ICNA 2004 - optionnelle

PARTIE I

1 2 On calcule directement $u_n + i v_n = \int_0^\pi e^{ax} e^{inx} dx = \int_0^\pi e^{(a+in)x} dx = \left[\frac{1}{a+in} e^{(a+in)x}\right]_0^\pi$

soit $u_n + i v_n = \frac{1}{a+in}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right] = \frac{a-in}{a^2+n^2}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right] \Rightarrow u_n = \frac{a}{a^2+n^2}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right]$

$v_n = \frac{-n}{a^2+n^2}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right]$

d'où : dans 1 : réponse c) (réponse juste, mais alambiqué : le $[n \sin nx]_0^\pi$ n'est pas faux, puisqu'il est nul !) et dans 2 réponse d) et b) (après calcul, b) donne la m̂ chose)

---

3 $u_n = \frac{a}{a^2+n^2}\left[(-1)^n e^{a\pi} - 1\right]$ donc $|u_n| \leq \frac{|a|}{a^2+n^2}(e^{a\pi}+1)$: réponse b)

$v_n = \frac{1}{a^2+n^2}\left[(-1)^{n+1} n e^{a\pi} + n\right]$ donc $|v_n| \leq \frac{1}{a^2+n^2}(1+e^{a\pi})n$: réponse d)

---

4 $v_{2k} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{2k}\left[1 - e^{a\pi}\right]$: réponse a)

---

5 D'après les majorations du 3), il est clair que : $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$

d'où : réponse c)

---

6 a) est fausse (classique !) ; b) est fausse : $\sum \frac{1-e^{a\pi}}{2k}$ est divergente (mais $\sum v_{2k}$ a justement m̂ nature que cette série).

On a : $v_n = \frac{1}{a^2+n^2}(-1)^{n+1} n e^{a\pi} + \frac{n}{a^2+n^2} = \frac{1}{n^2\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)}(-1)^{n+1} n e^{a\pi} + \frac{n}{a^2+n^2}$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{a^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(-1)^{n+1} n e^{a\pi} + \frac{n}{a^2+n^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{a\pi}}_{\text{t.g. d'une série CV}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{t.g. d'une série CV}} + \underbrace{\frac{n}{a^2+n^2}}_{\text{t.g. d'une série divergente}}$$

Donc la réponse exacte est c

(⚠ : d) est évidemment fausse, comme le prouve l'exemple de $\sum \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)}_{a_n}$

où l'on a bien $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, t.g. d'une série CV, mais $\sum a_n$ diverge !!)

(7) $|u_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la réponse c) est vraie. a) est fausse $\left(u_n \sim (-1)^n \frac{e^{a\pi}-1}{n^2}\right)$ (2)

et d) est fausse. Enfin, b) est fausse : exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est alterné et aussi ACV !

PARTIE II

(8) Réponse : a) !

(9) Pour $u=-1$: $f(x) = \frac{1}{1-\cos x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^2}$ donc a) b) sont fausses

Pour $u=1$: $f(x) = \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi-h}{2}\right)}$ en posant $x=\pi-h$, avec $h\to 0^+$

$= \frac{1}{2\sin^2\frac{h}{2}} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{2}{h^2}$: Réponse : c)

---

(10) Réponse : d) ! (Rem : l'énoncé écrit : "la f° $(x-\pi)^\alpha$", ce qui est stupide)

(11) . Pour $\alpha > 1$, $x \mapsto (x-\pi)^\alpha$ est continue, donc intégrable sur n'importe quel intervalle !

. Quant à $\int_0^\pi (x-\pi)^\alpha dx$, elle est convergente ssi $\alpha > -1$ (intégrale de Riemann)

donc la seule réponse vraie est : a) (c) et d) sont complètement farfelues)

---

(12) . On sait que pour $u \in]-1,1[$, f est continue sur $[0,\pi]$ donc $\int_0^\pi f(x)dx$ existe

. D'après les équivalents trouvés en 9), et compte tenu du fait que $\int_0^a \frac{dt}{t^2}$ diverge,

$\int_0^\pi f(x)\,dx$ est divergente si $|u|=1$. Réponse : a)

---

(13) $x \mapsto t = \tan\frac{x}{2}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $]0,+\infty[$.

On a alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\cancel{dx} = 2\,\mathrm{Arctan}\,t$ d'où $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Donc.

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+u\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+u\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{t^2(1-u)+1+u}$$: donc a), b) fausses

$$= \frac{2}{1-u}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\frac{1+u}{1-u}}$$, avec $\frac{1+u}{1-u} > 0$

$$= \frac{2}{1-u} \times \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \left[\mathrm{Arctan}\; t\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-u^2}}$$: réponse c)

---

(14) $X^2 - 2X\cos x + 1 = (X-e^{ix})(X-e^{-ix})$ donc, si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, ce trinôme n'admet pas de racine réelle

et est donc alors strict. positif pour tt x

La seule réponse exacte est donc c)

---

15 D'après ce qui précède, si $|\lambda|<1$, $\lambda^2-2\lambda\cos x+1$ ne peut s'annuler et ce, pour tt x donc les réponses b) et d) sont les bonnes. (Rem : si $|\lambda|>1$, $\lambda^2-2\lambda\cos x+1$ ne s'annule pas non plus...)
Ds les cas $|\lambda|<1$ ou $|\lambda|>1$, h est C^0 ...!

---

16 Dire que $\int_0^\pi h(x)\cos nx\,dx$ existe implique $|\lambda|<1$ ou $|\lambda|>1$ (en effet, les seules racines réelles possibles du trinôme sont ± 1 ; dans le cas $\lambda=1$, par exemple, on a : $h(x)=\dfrac{1}{2(1-\cos x)}$ qui n'est pas intégrable sur $]0,\pi]$, voir question 12.

- Dans ces cas, $h(x)>0$: la réponse a) est vraie. (et b fausse !) d'après 14.
- c) est évidemment stupide ! ($+I_0\leq -I_0 \Rightarrow I_0=0$ ...)
- h étant positive, on a : $|I_n| \leq \int_0^\pi h(x)|\cos nx|\,dx \leq \int_0^\pi h(x)\,dx = I_0$, et l'inégalité est stricte puisque la f : $x\mapsto|\cos nx|$ n'est pas constante égale à 1 sur $[0,\pi]$! Donc la réponse d) est vraie

---

17 $\bullet$ $I_0=\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\lambda^2-2\lambda\cos x+1} = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\lambda^2-2\lambda\cos x} = \frac{1}{1+\lambda^2}\int_0^\pi \frac{dx}{1-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\cos x} = \frac{1}{1+\lambda^2}\, g\!\left(\frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}\right)$

donc b) est vraie et, cpte tenu de 13 : $I_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}}}\times\dfrac{1}{1+\lambda^2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2}} = \dfrac{\pi}{|1-\lambda^2|}$

(Rem : si $u=\dfrac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$ avec $|\lambda|\neq 1$, on a bien $|u|<1$ ...) donc c) et d) sont fausses

---

18 . Réponse : a) (déjà fait)

$\bullet$ $\dfrac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1} = \underbrace{-1}_{\text{partie entière}} + \dfrac{a}{(X-e^{ix})} + \dfrac{b}{(X-e^{-ix})}$ avec $a = \left.\dfrac{(1-X^2)(X-e^{ix})}{(X-e^{ix})(X-e^{-ix})}\right|_{X=e^{ix}} = \dfrac{1-e^{2ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} = \dfrac{e^{ix}(e^{-ix}-e^{ix})}{e^{ix}-e^{-ix}} = -e^{ix}$

d'où $a=-e^{ix}$, $b=-e^{-ix}$ soit

$\dfrac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1} = -1 + \dfrac{-e^{ix}}{X-e^{ix}} + \dfrac{-e^{-ix}}{X-e^{-ix}} = -1 - \dfrac{1}{Xe^{-ix}-1} - \dfrac{1}{Xe^{ix}-1}$ d'où la réponse d) est fausse !

(19) • Cpte tenu de $\frac{1}{1-z} = \frac{1-z^n}{1-z} + \frac{z^n}{1-z} = \sum_{p=0}^{n-1} z^p + \frac{z^n}{1-z}$ (si $z \neq 1$)

on a : $\frac{1}{1-Xe^{ix}} = \sum_{p=0}^{n-1} X^p e^{ipx} + \frac{X^n e^{inx}}{1-Xe^{ix}}$ donc a) b) sont toutes deux fausses

• $\frac{1-X^2}{X^2-2X\cos x+1} = -1 + \frac{1}{1-Xe^{-ix}} + \frac{1}{1-Xe^{ix}} = -1 + \sum_{p=0}^{n-1} X^p(e^{ipx}+e^{-ipx}) + \frac{X^n e^{inx}}{1-Xe^{ix}} + \frac{X^n e^{-inx}}{1-Xe^{-ix}}$

$$= -1 + 2\sum_{p=0}^{n-1} X^p \cos px + X^n \left[\frac{e^{inx}(1-Xe^{-ix}) + e^{-inx}(1-Xe^{ix})}{X^2-2X\cos x+1}\right]$$

$$= -1 + 2\sum_{p=0}^{n-1} X^p \cos px + X^n \left[\frac{e^{inx}+e^{-inx} - X(e^{i(n-1)x}+e^{i(-n+1)x})}{X^2-2X\cos x+1}\right]$$

$$= 1 + 2\sum_{p=1}^{n-1} X^p \cos px + X^n \left[\frac{2\cos nx - 2X\cos(n-1)x}{X^2-2X\cos x+1}\right]$$

donc d) est fausse (il manque 1). Rem : c'était visiblement faux en faisant $X \to 0$ donc pas besoin de calcul pour répondre !

---

(20) Bizarre bizarre... Je me demande si la bonne déf. n'est pas $h(\lambda) = \int_0^\pi \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2-2\lambda\cos x+1}\,dx$ sinon la suite n'a aucun sens. Si l'on choisit cela, alors

$$h(\lambda) = \int_0^\pi \left[1 + 2\sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \cos px + \lambda^n \frac{2\cos nx - 2\lambda\cos(n-1)x}{\lambda^2-2\lambda\cos x+1}\right] dx$$

$$= \pi + 2\sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_0^\pi \cos px\,dx + 2\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1})$$ donc a) b) sont fausses (de toute façon)

On a : $h(\lambda) = (1-\lambda^2)\int_0^\pi h(x)\,dx = (1-\lambda^2) I_0 = \pi \cdot \frac{1-\lambda^2}{|1-\lambda^2|}$

et la relation précédente donne : $\pi \cdot \frac{1-\lambda^2}{|1-\lambda^2|} = 2\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1})$ (les $\int_0^\pi \cos px\,dx$ sont nulles)

Soit : $\lambda^n (I_n - \lambda I_{n-1}) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } |\lambda| < 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } |\lambda| > 1 \end{cases}$ donc c) d) sont fausses

---

Rem : Cpte tenu des résultats, 17. c) était exacte si on supposait $|\lambda| < 1$ et 20 c) aussi dans ce cas...

Cpte tenu de la formulation de la question 15, je me demande si l'hyp. $|\lambda| < 1$ n'a pas été "oublié" ds l'énoncé !

21 On a : $\lambda^n(I_n - \lambda I_{n-1}) = \varepsilon.\frac{\pi}{2}$ (pour $n \geq 1$, avec $\varepsilon = +1$ si $|\lambda|<1$
$\varepsilon = -1$ si $|\lambda|>1$)

En supposant $\lambda \neq 0$ (je n'ai rien vu de tel dans l'énoncé), on obtient :

$$I_n - \lambda I_{n-1} = \varepsilon.\frac{\pi}{2\lambda^n}$$

Soit
$$I_1 - \lambda I_0 = \frac{\varepsilon\pi}{2} \times \frac{1}{\lambda}$$
$$I_2 - \lambda I_1 = \frac{\varepsilon\pi}{2} \times \frac{1}{\lambda^2}$$
$$\vdots$$
$$I_{n-1} - \lambda I_{n-2} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \times \frac{1}{\lambda^{n-1}}$$
$$I_n - \lambda I_{n-1} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \times \frac{1}{\lambda^n}$$

En multipliant la $(n-1)$-ème égalité par λ, puis la $(n-2)$-ième par λ^2 etc.., jusqu'à la 1ère par λ^{n-1}, et en additionnant le tout, il reste :

$$I_n - \lambda^n I_0 = \frac{\varepsilon\pi}{2}\left(\lambda^{n-2} + \lambda^{n-4} + \dots + \frac{1}{\lambda^{n-2}} + \frac{1}{\lambda^n}\right)$$

ce qu'on pourrait regrouper en $\sum_{p=0}^{q-1}\left(\lambda^{2p} + \frac{1}{\lambda^{2p}}\right)$!

d'où, puisque $I_0 = \varepsilon.\frac{\pi}{1-\lambda^2}$:

$$\begin{cases} I_{2q} = \varepsilon\left[\frac{\lambda^{2q}\pi}{1-\lambda^2} + \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{p=1}^{q-1}\left(\lambda^{2p} + \frac{1}{\lambda^{2p}}\right) + 1 + \frac{1}{\lambda^{2q}}\right\}\right] \\ I_{2q+1} = \varepsilon\left[\frac{\lambda^{2q+1}\pi}{1-\lambda^2} + \frac{\pi}{2}\left\{\sum_{p=1}^{q-1}\left(\lambda^{2p+1} + \frac{1}{\lambda^{2p+1}}\right) + \frac{1}{\lambda^{2q+1}}\right\}\right] \end{cases}$$

donc, même sans tenir compte du ε, b) est fausse (a) aussi d'ailleurs)

On a bien sûr, qd $n \to +\infty$, $I_n \to \pm\infty$ (que $|\lambda|<1$ ou $|\lambda|>1$, le $\pm$ étant le signe de ε)
puisque, si $|\lambda|>1$, $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \varepsilon.\frac{\lambda^n\pi}{1-\lambda^2}$ et, si $|\lambda|<1$, $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \varepsilon.\frac{\pi}{2\lambda^n}$!
Donc c) d) sont fausses.

---

22 h est 2π-périodique et paire sur un domaine (ou ...) donc aucune réponse exacte

---

23 . h est évidemment C^∞ sur son domaine, qui est : $\mathbb{R}$ si $|\lambda| \neq 1$, $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ si $\lambda = 1$, et $\mathbb{R} - \{\pi + 2\pi\mathbb{Z}\}$ si $\lambda = -1$. Donc a) b) sont fausses
. Qd h' existe, on a : $h'(x) = \dfrac{-2\lambda \sin x}{(\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1)^2}$ donc c) est vraie

---

24 Toutes les réponses sont fausses ! Ds a), on ne suppose pas la f° périodique !
Ds b), si on prend la fonction égale à : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, sa série de Fourier est nulle, donc n'est pas égale à f (bien que f soit 2π-p. et continue par morceaux !)

Enfin, c) et d) sont fausses, contre le modèle des exemples vus en cours !

---

(25) a) b) sont fausses ! En effet, pour $|\lambda|<1$, h est 2π-périodique et C^∞ (~~sur~~ $\mathbb{R}$) donc développable en série de Fourier (d'après le th. de Dirichlet) et, d'après ce même théorème, sa série de Fourier converge vers h (et même normalement, car h est C^1)
Donc c) d) sont fausses aussi

---

(26) h étant paire, on a $b_n = 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\cos nx\,dx$
donc aucune réponse exacte ! (encore !)

---

(27) On a $a_n = \frac{1}{\pi} I_n$, donc $h(x) = \frac{1}{2\pi} I_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \cos nx$, donc aucune réponse exacte !

PARTIE III

(28). a) b) sont trivialement fausses.
- dans c) : $2V_1 - 3V_2 = V_3$ donc (V_1, V_2, V_3) liée :
- dans d) (V_1, V_2, V_3) est clairement libre donc seule d) est vraie.

---

(29) • $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 5 & -6 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ donc a) b) sont fausses

• La base $\mathcal{B}_1$ est donc (V_1, V_2, V_3) précédente avec $V_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $V_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $V_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$AV_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = -V_1$ $AV_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = V_2$ et $AV_3 = \begin{pmatrix}4\\-5\\-3\end{pmatrix} = 3V_1 + 2V_2 + V_3$ d'où $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où c) est vraie

---

(30) A' (semblable à A) étant triang. sup, les vp de A' sont $1, 1, -1$. Réponse : c)

---

(31) Réponse : a)

c) est fausse : les valeurs propres simples est une condition suffisante de diagonalisation !

d) est fausse : En effet : $A' - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\mathrm{Ker}(A-I)$ est de dimension 1, $\neq$ de l'ordre de multiplicité de la v.p. 1

---

(32) • On a : $A' = P^{-1}AP$ donc a) b) sont fausses
- c) est évidemment fausse ! (elle l'est déjà pour $n=0$!)
- d) est fausse ! (A^{2k+1} est incorrecte pour $k=0$!)

PARTIE IV

(33) • $\cos(n+2)x + \cos nx = 2\cos(n+1)x\cos x$ d'où $P_{n+2}(\cos x) + P_n(\cos x) = 2\cos x\, P_{n+1}(\cos x)$

soit : $P_{n+2}(X) + P_n(X) = 2X P_{n+1}(X)$ (l'égalité ci-dessus étant vraie pour une infinité de valeurs)

Donc a) et b) fausses

• $\cos nx = \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos x)^{n-k}(i\sin x)^k\right)$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n} C_n^k (\cos x)^{n-k}(i\sin x)^k = \sum_{0\leq 2p\leq n} C_n^{2p}(\cos x)^{n-2p}(-1)^p(\sin^2 x)^p$$

$$= \sum_{0\leq 2p\leq n} C_n^{2p}(\cos x)^{n-2p}(-1)^p(1-\cos^2 x)^p$$

Soit $P_n = \sum_{0\leq 2p\leq n} C_n^{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p$: réponse d)

---

(34) • En faisant $x = \frac{\pi}{2}$, on a $P_n(0) = \cos\frac{n\pi}{2}$ donc a) fausse.

• En faisant $x = \pi$, on a $P_n(-1) = \cos n\pi = (-1)^n$ donc b) fausse

[par contre, il est vrai que P_n est de la parité de n : récurrence..]

• $P_{2n}(0) = \cos\frac{2n\pi}{2} = (-1)^n$. De plus, en dérivant la relation $P_n(\cos x) = \cos nx$ p.r. à x

on obtient : $-\sin x\, P_n'(\cos x) = -n\sin nx$, donc pour $x = \frac{\pi}{2}$: $P_n'(0) = -n\sin n\frac{\pi}{2}$, d'où

$\cancel{P_{2n}'(0) = -n\sin n\pi}$ $P_{2n+1}'(0) = -(2n+1)\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (2n+1)\cos n\pi = (-1)^n(2n+1)$

Donc c) vraie

• En faisant $x = \pi$: $0\, P_n'(-1) = 0$! Mais : pour $x \neq 0\,[\pi]$: $P_n'(\cos x) = -n\frac{\sin nx}{\sin x}$

donc $P_n'(-1) = \lim_{x\to\pi} \frac{-n\sin nx}{\sin x} = \lim_{h\to 0} \frac{-n\sin(n\pi+nh)}{\sin(\pi+h)} = \lim_{h\to 0} (-1)^n n\frac{\sin nh}{-\sin h} = (-1)^{n+1}n^2$.

(P_n est C^∞ !)

Donc d) est fausse.

---

(35) $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X^2-1$ ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$), $P_3 = 4X^3 - 3X$ ($\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$)

et, par réc. simple, on montre que le terme dominant de P_n (pour $n\geq 1$) est $2^{n-1}X^n$.

Donc réponse a)

---

(36) On a : $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$ donc toutes les réponses sont fausses !

37) M_n est triangulaire, avec sur la diagonale les coeff. dominants des S_k ($0\leq k\leq n$).
Donc $\det M_n = 1\times 1\times 2\times\cdots\times 2^{n-1} = 2^{1+2+\cdots+(n-1)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$: réponse d)

---

38), Rem : On vérifierait facil^t que Φ_n est bien un endomorphisme de E_n (i.e. linéaire et, $\forall P\in E_n$, $\Phi_n(P)\in E_n$)

• B_n est une matrice $n+1\times n+1$. On a : $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $\Phi_n(X^k)=(X^2-1)k(k-1)X^{k-2}+kX^k+\begin{cases}1 \text{ si } k=0\\ 0 \text{ si } k\neq 0\end{cases}$

Soit : $\Phi_n(1)=1$; $\Phi_n(X)=X$; $\Phi_n(X^2)=4X^2-2$ ... $\Phi_n(X^k)=k^2X^k-k(k-1)X^{k-2}$ pour $k\geq 2$

B_n est donc triangulaire supérieure et $\det B_n=\prod_{k=1}^{n}k^2=(n!)^2$.

Enfin, on voit que le s.e.p. associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}(1,X)$, de dimension 2, et que les autres valeurs propres sont distinctes. Ainsi, $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\dim E_{k^2}\geq 1$ et, puisque $\bigoplus E_\lambda = E_n$, on a : $\forall k\in[\![2,n]\!]$, E_{k^2} de dim 1. Final^t, on a bien $E_n = \bigoplus_{\lambda\in Sp(\Phi_n)} E_\lambda$ d'où Φ_n diagonalisable. Conclusion : Réponse c ; la réponse d) est vraie également (cf. cours)

---

39) $P_n(\cos x)=\cos nx \Rightarrow -\sin x\, P_n'(\cos x)=-n\sin nx$

$\Rightarrow \sin^2 x\, P_n''(\cos x)-\cos x\, P_n'(\cos x) = -n^2\cos nx$

Donc $(1-\cos^2 x)P_n''(\cos x)-\cos x\, P_n'(\cos x)+n^2P_n(\cos x)=0$. Cela étant vrai pour une infinité de valeurs de $\cos x$, on a : $(1-X^2)P_n''-XP_n'+n^2P_n=0$

D'où : $\Phi_n(P_n)=n^2P_n+P_n(0)=n^2P_n+\cos\frac{n\pi}{2}$: réponse c

---

40) M_n est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$

B_n est la matrice de Φ_n dans la base $\mathcal{B}_c$, A_n celle dans la base $(P_0,\ldots,P_n)$

Donc : $A_n=M_n^{-1}B_nM_n$; de plus, on a : $\Phi_n(P_n)=n^2P_n+\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)P_0$, donc

A_n est triang. supérieure $\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots \\ & 1 & & \\ & & 2^2 & \\ 0 & & & \ddots \ n^2\end{pmatrix}$ - la seule réponse correcte est donc c

---

~FIN~