$, qui tend vers $-\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ (donc la réponse D est fausse), et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = +\infty$.

D'après les règles de comparaison d'une suite à une suite géométrique (d'Alembert), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. La suite (u_n) ne convergeant pas vers 0, la série de terme général u_n diverge grossièrement.

Cependant, on ne peut pas retenir la réponse C, car il est écrit : « la série $\sum u_n$ diverge car la série $\sum |u_n|$ diverge », et cette implication est inexacte (considérer par exemple la série harmonique alternée). Conclusion :

Q6 : Réponse E (aucune réponse exacte)

7. A. Réponse fausse d'emblée, puisque, pour $p = 0$, $f_0(x) = 0$ et $\varphi(x) = e^x I_0(x)$ est positive.
 B. Par définition : $\varphi(x) = f_n(x) + (-1)^n n! e^x I_n(x)$. donc $\varphi(x) - f_{2p}(x) = (2p)! e^x I_{2p}(x)$ est strictement positif, et, de même, $\varphi(x) - f_{2q+1}(x) < 0$.

C. D Pour tout $x > 0$ et $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_{2p}(x) - f_{2p-2}(x) &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} - \sum_{k=1}^{2p-2} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \\ &= -\frac{(2p-1)!}{x^{2p}} + \frac{(2p-2)!}{x^{2p-1}} = \frac{(2p-2)!}{x^{2p}}(x - (2p-1)) \end{aligned}$$

donc, pour $x = 10$ et $p \geq 2$: $f_{2p}(10) - f_{2p-2}(10) = \frac{(2p-2)!}{10^{2p}}(11-2p)$, ce qui donne la réponse D, puisque $f_{2p}(10) - f_{2p-2}(10)$ est positif pour $2 \leq p \leq 5$ et négatif pour $p \geq 6$.

Mais attention ! Le calcul ci-dessus n'est *a priori* plus valable pour $p = 1$ (car l'expression donnant $f_n = \sum_{k=1}^n \dots$ n'est valable que pour $n \geq 1$), il faut donc faire le calcul séparément pour $p = 1$:

$$f_2(x) - f_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 0 \text{ d'où } f_2(10) - f_0(10) = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{10^2} \text{ et l'égalité demeure valable !}$$

Q7 : Réponses B,D

8. Rem : Il semble, à la lecture de la suite de l'énoncé, qu'il y a encore une faute de frappe dans l'énoncé ! Il faut

considérer l'intégrale $\int_0^{+\infty} m!(t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt$ (m à la place de n) !

A. Pour $x = 0$, l'intégrale s'écrit $\int_0^{+\infty} m! \frac{e^{-t}}{t} dt$. Par le même argument que celui utilisé à la question 1, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$; mais au voisinage de 0, elle est équivalente à $\frac{1}{t}$ donc n'est pas intégrable. Si $x < 0$, ce genre d'intégrale avec un problème « au milieu » n'est plus franchement au programme ; il faut considérer séparément $\int_x^0$ et $\int_0^{+\infty}$, qui sont toutes deux divergentes. En conclusion, l'intégrale proposée diverge si $x \leq 0$, et la réponse A est exacte.

B. Réponse fausse, d'après ce qui précède.

C. La « justification » donnée dans cette réponse est fantaisiste !

D. Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto m!(t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}}$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour t supérieur à x , on aura $0 \leq (t-x)^m \leq t^m$, donc si de plus $t \geq 1$ on aura $0 \leq (t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} \leq \frac{e^{-t} t^m}{t^{m+1}} = \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ ce qui est la majoration de l'énoncé et ce qui implique que l'intégrale est absolument convergente. En résumé :

Q8 : Réponses A,D

9. On développe $(t-x)^m$ par la formule du binôme :

$$(t-x)^m = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} t^{m-p} (-x)^p$$

ce qui donne

$$J_m(x) = m! \int_x^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^m \binom{m}{p} (-1)^p x^p \frac{1}{t^{p+1}} \right) e^{-t} dt = m! \sum_{p=0}^m (-1)^p x^p \binom{m}{p} I_p(x)$$

ce qui est la formule de la réponse B, mais, bien sûr, cela n'a de sens que pour x strictement positif. La réponse B est donc fausse ; cependant la réponse C est exacte, puisque $m! \binom{m}{p} = \frac{(m!)^2}{(m-p)!p!}$.

Q9 : Réponse C

10. On a vu à la question 3 que I_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et a pour dérivée $x \mapsto -\frac{e^{-x}}{x^{p+1}}$. Les fonctions I_p sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et il en est donc de même de J_m d'après l'expression trouvée ci-dessus.

Pour tout $x > 0$, $J_0(x) = I_0(x)$ donc $J'_0(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$. C'est la relation de la réponse D, mais la fin de la réponse D est fautive (J_0 n'est pas définie en 0 !). En conclusion :

Q10 : Réponse B

11. A partir de l'égalité $J_m(x) = m! \sum_{p=0}^m (-1)^p x^p \binom{m}{p} I_p(x)$ et de la relation $I'_p(x) = -\frac{e^{-x}}{x^{p+1}}$, on trouve :

$$J'_m(x) = m! \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \left[p x^{p-1} I_p(x) - x^p \cdot \frac{e^{-x}}{x^{p+1}} \right]$$

ce qui est la formule de la réponse A.

De plus :

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} \frac{e^{-x}}{x} = (1-1)^m \frac{e^{-x}}{x} = 0$$

puisque l'énoncé suppose $m \geq 1$, donc

$$J'_m(x) = m! \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq m}}^m (-1)^p \binom{m}{p} p x^{p-1} I_p(x)$$

et compte tenu de la relation (à connaître !) $p \binom{m}{p} = m \binom{m-1}{p-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} J'_m(x) &= m! m \sum_{p=1}^m (-1)^p \binom{m-1}{p-1} x^{p-1} I_p(x) = -m! m \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p \binom{m-1}{p} x^p I_{p+1}(x) \\ &= -m! m \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p \binom{m-1}{p} x^p \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{p+2}} dt \\ &= -m! m \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{m-1} \binom{m-1}{p} (-x)^p t^{m-1-p} \right) \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \\ &= -m! m \int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \end{aligned}$$

Q11 : Réponses A,C

12. Erreur d'énoncé : on supposera bien sûr qu'il s'agit de « m supérieur ou égal à 1 » et non « inférieur » !

A. Réponse fautive d'emblée car $J_m(x)$ n'est pas définie si $x = 0$.

B. C. En écrivant $(t-x)^m = (t-x)^{m-1}(t-x) = (t-x)^{m-1}t - x(t-x)^{m-1}$ on obtient, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= m! \int_0^{+\infty} (t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \\ &= m! \left[\int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^m} dt - x \int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \right] \\ &= m.(m-1)! \int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^m} dt - \frac{x}{m} . m.m! \int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt \\ &= mJ_{m-1}(x) + \frac{x}{m} J'_m(x) \quad (\text{en utilisant la réponse de la question C. précédente}) \end{aligned}$$

ce qui est la réponse B.

D. Si la relation de l'énoncé était vérifiée, on aurait d'après le calcul précédent $J'_m(x) = 0$!

Q12 : Réponse B

13. B. Réponse fausse d'emblée car $J_m(x)$ n'est pas définie si $x = 0$.

A. C. D. En supposant $m \geq 2$ (indispensable pour les calculs qui suivent) et $x > 0$ on a, avec une intégration par parties (que je fais directement sur l'intervalle non compact $[x, +\infty[$...)

$$\begin{aligned} J'_m(x) &= -m!m \int_0^{+\infty} (t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt = -m!m \int_0^{+\infty} \underbrace{(t-x)^{m-1} e^{-t}}_{=u(t)} \underbrace{\frac{1}{t^{m+1}}}_{=v'(t)} dt \\ &= -m!m \left(\underbrace{\left[-(t-x)^{m-1} \frac{e^{-t}}{mt^m} \right]_x^{+\infty}}_{=0} + \int_x^{+\infty} \frac{[(m-1)(t-x)^{m-2} - (t-x)^{m-1}]e^{-t}}{mt^m} dt \right) \\ &= -m!(m-1) \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{m-2} e^{-t}}{t^m} dt + m! \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{m-1} e^{-t}}{t^m} dt \\ &= -m(m-1)!(m-1) \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{m-2} e^{-t}}{t^m} dt + m(m-1)! \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{m-1} e^{-t}}{t^m} dt \\ &= mJ'_{m-1}(x) + mJ_{m-1}(x). \end{aligned}$$

On a donc $\alpha_m = m$ et $\beta_m = -m$.

Conclusion :

Q13 : Réponse E (aucune réponse exacte)

14. On mélange ici les résultats des deux questions précédentes. En supposant $m \geq 1$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned} J_{m+1}(x) &= \frac{1}{m+1} [xJ'_{m+1}(x) + (m+1)^2 J_{m+1}(x)] \quad \text{d'après 12.B. à l'ordre } m+1 \\ &= x(J'_m(x) + J_m(x)) + (m+1)J_m(x) \quad \text{d'après le calcul (juste) fait en 13.} \\ &= mJ_m(x) - m^2 J_{m-1}(x) + (m+1+x)J_m(x) \quad \text{d'après 12.B.} \\ &= (2m+1+x)J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Conclusion :

Q14 : Réponse C

15. A. D. Réponses fausses d'emblée car $J_m(x)$ n'est pas définie si $x = 0$ (mais l'équation différentielle est la bonne comme on va le voir).

C. Pour $x > 0$ $J_0(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$ donc $J''_0(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$ et la réponse C est fausse.

B. Pour $m \geq 1$ et $x > 0$ la question 12.B donne $xJ'_m(x) = m[J_m(x) - mJ_{m-1}(x)]$ donc en dérivant

$$xJ''_m(x) + J'_m(x) = m[J'_m(x) - mJ'_{m-1}(x)] \quad \underbrace{\quad}_{\text{question 13}} \quad m^2 J_{m-1}(x) \quad \underbrace{\quad}_{\text{question 12.B}} \quad mJ_m(x) - xJ'_m(x)$$

soit l'équation différentielle :

$$xJ''_m(x) + (x+1)J'_m(x) - mJ_m(x) = 0.$$

qui n'est pas celle de la réponse B. Donc :

Q15 : Réponse E (aucune réponse exacte)

16. En supposant $R_1 > 0$, on a pour $x \in]-R_1, R_1[$:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y_1''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

donc

$$\begin{aligned} x y_1''(x) + (x + \lambda^2 + 2) y_1'(x) - \lambda^2 y_1(x) &= \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n=1}}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n + (\lambda^2 + 2) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \lambda^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} [n(n-1) + n(\lambda^2 + 2)] a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - \lambda^2) a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n + \lambda^2 + 1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - \lambda^2) a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n + \lambda^2 + 2) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - \lambda^2) a_n x^n \end{aligned}$$

donc par unicité du DSE, y_1 est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a : $a_{n+1} = \frac{\lambda^2 - n}{(n+1)(n + \lambda^2 + 2)} a_n$. C'est la réponse B (et la réponse C est fausse).

Enfin, si il existe un entier n_0 tel que $\lambda = \pm \sqrt{n_0}$, alors $a_{n_0+1} = 0$, puis $a_n = 0$ pour $n \geq n_0 + 1$: l'équation admet dans ce cas une solution polynomiale, et $R_1 = +\infty$.

Sinon, en supposant que $a_0 \neq 0$ c'est-à-dire que y_1 n'est pas la solution nulle, on peut former le quotient $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|\lambda^2 - n| |x|}{(n+1)(n + \lambda^2 + 2)}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = 0$, la série converge pour tout x d'après la règle de d'Alembert, donc $R_1 = +\infty$.

Dans les deux cas, $R_1 = +\infty$ et on a trouvé une solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$, donc la réponse A est fausse.

Q16 : Réponses B,D

17. C'est une question de cours (les exemples et contre exemples sont classiques).

Q17 : Réponse E (aucune réponse exacte)

18. En supposant $R_2 > 0$, on a pour $x \in]-R_2, R_2[$:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad y_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}, \quad y_2''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

donc

$$\begin{aligned} x y_2''(x) + (x + 1) y_2'(x) - m y_2(x) &= \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n=1}}^{+\infty} n(n-1) b_n x^{n-1} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n=0}}^{+\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} - m \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - m) b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 b_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - m) b_n x^n \end{aligned}$$

donc par unicité du DSE, y_2 est solution de l'équation différentielle proposée si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a : $b_{n+1} = \frac{m-n}{(n+1)^2} b_n$. Les réponses B et C sont donc inexactes.

Pour des raisons semblables à celles exposées dans la question 16, on trouve $R_2 = +\infty$ (donc la réponse A est fausse), mais il faut considérer la réponse D comme inexacte car il est possible que b_n s'annule (par exemple si $b_0 = 0$ ou si m est entier !), donc le quotient $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ n'est alors pas défini.

Q18 : Réponse E (aucune réponse exacte)

19. D'après les calculs ci-dessus, y_2 est polynomiale si et seulement si c'est la solution nulle ou si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m - n = 0$ c'est-à-dire si $m \in \mathbb{N}$ (car alors $b_{m+1} = 0$ puis $b_n = 0$ pour $n \geq m + 1$).

Donc, en lisant attentivement les réponses proposées :

Q19 : Réponse A

20. A. B. On reprend les calculs précédents en choisissant $b_m = \alpha_{m,m} = 1$ et en renommant les b_p en $\alpha_{m,p}$. La relation de récurrence s'écrit ainsi

$$\forall p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \alpha_{m,p} = \frac{(p+1)^2}{m-p} \alpha_{m,p+1}$$

donc

$$\forall p \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \alpha_{m,p} = \frac{(p+1)^2}{m-p} \cdot \frac{(p+2)^2}{m-(p+1)} \cdots \frac{m^2}{1} \cdot \alpha_{m,m} = \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!}.$$

Cette égalité reste vraie pour $p = m$ donc la réponse A est exacte, et la réponse B fausse.

- C. D. Si $m = 0$ l'équation différentielle s'écrit $xy'' + (x+1)y' = 0$. Toutes les fonctions constantes sont solutions, donc on posera $g_0(x) = 1$.

Q20 : Réponses A, D

21. L'égalité demandée équivaut à : $\forall x > 0, h_m(x) = (g_m(x)I_0(x) - J_m(x))e^x$, d'où l'existence et l'unicité de la fonction h_m . Donc les réponses A et B sont fausses, et il ne « reste plus » qu'à vérifier que h_m est bien polynomiale. Pour cela, il fallait mélanger habilement les résultats des questions précédentes, ce qui me semble assez délicat dans le temps imparti...

D'après la question 9 : $J_m(x) = m! \sum_{p=0}^m (-1)^p x^p \binom{m}{p} I_p(x)$ puis en remplaçant les I_p par les expressions trouvées à la question 4 soit

$$\forall p \geq 1, I_p(x) = \frac{(-1)^p}{p!} (\varphi(x) - f_p(x)) e^{-x} = \frac{(-1)^p}{p!} I_0(x) - \frac{(-1)^p}{p!} f_p(x) e^{-x}$$

avec :

$$f_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 1, f_p(x) = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} J_m(x) &= m! \left\{ I_0(x) + \sum_{p=1}^m (-1)^p x^p \binom{m}{p} \left[\frac{(-1)^p}{p!} I_0(x) - \frac{(-1)^p}{p!} f_p(x) e^{-x} \right] \right\} \\ &= m! \left\{ \left[\sum_{p=0}^m \frac{x^p}{p!} \binom{m}{p} \right] I_0(x) - e^{-x} \sum_{p=1}^m \frac{x^p}{p!} \binom{m}{p} f_p(x) \right\} \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_{m,p} = \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} = \frac{m!}{p!} \binom{m}{p}$, l'égalité précédente s'écrit finalement

$$J_m(x) = I_0(x) \underbrace{\sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p}_{=g_m(x)} - e^{-x} \underbrace{\sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p f_p(x)}_{=h_m(x)}$$

Ainsi $h_m(x) = \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p f_p(x)$; puisque pour $1 \leq p \leq m$, $x^p f_p(x) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} (k-1)! x^{p-k}$ est un polynôme en x de degré $p-1$, $h_m(x)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq m-1$. On en conclut :

Q21 : Réponse D

22. Là encore, cette question exige des calculs assez délicats à faire dans le temps imparti...

A. B. On poursuit les calculs précédents : pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned} h_m(x) &= \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p f_p(x) = \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p [f_p(x) - f_m(x) + f_m(x)] \\ &= \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p [f_p(x) - f_m(x)] + f_m(x) \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p = \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{m,p} x^p [f_p(x) - f_m(x)] + f_m(x) g_m(x) \end{aligned}$$

La réponse B est donc inexacte (signe incorrect).

On a vu dans la question précédente que, pour $1 \leq p \leq m$, $x^p f_p(x)$ est une fonction polynomiale de degré $p-1$; $f_m(x)$ étant une fonction polynomiale de degré m , il en résulte que $x^m f_m(x) g_m(x)$ est une fonction polynomiale de degré $2m-1$, donc que $f_m(x) g_m(x)$ est une fraction rationnelle de degré m .

Puisque $f_m(x) g_m(x) = h_m - \sum_{p=0}^m \alpha_{m,p} x^p [f_p(x) - f_m(x)]$ et que h_m est un polynôme de degré m , h_m sera bien la partie entière de la fraction rationnelle $f_m g_m$ si et seulement si la fonction rationnelle $x \mapsto \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{m,p} x^p [f_p(x) - f_m(x)]$ est de degré strictement négatif. Or pour $0 \leq p \leq m-1$,

$f_m(x) - f_p(x) = \sum_{k=p+1}^m \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ est une fraction rationnelle de degré $-(p+1)$ donc $x^p [f_m(x) - f_p(x)]$ est de degré -1 , ce qui établit le résultat cherché.

Finalement, la réponse A est exacte.

C. D. La fonction polynomiale $g_{m+1}(x) - (x+2m+1)g_m(x)$ est de degré $\leq m+1$. Son terme constant est égal à

$$\alpha_{m+1,0} - (2m+1)\alpha_{m,0} = (m+1)! - (2m+1)m! = -m \cdot m! = -m^2(m-1)! = -m^2\alpha_{m-1,0} ;$$

le coefficient de x^{m+1} est égal à 0 car les deux polynômes g_{m+1} et g_m sont normalisés (ou unitaires) ; et pour $1 \leq p \leq m$, le coefficient de x^p est égal à

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1,p} - \alpha_{m,p-1} - (2m+1)\alpha_{m,p} &= \frac{(m+1)!^2}{(p!)^2(m+1-p)!} - \frac{(m!)^2}{(p-1)!^2(m-p+1)!} - (2m+1) \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} \\ &= \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} \left(\frac{(m+1)^2}{m-p+1} - \frac{p^2}{m-p+1} - (2m+1) \right) \\ &= \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} \left(\frac{(m+1)^2 - p^2 - (2m+1)(m-p+1)}{m-p+1} \right) \\ &= \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} \left(\frac{(m+1-p)(m+1+p) - (2m+1)(m-p+1)}{m-p+1} \right) \\ &= \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} [(m+1+p) - (2m+1)] = \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!} (p-m) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p = m \\ -\frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p-1)!} = -m^2 \frac{(m-1)!^2}{(p!)^2(m-p-1)!} = -m^2 \alpha_{m-1,p} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, l'égalité des coefficients ci-dessus démontre la relation

$$g_{m+1}(x) - (x+2m+1)g_m(x) = -m^2 g_{m-1}(x)$$

donc les réponses C et D sont toutes deux fausses.

N.B. Cependant, la relation trouvée ci-dessus combinée avec la relation de récurrence

$J_{m+1}(x) = (2m+1+x)J_m(x) - m^2 J_{m-1}(x)$ trouvée à la question 14.C permet d'obtenir, puisque

$h_m(x) = (g_m(x)I_0(x) - J_m(x))e^x$, la relation $h_{m+1}(x) = (x+2m+1)h_m(x) - m^2 h_{m-1}(x)$, qui est celle citée dans le début de la réponse C ...

Q22 : Réponse A

23. $h_0(x) = 0$, puis $h_1(x) = \alpha_{1,1} x f_1(x) = x \frac{1}{x} = 1$ puis la relation de récurrence trouvée ci-dessus donne $h_2(x) = (x+3)h_1(x) - h_0(x) = x+3$ puis $h_3(x) = (x+5)h_2(x) - 4h_1(x) = x^2 + 8x + 11$.

Il semble donc que la bonne réponse soit la réponse B. Mais il y a un problème : si on lit l'énoncé de la question 21, la fonction h_m n'est définie *a priori* que sur $\mathbb{R}_+$ (même si la suite de l'énoncé parle de la *fonction polynôme* h_m qui serait donc définie sur $\mathbb{R}$...). J'aurais donc tendance à penser (compte tenu aussi de la formulation de la réponse C) que la réponse B est inexacte, compte tenu de la phrase « pour tout x réel ».

Q23 : Réponse E (aucune réponse exacte) ou réponse B (?)

24. A. Faux car l'expression proposée n'est pas définie pour $t = 0$.
 B. Faux car l'inégalité proposée n'a rien à voir avec « t supérieur à x ».
 C. On reprend ici les inégalités vues à la question 8.

Pour $t > x > 0$ on a $0 < (t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} < \frac{e^{-t} t^m}{t^{m+1}} = \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ d'où en intégrant (toutes les intégrales écrites sont convergentes) :

$$0 < J_m(x) = m! \int_x^{+\infty} (t-x)^m \frac{e^{-t}}{t^{m+1}} dt < m! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = m! \frac{e^{-x}}{x}$$

et la réponse C est donc correcte.

- D. Dans l'expression $g_m(x) = \sum_{p=0}^m \alpha_m m x^p$ valable pour $m \in \mathbb{N}^*$ on a $\alpha_{m,p} = \frac{(m!)^2}{(p!)^2(m-p)!}$ strictement positif et $\alpha_{m,1} = m.m!$ donc $g_m(x) > m.m!x$ pour $x > 0$ (et cela reste vrai pour $m = 0$ puisque $g_0(x) = 1$).

Q24 : Réponses C,D

25. A. B. Compte tenu des inégalités démontrées à la question précédente on a pour $x > 0$

$$0 < e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)} < e^x \left(m! \frac{e^{-x}}{x} \right) \left(\frac{1}{m.m!x} \right) = \frac{1}{mx^2}$$

Ainsi pour tout $x > 0$ (donc a fortiori pour $x \geq 1$!) la suite $\left(e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$: c'est la réponse A.

- C. D. $\forall x > 0$, $h_m(x) = (g_m(x)I_0(x) - J_m(x))e^x$ donc $\frac{h_m(x)}{g_m(x)} = e^x I_0(x) - e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)} = \varphi(x) - e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)}$ donc la suite $\left(\frac{h_m(x)}{g_m(x)} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge bien vers $\varphi(x)$ mais la raison évoquée dans la réponse C est inexacte.

Q25 : Réponse A

26. Calcul fait ci-dessus : pour $x > 0$, $\frac{h_m(x)}{g_m(x)} - \varphi(x) = -e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)}$ donc est strictement négatif : les réponses A et B sont fausses.
 Pour $x > 0$, $0 < \varphi(x) - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} = e^x \frac{J_m(x)}{g_m(x)} < \frac{e^x}{g_m(x)} m! \frac{e^{-x}}{x} = \frac{m!}{x g_m(x)} \leq \frac{m!}{x^{m+1}}$ puisque $g_m(x) = x^m + \text{termes positifs}$.
 On a donc $\varphi(x) - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{x^m}\right)$ ce qui est la réponse D.

On reprend les calculs des questions 2 et 4 : $\varphi(x) - f_n(x) = (-1)^n n! e^x I_n(x)$ (question 4). On avait aussi $I_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)I_{n+1}(x)$ (question 4) et $0 < I_{n+1}(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}$ (question 2) donc $I_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$ de sorte que $\varphi(x) - f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$. La deuxième égalité proposée dans la question C est donc fausse (mais la première égalité reste exacte).

Q26 : Réponse D

27. On reprend les relations de la question 22 (celles que j'ai démontrées, pas exactement celles de l'énoncé !) :

$$\begin{aligned} D_m(x) &= h_{m+1}(x)g_m(x) - h_m(x)g_{m+1}(x) \\ &= [(x+2m+1)h_m(x) - m^2h_{m-1}(x)]g_m(x) - h_m(x)[(x+2m+1)g_m(x) - m^2g_{m-1}(x)] \\ &= m^2(h_m(x)g_{m-1}(x) - h_{m-1}(x)g_m(x)) = m^2D_{m-1}(x) \end{aligned}$$

ce qui est la réponse A (et B est fausse).

Puisque $D_0(x) = h_1(x)g_0(x) - h_0(x)g_1(x) = 1 \times 1 - 0 = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate : $D_m(x) = (m!)^2$ (et cela est valable pour tout x , donc *empha fortiori* pour $x \geq 1$).

On en déduit l'égalité polynomiale : $h_{m+1}g_m - h_mg_{m+1} = (m!)^2 = \text{cste}$ ce qui d'après le théorème de Bezout (qui n'est qu'au programme de MP, pas à celui de PSI ni de PC !) prouve que les polynômes h_m et g_m sont premiers entre eux.

Q27 : Réponses B,C

28. A. B. Pour $x > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ on a vu que : $h_{m+1}(x)g_m(x) - h_m(x)g_{m+1}(x) = (m!)^2 > 0$ donc en divisant par $g_m(x)g_{m+1}(x)$ qui est strictement positif on obtient $\frac{h_{m+1}(x)}{g_{m+1}(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} > 0$ c'est-à-dire que la suite $\left(\frac{h_m(x)}{g_m(x)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. C'est la réponse A.

C. D. On a aussi $\frac{h_{m+1}(x)}{g_{m+1}(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} = \frac{(m!)^2}{g_m(x)g_{m+1}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(m!)^2}{x^{2m+1}}$ puisque g_m est un polynôme normalisé de degré m . Les réponses C et D sont donc toutes deux erronées.

Q28 : Réponse A

29. A. B. On additionne les égalités $\frac{h_{k+1}(x)}{g_{k+1}(x)} - \frac{h_k(x)}{g_k(x)} = \frac{(k!)^2}{g_k(x)g_{k+1}(x)}$ pour k variant de m à $2m-1$ et l'on obtient

$$\frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} = \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{(k!)^2}{g_k(x)g_{k+1}(x)} = \frac{(m!)^2}{g_m(x)g_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{(k!)^2}{g_k(x)g_{k+1}(x)}$$

Or $g_m(x)g_{m+1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{2m+1}$, et pour $k \geq m+1$, $\frac{(k!)^2}{g_k(x)g_{k+1}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(k!)^2}{x^{2k+1}} = o\left(\frac{1}{x^{2m+1}}\right)$, donc $\frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(m!)^2}{x^{2m+1}}$, ce qui est la réponse B.

C. D. On écrit :

$$\frac{h_m(x)}{g_m(x)} - \varphi(x) = \left[\frac{h_m(x)}{g_m(x)} - \frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} \right] + \left[\frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} - f_{2m}(x) \right] + [f_{2m}(x) - \varphi(x)].$$

Or :

$$\begin{aligned} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} - \frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right) \text{ d'après ce qui précède ;} \\ - \frac{h_{2m}(x)}{g_{2m}(x)} - f_{2m}(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right) \text{ d'après la question 26 ;} \\ - f_{2m}(x) - \varphi(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right) \text{ d'après la question 5.} \end{aligned}$$

On aura donc au final : $\frac{h_m(x)}{g_m(x)} - \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right)$, ce qui est la réponse D.

Q29 : Réponses B,D

30. A. En écrivant

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} = \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \varphi(x) \right] + \left[\varphi(x) - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} \right]$$

on obtient, compte tenu de l'hypothèse de l'énoncé et du résultat de la question précédente :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right), \text{ ce qui est la réponse A.}$$

B. Soit $a_p X^p$ le terme dominant de Q ($p \leq m$ par hypothèse). Alors $\left| \frac{x^{2m}}{Q(x)g_m(x)} \right| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{2m}}{|a_p| x^{m+p}}$ donc cette fraction ne tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ que si $p < m$: la deuxième partie de la réponse B est donc inexacte.

Cependant, par hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2m} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{h_m(x)}{g_m(x)} \right) = 0$, c'est-à-dire que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2m}}{Q(x)g_m(x)} \right| [P(x)g_m(x) - Q(x)h_m(x)] = 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2m}}{Q(x)g_m(x)} \right|$ n'est pas nulle (c'est soit $+\infty$, soit $\frac{1}{|a_m|}$), il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)g_m(x) - Q(x)h_m(x) = 0$, donc que $Pg_m - Qh_m$ est le polynôme nul. La première partie de la réponse B est donc exacte.

C. D. Ainsi, $Pg_m = Qh_m$. Les polynômes g_m et h_m étant premiers entre eux, il résulte du théorème de Gauss (qui est au seul programme MP!) que g_m divise Q et h_m divise P . La réponse C est donc exacte et la réponse D fautive.

Remarque : puisque Q est de degré $\leq m$ a priori et que g_m est de degré m , on aura en fait $Q = \lambda g_m$ avec λ réel et donc $P = \lambda h_m$.

Q29 : Réponses A,C

Cette question, qui termine la partie I, signifie que, parmi toutes les fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$ qui approchent φ , c'est la suite $\frac{h_m}{g_m}$ qui est la « meilleure », en ce sens que si une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec $\deg Q \leq m$ approche $\varphi(x)$ avec l'ordre de grandeur $o\left(\frac{1}{x^{2m}}\right)$, on a en fait, à une constante près, $P = h_m$ et $Q = g_m$ (ou bien : si l'on désire une précision plus grande, il faut choisir un dénominateur de degré strictement supérieur à m).

La suite $\left(\frac{h_m}{g_m} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ s'appelle la suite des *réduites* de la fonction φ .

PARTIE II

31. Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel qui commutent, et si P est un polynôme, alors $\text{Ker}(P(f))$ est stable par g : c'est un résultat du cours.

Dans le cas particulier $P = X - \lambda$, on obtient que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par g : les sous-espaces propres de f sont stables par g , et réciproquement bien sûr en échangeant les rôles de f et g . La réponse A est donc exacte, et les réponses B et D sont fausses.

Enfin, la réponse C est fautive, il n'est pas difficile de trouver un contre-exemple : prendre $f = \text{Id}_E$ et g qui n'est pas une homothétie.

Q31 : Réponse A

32. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2, qui admet deux valeurs propres distinctes : il est donc diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Notons $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(e_i)$ ces sous-espaces propres pour $i \in \{1, 2\}$.

Chacune de ces droites vectorielles étant stable par g , on a $g(e_i)$ colinéaire à e_i , c'est-à-dire que les e_i sont aussi des vecteurs propres de g ; par suite, g est diagonalisable dans la même base que f . Mais les valeurs propres de g ne sont pas forcément les mêmes que celles de f ... En résumé, toutes les réponses proposées sont fausses.

Q32 : Réponse E (aucune réponse exacte)

33. En notant U la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2) de vecteurs propres précédente, on a donc $A = U\Delta_A U^{-1}$ et $B = U\Delta_B U^{-1}$ avec Δ_A et Δ_B diagonales : $\Delta_A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et $\Delta_B = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$, avec les notations de l'énoncé.

Comme dans l'énoncé, soient $P = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}X$ et $Q = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}X$.

Alors, si $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on aura

$$P(D') = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}I_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}D' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Delta_A$$

et de la même façon $Q(D') = \Delta_B$.

Donc $A = UP(D')U^{-1} = P(UD'U^{-1})$ et de même $B = Q(UD'U^{-1})$.

Il semblerait donc que seule la réponse B est exacte ; mais il y a un PIÈGE ! En effet, puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, P est bien de degré 1 mais si $\mu_1 = \mu_2$ le polynôme Q n'est pas de degré 1 exactement ! Or ce cas peut se produire (par exemple avec $B = I_2$, qui commute avec toute matrice). Finalement :

Q33 : Réponse E (aucune réponse exacte)

34. Les réponses A et B sont fausses, directement d'après le cours.

La réponse C est exacte, la justification est donnée par l'énoncé (voir aussi la question 31), et par suite la réponse D est fausse.

Q34 : Réponse C

35. Soit e_1 un vecteur propre commun à f et à g (il existe d'après la question précédente), que l'on complète en une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$. Soit U la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2) . Puisque les endomorphismes f et g n'ont qu'une valeur propre, on a $A = UT_A U^{-1}$ et $B = UT_B U^{-1}$ avec $T_A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $T_B = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

En posant $P = \lambda + \alpha X$ et $Q = \mu + \beta X$, et $D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $T_A = P(D')$ et $T_B = Q(D')$ d'où $A = P(UD'U^{-1})$ et $B = Q(UD'U^{-1})$. C'est la réponse D, et les réponses A et B sont donc fausses. Enfin la réponse C est évidemment fausse car elle impliquerait $A = B$.

Q35 : Réponse D

36. Puisque les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux, les valeurs propres non réelles d'une matrice à coefficients réels, qui sont les racines de son polynôme caractéristique, sont conjuguées deux à deux : c'est la réponse A.

Les réponses B et C sont fantaisistes.

Puisque ici A possède deux valeurs propres distinctes, on peut appliquer les résultats de la question 32 : A et B sont bien diagonalisables dans une même base. De plus, si e_1 est un vecteur propre de f associé à une valeur propre complexe non réelle λ , $\overline{e_1}$ est encore un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$ (car A étant à coefficients réels, $AX = \lambda X \iff A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X}$). On peut donc choisir une base diagonalisante de la forme $(e_1, \overline{e_1})$, c'est-à-dire une matrice de passage U avec deux colonnes conjuguées.

Il semblerait donc que la réponse D est exacte ; mais l'énoncé parle de « LA » matrice diagonalisante U et non « D'UNE » matrice diagonalisante. Or, si l'on peut choisir une base de vecteurs propres de la forme $(e_1, \overline{e_1})$, $(e_1, \lambda \overline{e_1})$ avec λ complexe non nul quelconque en est une autre, pour laquelle les deux vecteurs ne sont plus conjugués. Dans ce cas, la matrice U n'aura plus ses deux colonnes conjuguées...

L'énoncé est donc très ambigu ; mais je pense cependant que la réponse peut être considérée comme exacte, puisque l'énoncé laisse le choix de la base : on la choisit donc de la forme voulue ! (la question suivante me conforte dans ce choix).

Q36 : Réponse D

37. A. B. Ici $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. En reprenant les notations et résultats de la question 33, on a donc $A = P(D)$ avec $P = \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda_1}}{2} + \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}{2}X$ et $D = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1}$.

$$\text{On a donc } A = \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda_1}}{2} I_2 + \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}{2} U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1} = \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda_1}}{2} I_2 + \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}{2i} iU \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Les réponses A et B sont donc inexactes.

C. La phrase « il ne peut pas exister ... » est inexacte : par exemple si l'on prend $A = B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ il suffit de prendre $P = Q = X$ et $D = A = B \dots$

D. En reprenant les calculs ci-dessus, et en choisissant U de façon que ses deux colonnes soient conjuguées (voir question précédente), on aura $U = \begin{pmatrix} a & \overline{a} \\ b & \overline{b} \end{pmatrix}$ donc

$$D = iU \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^{-1} = i \begin{pmatrix} a & \overline{a} \\ b & \overline{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{a\overline{b} - \overline{a}b} \begin{pmatrix} \overline{b} & -\overline{a} \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\Im(a\overline{b})} \begin{pmatrix} \Re(a\overline{b}) & -2|a|^2 \\ 2|b|^2 & -\Re(a\overline{b}) \end{pmatrix}$$

Ainsi $A = P(D)$ avec $P = \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda_1}}{2} + \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}{2i}X$ et D est bien une matrice à coefficients réels.

Lorsque B a deux valeurs propres complexes non réelles μ_1 et $\overline{\mu_1}$, en posant $Q = \frac{\mu_1 + \overline{\mu_1}}{2} + \frac{\mu_1 - \overline{\mu_1}}{2i}X$, on obtient aussi $B = Q(D)$.

Il n'est pas possible que la matrice B ait deux valeurs propres réelles distinctes : en effet dans ce cas, elle admettrait deux vecteurs propres à coefficients réels, qui devraient être aussi des vecteurs propres de A , ce qui imposerait aux valeurs propres de A d'être réelles !

Enfin, le cas où B a une seule valeur propre réelle ($\mu_2 = \mu_1 = \overline{\mu_1}$) se limite au cas où $B = \mu_1 I_2$ (car B diagonalisable), et dans ce cas l'égalité $B = Q(D)$ reste vraie.

La réponse D est donc exacte dans tous les cas de figure.

Q37 : Réponse D

38. Il n'y a aucune raison que f ou g soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$: exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la réponse A est fausse.

Les polynômes caractéristiques de A et B sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$, donc (théorème du cours), les matrices A et B sont trigonalisables dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. La réponse B est fausse.

La raison donnée dans la réponse C est correcte ; elle implique que g_1 possède une valeur propre réelle, donc un vecteur propre dans $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$, donc f et g ont bien un vecteur propre commun.

Q38 : Réponse C

39. Les matrices M et N sont triangulaires supérieures, donc leurs valeurs propres sont leurs éléments diagonaux. Par suite, leur spectre est réduit à $\{0\}$: la réponse C est fausse

Si elles étaient diagonalisables, elles seraient semblables donc égales à la matrice nulle, ce qui n'est pas : la réponse A est fausse.

La réponse B est exacte, puisque d'après le théorème de Cayley-Hamilton, les matrices D^k sont toutes combinaisons linéaires de I_3 , D et D^2 .

(N.B : le théorème de Cayley-Hamilton n'est pas au programme PC !)

Pour la question D, il faut lire bien sûr : « M et D , respectivement N et D » au lieu de « A et D , respectivement B et D fg...

Il suffit alors d'écrire $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$ puis les relations $MD = DM$ et $ND = DN$ pour obtenir les relations de la réponse D.

Q39 : Réponses B,D

40. Les réponses A et B sont fausses ; il suffit de reprendre l'exemple déjà donné à la question 37 : $A = B = D$ avec $P = Q = X \dots$

Les réponses C et D sont fausses également ; on prend ici comme exemple les matrices $A = M$ et $B = N$ précédentes. S'il existe deux polynômes P et Q de degré ≤ 2 tels que $M = P(D)$ et $N = Q(D)$ alors, d'après la

question précédente, $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Je vous laisse le soin de faire les calculs pour vérifier que deux égalités de la forme $\alpha I_3 + \beta D + \gamma D^2 = M$ et $\alpha' I_3 + \beta' D + \gamma' D^2 = N$ sont incompatibles (écrire simplement les systèmes obtenus).

Q40 : Réponse E (aucune réponse exacte)