

CORRIGÉ ICNA Épreuve obligatoire 2012

PARTIE I (= ENAC 2005 !)

Le résultat admis par l'énoncé n'est pas bien difficile à démontrer; en effet, on peut étudier la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; on vérifie facilement qu'elle est strictement décroissante de $+\infty$ à 0^+ , donc il existe un et un seul $x > 0$ tel que $\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{a}$ soit $x = f_a(x)$.

1. C. Il est préférable de répondre d'abord à cette question, afin d'étudier un peu le comportement de ℓ_a lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.

En posant, pour $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, on a dit plus haut que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $+\infty$ à 0^+ , donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. ℓ_a est la solution de l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{a}$ donc, plus simplement : $\ell_a = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)$. La fonction φ^{-1} étant strictement décroissante (car φ l'est) et l'application $a \mapsto \frac{1}{a}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application $a \mapsto \ell_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; de plus, $\lim_{a \rightarrow 0^+} \ell_a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(x) = 0^+$ et $\lim_{a \rightarrow +\infty} \ell_a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{-1}(x) = +\infty$.

Cependant, la réponse C. est inexacte, car son énoncé mentionne « $a \mapsto \ell_a$ croissante sur l'intervalle fermé $[0, +\infty[$ », alors qu'il est clairement indiqué que a est strictement positif; la fonction est donc croissante (strictement) sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

Comme souvent à l'ICNA, on se demande s'il s'agit d'une coquille ou d'un piège...

- A. Essayons de comprendre d'où viennent ces inégalités :

Posons $f(x) = e^{-x}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la formule de Taylor avec reste intégrale donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

soit ici :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt.$$

On en déduit que, en posant $P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, on a $e^{-x} - P_n(x)$ du signe de $(-1)^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

En particulier :

$$\forall x \geq 0, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (\text{avec inégalités strictes si } x > 0)$$

(cette inégalité est assez connue et peut se démontrer aussi par de simples études de fonctions, mais j'ai préféré expliquer le mécanisme général).

Revenons à la question posée : ici, $\ell_a > 0$ et $\ell_a = ae^{-\ell_a}$ donc $a = \frac{\ell_a}{e^{-\ell_a}}$. D'après, ce qui précède,

lorsque $1 - \ell_a > 0$, on a : $\frac{1}{1 - \ell_a + \frac{\ell_a^2}{2}} < \frac{1}{e^{-\ell_a}} < \frac{1}{1 - \ell_a}$, et en multipliant cette inégalité par $\ell_a > 0$, on

obtient celle de la réponse A.

Mais cette inégalité n'est vérifiée que lorsque $\ell_a \in]0, 1[$, soit (vérification facile) $a \in]0, e[$! La réponse A. est donc finalement inexacte.

Il était assez évident que la réponse A est inexacte dès que $\ell_a > 1$ puisqu'elle conduit alors à $a < 0$. Encore faut-il vérifier que le cas $\ell_a \geq 1$ est possible, et c'est pour cette raison que nous avons commencé par la question C. Cela étant fait, on pouvait répondre à la question A. sans faire tous les calculs ci-dessus, que j'ai faits uniquement par curiosité...

- B. L'inégalité de la question B. est inexacte : en effet, la relation $a = \ell_a e^{\ell_a}$ implique bien $a > \ell_a$ puisque $e^{\ell_a} > 1$. Mais l'inégalité proposée : $a < \ell_a + \frac{\ell_a^2}{2}$ signifierait $e^{\ell_a} < 1 + \frac{\ell_a}{2}$, ce qui est faux pour $\ell_a > 0$!
- D. La relation $\ell_a = ae^{-\ell_a}$ implique $\ln(\ell_a) = \ln a - \ell_a$ d'où $\frac{\ln(\ell_a)}{\ell_a} = \frac{\ln a}{\ell_a} - 1$. Or $\lim_{a \rightarrow +\infty} \ell_a = +\infty$ donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ell_a)}{\ell_a} = 0$ d'où $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{\ell_a} = 1$, ce qui signifie bien que : $\ell_a \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \ln a$.

Conclusion :

Q1 : Réponse D

2. Supposons donc la suite (u_n) convergente (nécessairement vers ℓ_a par continuité de f_a).
- B. On peut considérer que la réponse à cette question est exacte lorsque $u_0 = \ell_a$. En effet, dans ce cas, la suite (u_n) est constante, et la relation $0 \sim 0$, quoique sans intérêt, n'est pas fautive...
- Supposons donc $u_0 \neq \ell_a$. f_a étant injective, il en résulte $u_n \neq \ell_a$ pour tout n .
- On a alors : $\frac{u_{n+1} - \ell_a}{u_n - \ell_a} = \frac{f_a(u_n) - f_a(\ell_a)}{u_n - \ell_a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'_a(\ell_a)$ par définition de la dérivée en un point.
- Or $f'_a(\ell_a) = -f_a(\ell_a) = -\ell_a \neq 0$ donc $u_{n+1} - \ell_a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-\ell_a)(u_n - \ell_a)$. Cela implique la réponse B.
- D. Si $u_0 = \ell_a$, la suite (u_n) est constante. Sinon, on a bien $\ell_a \leq 1$ (donc la réponse D. est exacte) :
- En effet, si l'on avait $\ell_a > 1$, puisque $f'_a(\ell_a) = -\ell_a$, il existerait, par continuité de f' , un voisinage V de ℓ_a et un réel $k > 1$ tels que, pour tout x dans V on ait $|f'(x)| \geq k$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on aurait alors :
- $$\forall x \in V, |f_a(x) - \ell_a| = |f_a(x) - f_a(\ell_a)| \geq k|x - \ell_a|$$
- Or puisque (u_n) converge vers ℓ_a , il existe un rang n_0 tel que $u_n \in V$ pour $n \geq n_0$. On aurait alors, pour $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - \ell_a| = |f_a(u_n) - \ell_a| \geq k|u_n - \ell_a|$ puis par récurrence $|u_n - \ell_a| \geq k^{n-n_0}|u_{n_0} - \ell_a|$. Il y a donc contradiction, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n-n_0} = +\infty$.

A.C. Des réponses fantaisistes. De toutes façons, il y a déjà deux réponses exactes...donc :

Q2 : Réponses B,D

3. A. Déjà, si $0 \leq x < y$, on a bien $f_a(x) > f_a(y)$ puisque f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite, le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un réel $c \in]x, y[$ tel que $f_a(x) - f_a(y) = f'_a(c)(x - y) = -f_a(c)(x - y) = f_a(c)(y - x)$. Puisque $c > x$ on a $f_a(c) < f_a(x)$, et l'on obtient donc la réponse A.
- B. La réponse B. est inexacte : pour $x = 0$ et $y = 1$ par exemple, elle donnerait $a - \frac{a}{e} < \frac{a}{e}$ soit $e < 2$, ce qui n'est pas...
- C. Inégalité fantaisiste...et fautive, par exemple si $y = \ell_a$ (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé, qui suppose seulement $y \leq a$...)
- D. Pour $x \neq \ell_a$, le théorème des accroissements finis appliqué entre x et ℓ_a donne l'existence de $c \in]x, \ell_a[$ (ou $]\ell_a, x[$) tel que $f_a(x) - f_a(\ell_a) = f'_a(c)(x - \ell_a)$ donc $f_a(x) - \ell_a = -f_a(c)(x - \ell_a)$. On en déduit $|f_a(x) - \ell_a| = f_a(c)|x - \ell_a|$. Or, puisque $c \neq 0$, $f_a(c) = ae^{-c} < a$ donc on aura bien $|f_a(x) - \ell_a| < a|x - \ell_a|$, ce qui est (presque) la réponse D.
- Cependant, cette inégalité stricte est évidemment fautive pour $x = \ell_a$, cas qui n'est pas exclu par l'énoncé qui suppose seulement $x < a$, et on sait seulement que $\ell_a < a$...**

En conclusion :

Q3 : Réponse A

4. **A.D** Si $a < 1$, alors $\|f'_a\|_\infty \leq a < 1$ donc f_a est contractante et la suite (u_n) converge vers ℓ_a pour tout $u_0 \geq 0$ d'après le théorème du point fixe...

Mais celui-ci n'étant plus au programme, nous allons le redémontrer dans ce cas particulier : pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité des accroissements finis donne $|f_a(x) - f_a(y)| \leq \|f'_a\|_\infty |x - y| \leq a |x - y|$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \ell_a| = |f(u_n) - f(\ell_a)| \leq a |u_n - \ell_a|$ ce qui donne par une récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell_a| \leq a^n |u_0 - \ell_a|.$$

Puisque $a < 1$, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_a$.

- B.C.** Il y a déjà deux réponses exactes... De toutes façons, on vient de voir que (u_n) tend vers ℓ_a donc la réponse B. est fausse. De plus, puisque f_a est décroissante, le cours sur les suites récurrentes nous indique que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variations contraires, donc C. est inexacte.

Q4 : Réponses A,D

5. Aucune difficulté pour cette question, il suffit de lire les réponses...

Q5 : Réponses B,D

6. $F = f_a \circ f_a$ avec f_a continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc F est définie sur $\mathbb{R}_+$, et cela, pour tout $a > 0$.

Q6 : Réponse E : aucune réponse exacte.

7. **A.B.** F_a est la composée de deux fonctions strictement décroissante, elle est donc strictement croissante sur son domaine, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+$.

- C.D.** D'après le cours sur la dérivée d'une fonction composée, F_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (il n'y a pas de problème en 0, on ne voit donc pas pourquoi il est mentionné $]0, +\infty[$ dans la réponse D, mais cela n'est pas faux...), et :

$$\forall x \geq 0, F'_a(x) = f'_a(x) \cdot f'_a(f_a(x)) = (-f_a(x))(-f_a[f_a(x)]) = f_a(x) \cdot F_a(x).$$

On aura alors : $F'_a(\ell_a) = f_a(\ell_a) \cdot f_a \circ f_a(\ell_a) = \ell_a^2$.

En conclusion :

Q7 : Réponses A,D

8. **A.B.** Posons $\varphi(x) = x + f_a(x) = x + ae^{-x}$. $\varphi'(x) = 1 - ae^{-x}$, donc $\varphi'(x) = 0 \iff x = \ln a$. On est donc conduit aux deux tableaux suivants :

Si $a \leq 1$:

x	0	a
$\varphi'(x)$	$1 - a$	+
$\varphi(x)$	a	$a + ae^{-a}$

Si $a > 1$:

x	0	$\ln a$	a
$\varphi'(x)$	$1 - a$	-	+
$\varphi(x)$	a	$1 + \ln a$	$a + ae^{-a}$

La réponse A. est donc exacte seulement dans le cas $a \leq 1$, alors que la réponse B. ne l'est que dans le cas $a > 1$.

- C.D.** Là encore, on étudie les variations de F'_a . Puisque

$$F''_a(x) = f'_a(x) \cdot F_a(x) + f_a(x) \cdot F'_a(x) = -f_a(x) \cdot F_a(x) + f_a(x)^2 \cdot F_a(x) = \underbrace{f_a(x) \cdot F_a(x)}_{\geq 0} (-1 + ae^{-x})$$

on a là encore deux tableaux possibles :

Si $a \leq 1$:

x	0	a
$F_a''(x)$	-	
$F_a'(x)$	$a^2 e^{-a}$	$\searrow$

Si $a > 1$:

x	0	$\ln a$	a
$F_a''(x)$	+	0	-
$F_a'(x)$	$a^2 e^{-a}$	a/e	$\searrow$

La réponse D. est donc exacte seulement dans le cas $a \leq 1$, alors que la réponse C. ne l'est que dans le cas $a > 1$.

On notera aussi, pour ces questions, l'inutilité complète de l'hypothèse $x \in [0, a]$; on aurait pu tout aussi bien étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$. En résumé, on conclut :

Q8 : Réponse E : aucune réponse exacte.

9. Notons déjà (même si cela ne sert pas) que, puisque $a < e$, on a $\ell_a < 1$, puisque l'application $a \mapsto \ell_a$ est strictement croissante et que $\ell_e = e$.

Notons aussi, d'après l'étude précédente (quitte à l'étendre sur $\mathbb{R}_+$) que, puisque $a \geq 1$, on a $0 < F_a'(x) \leq \frac{a}{e}$ pour tout x réel.

La fonction f_a étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (intervalle stable), le cours nous apprend que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variations contraires. De plus, leur sens de variation dépend du signe de $u_2 - u_0$, c'est-à-dire de $F_a(u_0) - u_0$. Si on pose $\varphi(x) = F_a(x) - x$ pour $x \geq 0$, on aura $\varphi'(x) = F_a'(x) - 1 \leq \frac{a}{e} - 1 < 0$, donc φ est strictement décroissante ; puisqu'elle s'annule en ℓ_a , on a le tableau de signes :

x	0	ℓ_a	$+\infty$
$F_a(x) - x$	+	0	-

d'où l'on peut déduire : si $u_0 < \ell_a$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante, la situation étant inversée lorsque $u_0 > \ell_a$.

On a vu que $F_a'(x) \leq \frac{a}{e}$ pour tout x réel. On en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis, que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $|F_a(x) - F_a(y)| \leq \frac{a}{e} |x - y|$.

Or les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vérifient les relations de récurrence $u_{2n+1} = F_a(u_{2n-1})$ et $u_{2n} = F_a(u_{2n-2})$ pour $n \geq 1$. On en déduit :

$$\forall n \geq 1, |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{a}{e} |u_{2n-1} - u_{2n-2}|$$

ce qui conduit par récurrence à l'inégalité $|u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n |u_1 - u_0|$ pour tout entier n . Puisque $0 < \frac{a}{e} < 1$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$, donc, compte tenu des sens de variations précisés plus haut, les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune, qui est solution de l'équation $F_a(x) = x$, c'est-à-dire vers ℓ_a . Il s'agit de la réponse B.

Examinons maintenant les autres réponses :

A. Majoration et réponse fantaisistes...

C. Pour tout entier $n \geq 1$ on a, à l'aide des remarques précédentes :

$$|u_{2n+1} - \ell_a| = |F_a(u_{2n-1}) - F_a(\ell_a)| \leq \left(\frac{a}{e}\right) |u_{2n-1} - \ell_a|$$

d'où l'on déduit par récurrence : $|u_{2n+1} - \ell_a| \leq \left(\frac{a}{e}\right)^n |u_1 - \ell_a|$. Cette réponse est donc correcte.

D. Réponse fausse, puisque l'on a vu que le sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à ℓ_a .

Conclusion :

Q9 : Réponses B,C

10. **A.B.** Pour $a = e$, l'étude du signe de $F_a(x) - x$ faite dans la question précédente reste exacte. Le signe de $F_a(x) - x$ dépend de la position de x par rapport à ℓ_a , donc les deux réponses proposées sont fausses.
- C.D** Dans le cas $a = e$, on a vu que $\ell_a = 1$. D'après le tableau établi à la question précédente, le signe de $F_a(x) - x$ est celui contraire de $x - \ell_a = x - 1$, donc $(x - 1)(F_a(x) - x) \leq 0$ et il y a inégalité stricte si $x \neq 1$. C'est la réponse D.

Q10 : Réponse D

11. La suite (v_n) définie ici n'est rien d'autre que la suite (u_{2n}) . D'après ce qui a déjà été dit, cette suite est croissante si $u_0 \leq 1$ et décroissante sinon. Dans le premier cas, elle est majorée par 1 et dans le second cas, elle est minorée par 1. Dans les deux cas, elle converge donc, vers une solution de l'équation $F_a(x) = x$ donc vers 1. En conclusion :

Q11 : Réponse B

12. On démontre de la même façon que la suite extraite (u_{2n+1}) converge aussi vers 1. Donc :

Q12 : Réponse D

13. La limite proposée n'a rien d'immédiat, puisque, comme on l'a vu ci-dessus, l'une des expressions $u_n - 1$ et $u_{n+1} - 1$ tend vers 0^+ et l'autre vers 0^- . Il s'agit donc d'une belle forme indéterminée.

On a, pour $a = e$: $f_e(x) = e^{-x+1}$ donc $f_e(1) = 1$, $f'_e(1) = -1$ et $f''_e(1) = 1$. D'après la formule de Taylor-Young on aura donc, au voisinage de 1 :

$$f_e(x) - f_e(1) = -(x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2)$$

ce qui, appliqué à $x = u_n$ donne :

$$u_{n+1} - 1 = -(u_n - 1) + \frac{(u_n - 1)^2}{2} + o((u_n - 1)^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1} - 1} &= -\frac{1}{u_n - 1} \frac{1}{1 - \frac{u_n - 1}{2} + o((u_n - 1))} \\ &= -\frac{1}{u_n - 1} \left(1 + \frac{u_n - 1}{2} + o((u_n - 1)) \right) = -\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1} - 1} + \frac{1}{u_n - 1} \right) = -\frac{1}{2}$.

Tout cela pour rien !

Q13 : Réponse E : aucune réponse exacte.

PARTIE II (= ENAC 2005 !)

14. Le plus simple pour répondre à toutes ces questions est de résoudre bêtement l'équation différentielle. Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est : $r^2 + 6r + 9 + \omega^2 = 0$, de racines quasiment évidentes $-3 \pm i\omega$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc l'ensemble des applications de la forme

$$x \mapsto e^{-3x} (a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)) \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

On cherche alors une solution particulière de la forme $x \mapsto Ce^{5ix}$ (puisque $5i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique). On trouve $(-25 + 30i + 9 + \omega^2)C = 1$ soit $C = \frac{1}{\omega^2 - (16 - 30i)} = \frac{1}{\omega^2 - z^2}$ en posant $z = 5 - 3i$.

L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est donc l'ensemble des applications de la forme :

$$x \mapsto e^{-3x} (a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)) + Ce^{5ix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{C} \text{ et } C \text{ comme ci-dessus.}$$

La condition $y(0) = y(2\pi)$ s'écrit alors : $a + C = e^{-6\pi} (a \cos(2\omega\pi) + b \sin(2\omega\pi)) + Ce^{10i\pi}$ soit :

$$b \sin(2\omega\pi) = a(e^{6\pi} - \cos(2\omega\pi)).$$

- A. Réponse fausse : la solution particulière $x \mapsto e^{5ix}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
- B. Réponse fausse : d'après le calcul ci-dessus, pour tout ω , les solutions sont toutes bornées (puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-3x} (a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x))) = 0$).
- C. Réponse exacte, en prenant $Y(x) = Ce^{5ix}$.
- D. Réponse exacte : par exemple la fonction $x \mapsto Ce^{5ix}$.

Q14 : Réponses C,D

15. La condition supplémentaire $y(0) = 0$ donne, en conservant les notations précédentes, $a = -C$. On doit donc avoir $b \sin(2\omega\pi) = -C(e^{6\pi} - \cos(2\omega\pi))$, ce qui n'est possible que si $\sin(2\omega\pi) \neq 0$ soit $2\omega \notin \mathbb{Z}$ soit encore, compte tenu de l'énoncé, $\omega \notin \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{9}{2}, 5 \right\}$. Dans ce cas, a et b seront déterminés de façon unique. Par conséquent :

Q15 : Réponses C,D

16. Pour $\omega = 4$, la relation $b \sin(2\omega\pi) = a(e^{6\pi} - \cos(2\omega\pi))$ conduit à $a = 0$ et b quelconque. L'ensemble $S(4)$ est donc l'ensemble des applications de la forme :

$$y : x \mapsto be^{-3x} \sin(4x) + \frac{1}{30i} e^{5ix} \quad \text{avec } b \in \mathbb{C}.$$

On a alors $y'(x) = be^{-3x} (-3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) + \frac{1}{6} e^{5ix}$ donc la condition $y'(0) = -\frac{1}{2}$ impose $b = -\frac{1}{6}$.

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $Y_1(x) = -\frac{1}{6} e^{-3x} \sin(4x) + \frac{1}{30} \sin(5x)$.

On aura ensuite $Y_1'(x) = \frac{1}{6} (e^{-3x} (-3 \sin(4x) + 4 \cos(4x)) + \cos(5x))$, et je ne vois pas très bien comment déterminer les points où cette dérivée s'annule ; en tout cas, ce ne sont pas ceux de l'énoncé !

On a donc seulement :

Q16 : Réponse A

REMARQUE : Cette « partie » II n'avait strictement aucun intérêt !

PARTIE III (= ICNA obligatoire 2006 !)

17. $\mathbb{R}_n[X]$ est d'après le cours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, de dimension $n+1$ (puisque une base en est : $(1, X, \dots, X^n)$).

Ce n'en est pas un sous-anneau (sauf lorsque $n = 0$ mais cela est exclu), puisque $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas stable par la multiplication.

En conclusion :

Q17 : Réponse C

18. f_α est trivialement linéaire et, en examinant les degrés : si $\deg P \leq k$ alors $\deg f_\alpha(P) \leq k$.

C'est donc bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, mais c'est bien sûr aussi une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Donc :

Q18 : Réponses C,D

19. On calcule : $f_\alpha(1) = 0$; $f_\alpha(X) = 1 + \alpha X$; $f_\alpha(X^2) = (2\alpha + 2)X^2$; $f_\alpha(X^3) = -3X^2 + (3\alpha + 6)X^3$.

La matrice de f_α dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ s'obtient en écrivant en colonnes les coordonnées des images de ces vecteurs par f_α . On a donc :

$$M_{(1,X,X^2,X^3)}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha + 1) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(\alpha + 2) \end{pmatrix}.$$

Les réponses proposées ici sont donc toutes inexactes.

Remarque : cependant, si on considère la base canonique écrite dans l'ordre $(X^3, X^2, X, 1)$, la matrice de f_α serait alors triangulaire inférieure ; mais rien n'est précisé, et cela ne semble pas être l'option du problème, compte tenu des questions suivantes...

Q19 : Réponse E : aucune réponse exacte.

20. Quel que soit l'ordre choisi pour la base canonique, aucune des matrices proposées ne convient (celles des réponses A. et B. s'en approchent, c'est pour cette raison que je pense que la base canonique doit être choisie dans l'ordre $(1, X, X^2, X^3) \dots$).

Q20 : Réponse E : aucune réponse exacte

21. La matrice étant triangulaire, les valeurs propres sont les éléments diagonaux donc :

Q21 : Réponse D

22. L'énoncé ne le dit pas, mais il faut supposer ici E de dimension finie !

Ce sont des questions de cours...

Q22 : Réponses B,D

23. Nous répondons ici en même temps aux questions 23 et 24.

D'après le cours, SI les valeurs propres de f_α sont distinctes, alors on est certain que f_α est diagonalisable. Cela sera le cas si $\alpha \notin \{-4, -3, -2, -1, 0\}$.

– Pour $\alpha = 0$: On a $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, donc 0 est valeur propre double. Mais le rang de M_0 est

égal à 3, donc $\dim \text{Ker } f_0 = 1$ d'après le théorème du rang. La dimension du sous-espace propre associée à la valeur propre 0 est égale à 1, donc n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre, donc f_0 n'est pas diagonalisable.

– Pour $\alpha = -1$: On a $M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, donc 0 est valeur propre double, les autres valeurs

propres étant simples. Ici, le rang de la matrice est 2 donc $\dim \text{Ker } f_{-1} = 2$ est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 et f_{-1} est diagonalisable.

– Pour $\alpha = -2$: On a $M_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc 0 et -2 sont ici valeurs propres doubles. Le

rang de M_{-2} est égal à 2 donc $\dim \text{Ker } f_{-2} = 2$, égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0. On

a aussi $M_{-2} + 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; cette matrice est de rang 2 donc $\dim \text{Ker}(f_{-2} + 2\text{Id}) = 2$ qui est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2.

La dimension des deux sous-espaces propres est donc égal à l'ordre de multiplicité des valeurs propres correspondantes, et f_{-2} est diagonalisable.

- Pour $\alpha = -3$: On a $M_{-3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, donc -3 est valeur propre double, les deux autres

valeurs propres étant simples. On calcule $M_{-3} + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 donc $\dim \text{Ker}(f_{-3} + 3\text{Id}) = 2$ qui est l'ordre de multiplicité de -3 , donc f_{-3} est diagonalisable.

Enfin, pour $\alpha = -4$, $M_{-4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. -6 est valeur propre double.

$M_{-4} + 6I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3 donc $\dim \text{Ker}(f_{-4} + 4\text{Id}) = 1 \neq 2$ et f_{-4} n'est pas diagonalisable.

Conclusion : f_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -4$. On en déduit :

Q23 : Réponse E : aucune réponse exacte.

Q24 : Réponse C

25. **A.B.** Si $\deg P = k$, on a vu que $\deg f_\alpha(P) \leq k$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(\{1, X, \dots, X^k\})$ sont donc stables par f_α , et la matrice M_α de f_α dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure. Elle est aussi, évidemment, d'ordre $n+1$ puisque $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Aucune des deux réponses n'est donc correcte.

Remarque : cependant, si l'on considère la base canonique écrite dans l'ordre $(X^n, \dots, X, 1)$ (ce qui n'est pas usuel), la matrice de f_α est alors triangulaire inférieure, et la réponse B. devient correcte...

- C.D.** Le terme d'indice (i, i) correspond à la coordonnée sur X^{i-1} (qui est le i -ème vecteur de base lorsque l'on écrit la base canonique dans l'ordre usuel) de l'image de X^{i-1} par f_α .

Or, pour $1 \leq i \leq n+1$,

$$f_\alpha(X^{i-1}) = (i-1)(i-2)X(X-1)X^{i-3} + (i-1)(1+\alpha X)X^{i-2} = (i-1)(\alpha+i-2)X^{i-1} + (i-1)(3-i)X^{i-2}$$

donc le terme d'indice (i, i) est $(i-1)(\alpha+i-2)$. Le même calcul donne aussi, pour $i \geq 2$, le terme d'indice $(i-1, i)$, qui vaut $(i-1)(3-i)$; par conséquent, pour $i \leq n$, le terme d'indice $(i, i+1)$ sera $i(2-i)$. Les autres coefficients sont nuls. Donc :

Q25 : Réponse D

26. **A.B.** La matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux, donc les $(i-1)(\alpha+i-2)$ pour $1 \leq i \leq n+1$, ou encore les $k(\alpha+k-1)$ pour $0 \leq k \leq n$. C'est la réponse A.

C.D Il existera (au moins) une valeur propre double s'il existe $k, k' \in \llbracket 0, n \rrbracket$, distincts, tels que $k(\alpha + k - 1) = k'(\alpha + k' - 1)$, soit :

$$0 = k(\alpha + k - 1) - k'(\alpha + k' - 1) = (k - k')(\alpha + k + k' - 1)$$

ce qui équivaut à $\alpha = 1 - (k + k')$: α est donc alors un entier compris entre 1 (strictement, car on ne peut pas avoir $k = k' = 0$) et $1 - 2n$ (strictement puisque on ne peut pas avoir $k = k' = n$), ce qui revient à dire que c'est un entier compris (au sens large) entre $2 - 2n$ et 0. C'est la réponse C.

Q26 : Réponses A,C

27. A.B. On reprend les calculs précédents : $k + k' = 1 - \alpha$, soit $k + k' = 2q + 2$. Les deux réponses proposées sont fausses.

D. Si $2q + 2 \leq n$, on a $\lambda_0 = \lambda_{2q+2} = 0$ d'après le calcul précédent, donc (sans tout lire), la réponse D est inexacte.

C. Supposons $2q + 2 > n$. Il faut trouver les couples $(k, k') \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tels que $k < k'$ et $k + k' = 2q + 2$. On doit avoir $k' = 2q + 2 - k > k$ donc $k < q + 1$, et $k = 2q + 2 - k' \geq 2q + 2 - n$. On trouve donc les couples :

$$(q, q + 2), (q - 1, q + 3), \dots, (2q + 2 - n, n)$$

soit $n - q - 1$ couples, donnant lieu à $n - q - 1$ valeurs propres doubles.

Les autres valeurs propres seront simples ; il y en a $(n + 1) - 2(n - q - 1) = 2q - n + 3$.

Q27 : Réponse C

28. A.D. On ne peut avoir $\lambda_k = k(\alpha + k - 1) = 0$ que pour $k = 0$ ou $k = 1 - \alpha$. Or cette dernière égalité n'est possible que si $1 - \alpha$ est un entier compris entre 0 et n , c'est-à-dire si α est un entier de l'intervalle $\llbracket 1 - n, 1 \rrbracket$. Cette valeur propre sera double lorsque $1 - \alpha \neq 0$ soit $\alpha \neq 1$.

Ainsi, si α n'est pas un entier de l'intervalle $\llbracket 1 - n, 0 \rrbracket$, 0 est valeur propre simple ; le sous-espace propre associé, c'est-à-dire $\text{Ker } f_\alpha$ est alors forcément de dimension 1.

Comme l'on a de plus $f_\alpha(1) = 0$, $\text{Ker } f_\alpha$ est donc la droite vectorielle formée des polynômes constants.

Les réponses A et D sont correctes (et l'on pouvait donc se dispenser de faire ce qui suit !).

B.C Lorsque α est un entier de l'intervalle $\llbracket 1 - n, 0 \rrbracket$, 0 est valeur propre double. Mais cela n'implique nullement que la dimension du sous-espace propre associé soit égale à 2 (elle est inférieure ou égale à 2 d'après le cours). On a d'ailleurs vu des cas où $\dim \text{Ker } f_\alpha = 1$ (questions 23 et 24).

Les deux réponses proposées sont donc fausses.

Q28 : Réponses A,D

29. Si $\alpha = 0$, on a $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, donc 0 est valeur propre double.

Mais $f_0(1) = 0$ et $f_0(X) = 1$, et pour tout $i \geq 2$ $f_0(X^i)$ est un polynôme de degré exactement i . Donc l'image de f_0 est $\text{Vect}(\{1, X^2, \dots, X^n\})$ et $\text{Ker } f_0 = \text{Vect}(\{1\}) = \mathbb{R}_0[X]$.

f_0 est donc de rang n ; f_0 n'est pas diagonalisable puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est de dimension 1 (la raison invoquée dans la question D est incorrecte). En conclusion :

Q29 : Réponse B

30. Lorsque $\alpha = -1$, les valeurs propres sont les $k(k - 2)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. 0 est donc valeur propre double ($\lambda_0 = \lambda_2 = 0$), les autres étant simples.

On a de plus $f_{-1}(1) = f_{-1}(X^2) = 0$, et les images par f_{-1} des X^k pour $k \neq 0, 2$ sont des polynômes de degré k .

On a donc $\text{Ker } f_{-1} = \text{Vect}(\{1, X^2\})$, de dimension égale à l'ordre de multiplicité de 0, donc f_{-1} est diagonalisable. De plus, $\text{rg } f_{-1} = (n + 1) - 2 = n - 1$.

Finalement :

Q30 : Réponses A,D

31. Avec les notations de l'énoncé, on a ici $\lambda_0 = \lambda_p = 0$. 0 est valeur propre double.

$\text{Ker } f_\alpha$ est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $X(X-1)P'' + [1 + (1-p)X]P' = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $x(x-1)y' + [1 + (1-p)x]y$ sur $]1, +\infty[$ (par exemple) sont les applications de la forme

$$x \mapsto C \exp \left(\int \frac{(p-1)x-1}{x(x-1)} dx \right) = C \exp \left(\int \left(\frac{1}{x} + \frac{p-2}{x-1} \right) dx \right) = C \exp (\ln x + (p-2) \ln(x-1)) = Cx(x-1)^{p-2}$$

donc les polynômes P de $\text{Ker } f_\alpha$ sont tels que

$$P' = CX(X-1)^{p-2} = C[(X-1) + 1](X-1)^{p-2} = C[(X-1)^{p-1} + (X-1)^{p-2}]$$

ce qui donne

$$P = C \left[\frac{(X-1)^p}{p} + \frac{(X-1)^{p-1}}{p-1} \right] + D \quad \text{avec } C, D \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\text{Ker } f_\alpha$ est le sous-espace vectoriel décrit dans la réponse C. Étant de dimension 2, qui est l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0, on en déduit que f_α est diagonalisable ; cependant, la justification donnée à la réponse A est inexacte.

Finalement :

Q31 : Réponse C

32. Le cas $\alpha = -4$ et $n = 3$ a déjà été traité en détails à la question 23.

Il est facile de vérifier, à l'aide de la matrice par exemple, que le *sous-espace propre* associé à la valeur propre -4 est la droite vectorielle de base $\{1 - 4X\}$ et que le *sous-espace propre* associé à la valeur propre -6 est la droite vectorielle de base $\{X^2\}$.

Cela ressemble donc fort aux réponses A et B.

Cependant, un vecteur propre n'étant pas nul, l'ensemble des vecteurs propres est bien sûr le sous-espace propre correspondant privé du vecteur nul, ce qui rend les réponses A et B inexactes.

Il est difficile de savoir si cela a été fait exprès et s'il s'agit alors d'un piège¹ particulièrement vicieux !

Q32 : Réponse E : aucune réponse exacte (ou A,B ?)

33. **A.** On sait que les valeurs propres sont les $(k-1)(\alpha+k-2)$ pour $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. λ_p est, d'après l'énoncé, une de ces valeurs, il n'y a pas de raison a priori (si ce n'est des raisons de notations) que cette valeur propre soit justement celle pour $k = p$, c'est-à-dire que l'on ait $\lambda_p = (p-1)(\alpha+p-2)$...D'ailleurs, pour $p = 1$ on obtiendrait $\lambda_1 = 0$, ce qui est exclu. La réponse est donc fausse.

Pour la suite, on considèrera donc que $\lambda_p = p(\alpha+p-1)$.

B. Cette réponse n'a pas de sens ! Ce sont les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_p[X]$ qui sont stables par f_α , les espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ n'ont rien à faire ici...

C.D. L'énoncé n'est (encore) pas très clair. Je pense qu'il faut considérer que λ_i désigne la valeur propre $\lambda_i = (i-1)(\alpha-i+2)$ avec $i \geq 1$ dans la question C, alors qu'il faut poser $\lambda_k = k(\alpha+k-1)$ avec $k \geq 0$ dans la question D. !! Cela ne facilite guère les choses...

La réponse C. ne peut de toutes façons pas être correcte, puisque la formule permet d'exprimer $a_1, \dots, a_{p-1}$ en fonction de a_p et ne permet pas d'obtenir a_0 ; il resterait donc deux coefficients a_p et a_0 inconnus, alors que le sous-espace propre est de dimension 1...

Nous allons donc examiner la réponse D, en notant, de façon uniforme, $\lambda_k = k(\alpha+k-1)$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. où je suis tombé...

Le polynôme donné par l'énoncé est vecteur propre de f_α pour la valeur propre λ_p si et seulement si , en écrivant les polynômes dans la base canonique :

$$M_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_p \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(il n'y a pas de « zéros » lorsque $p = n \dots$).

En posant, pour simplifier, $a_p = 1$, on obtient le système :

$$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \lambda_p a_i = \sum_{j=1}^{p+1} (M_\alpha)_{i+1,j} a_{j-1} = \lambda_i a_i + (1-i^2) a_{i+1}$$

car d'après la question 25 (réponse D), $(M_\alpha)_{i+1,i+1} = i(\alpha + i - 1) = \lambda_i$ et $(M_\alpha)_{i+1,i+2} = -(i-1)(i+1)$, les autres termes de la ligne étant nuls. On en déduit :

$$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, a_i = \frac{i^2 - 1}{\lambda_i - \lambda_p} a_{i+1}$$

ce qui donne, par itération :

$$\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, a_i = \frac{i^2 - 1}{\lambda_i - \lambda_p} \cdot \frac{(i+1)^2 - 1}{\lambda_{i+1} - \lambda_p} a_{i+2} = \dots = \frac{i^2 - 1}{\lambda_i - \lambda_p} \cdot \frac{(i+1)^2 - 1}{\lambda_{i+1} - \lambda_p} \dots \frac{(p-1)^2 - 1}{\lambda_{p-1} - \lambda_p}$$

puisque $a_p = 1$.

On a donc trouvé la superbe formule de la réponse D.

Q33 : Réponse D

REMARQUE : Il est clair que le jour du concours, il fallait laisser cette question de côté (comme certaines autres, d'ailleurs !)

PARTIE IV (= ICNA obligatoire 2006 !)

34. Toutes les réponses sont fausses !

En effet, f est bien continue et positive sur $[x, +\infty[$. Et si elle est intégrable, c'est parce que, par exemple, $f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$), avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ positive continue et intégrable au voisinage de $+\infty$, mais non pour les raisons fantaisistes évoquées.

Q34 : Réponse E : aucune réponse exacte.

35. Les trois premières réponses sont complètement fantaisistes. La dernière réponse est exacte, et l'explication donnée est correcte.

Q35 : Réponse D

36. L'équivalent $f(t) \sim \frac{1}{t}$ au voisinage de 0 permet de répondre facilement aux trois dernières questions. J'ai déjà répondu à la première.

Q36 : Réponses A,C

37. Si $x < 0$, l'écriture de l'intégrale impropre pose problème car la fonction à intégrer n'est pas définie sur tout l'intervalle $]x, +\infty[$ entier (ce cas est a priori exclu par le programme depuis un certain temps...)

Ce qui a été dit dans les trois questions précédentes prouve que F n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $A > 0$ et $x > 0$, on a $F(x) = \int_x^A f + \int_A^{+\infty} f = - \int_A^x f + K_A$. Puisque $x \mapsto \int_A^x f$ est la primitive de f s'annulant en A , il en résulte que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = -f(x)$.

Q37 : Réponses B,D

38. Déjà, $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ n'existe pas puisque $g(t) \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de 0, donc il est inutile de lire les deux premières questions !

Cependant, en intégrant par parties, on a pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{t} dt = \left[\frac{-e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} g(t) dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} g(t) dt \quad (*)$$

Posons $\varphi(x) = g(x) - \int_x^{+\infty} g(t) dt$ pour $x > 0$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = g'(x) + g(x) = -2\frac{e^{-x}}{x^3} < 0$. Donc φ décroît et, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, on a $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a donc bien l'inégalité $0 < \int_x^{+\infty} g(t) dt \leq g(x)$; puisque $g(x)$ est négligeable devant $\frac{e^{-x}}{x}$ au voisinage de $+\infty$, il en est de même de $\int_x^{+\infty} g(t) dt$ et l'égalité (*) montre que $F(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent :

Q38 : Réponse D

39. A. Réponse fausse dans le cas $n = 0$, comme on l'a déjà vu.

B. Le changement de variable $u = t + n$ donne le résultat voulu.

C.D. Ainsi, $I_n = e^n F(n)$. L'équivalent $F(n) \sim \frac{e^{-n}}{n}$ obtenu à la question précédente permet d'obtenir la réponse C.

Q39 : Réponses B,C

40. A.B. h est bien positive et continue sur $]0, 1]$. Et $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 1$, ce qui prouve que h se prolonge par continuité sur $(0, 1]$ donc est bien intégrable. La justification donnée dans la réponse A est toutefois erronée.

C. Pour $x > 0$ (et non pour tout réel x non nul...) on a, puisque $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$G(x) = \int_1^{+\infty} f - \int_x^{+\infty} f - \ln x = \int_1^x f - \ln x = \int_1^x - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_1^x h(t) dt.$$

La réponse C. est malgré tout incorrecte, à cause du domaine.

D. Cependant, le calcul précédent donne : $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \int_0^1 h$. C'est donc la réponse D, mais quand x tend vers 0^+ et non 0...

Q38 : Réponse D (?)