CORRIGÉ ICNA Épreuve commune 2009

Remarque : Il valait mieux commencer l'épreuve par les problèmes III et IV, bien plus faciles !!

PROBLÈME I

1. A. B. E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des *fonctions réelles définies sur* $[0,+\infty[$ (la réponse B ne parle que de « fonctions réelles », je la considèrerai comme exacte mais cela peut se discuter...).
En effet :

- $E \neq \emptyset$, car la fonction nulle appartient à E.
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall x > 0,\ \left|e^{-xt}(\lambda f(t)+g(t))\right| \leqslant |\lambda|\, e^{-xt}\left|f(t)\right| + e^{-xt}\left|g(t)\right|$$

et, puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left|f(t)\right| dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left|g(t)\right| dt$ existent, il en est donc de même de $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left|\lambda f(t)+g(t)\right| dt$, d'après les théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité de fonctions positives.
Ainsi, $\lambda f+g$ appartient à E.

C. D. Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est bornée, alors, puisque $\forall t \geqslant 0,\ \forall x>0,\ \left|e^{-xt} f(t)\right| \leqslant \left\|f\right\|_\infty e^{-xt}$ et que la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a bien $f \in E$, d'après les théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité de fonctions positives.

Le fait pour f d'être *majorée* ne suffit pas ; considérer par exemple la fonction $t \mapsto -e^{t^2}$, qui est négative, donc majorée mais $\int_0^{+\infty} e^{t^2-xt}\, dt$ diverge !

Conclusion :

Q1 : Réponses B,C

---

2. Les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$ sont continues et bornées, donc appartiennent bien à E en vertu de la question précédente (le fait de majorer $|\sin t|$ par 2 est curieux, mais pas faux !).

On peut faire un seul calcul :

$$\forall x>0,\ \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{it}\, dt = \left[\frac{1}{i-x} e^{-xt} e^{it}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

puis, en considérant les parties réelle et imaginaire :

$$L(\cos)(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad L(\sin)(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Q2 : Réponses B,C

---

3. f_λ étant positive, l'absolue convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f_\lambda(t)\, dt$ équivaut à sa convergence.

Soit $X \geqslant 0$. On a :

$$\int_0^{X} e^{-xt} f_\lambda(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(-x-\lambda)t}\, dt = \begin{cases} X & \text{si } x=-\lambda \\ \dfrac{-1}{x+\lambda}\left(e^{(-x-\lambda)X}-1\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $x>0$, le cas $x=-\lambda$ ne peut se produire que si $\lambda<0$, et pour cette valeur de x, $\lim\limits_{X\to\infty} \int_0^{X} e^{-xt} f_\lambda(t)\, dt = +\infty$, donc $f_\lambda \notin E$.

Par contre, si $\lambda \geqslant 0$, pour tout $x>0$, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{(-x-\lambda)X} = 0$, donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^{X} e^{-xt} f_\lambda(t)\, dt = \dfrac{1}{x+\lambda}$: $f_\lambda \in E$ et $L(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$.

Q3 : Réponse D

---

4. Dans cette question encore, les fonctions considérées étant toutes positives, vérifier l'absolue convergence de l'intégrale revient à vérifier seulement sa convergence.

A. B. Supposons $\varepsilon_n \in \mathrm{E}$. Alors, pour tout $\mathrm{X} \geqslant 0$, en faisant une intégration par parties :

$$\int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{e}^{-xt} t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{x} \mathrm{e}^{-xt} t^{n+1}\right]_{t=0}^{t=\mathrm{X}} + \frac{n+1}{x} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} t^n \,\mathrm{d}t$$

et, puisque $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{-1}{x} \mathrm{e}^{-x\mathrm{X}} \mathrm{X}^{n+1} = 0$, on obtient

$$\varepsilon_{n+1} \in \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \forall x > 0\ ,\ \mathrm{L}(\varepsilon_{n+1})(x) = \frac{n+1}{x} \mathrm{L}(\varepsilon_n)(x)$$

C. D. Puisque $\varepsilon_0 = 1$ appartient à E, et que $\mathrm{L}(\varepsilon_0)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, on en déduit, par récurrence, que ε_n appartient à E pour tout n et que $\mathrm{L}(\varepsilon_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Q4 : Réponse A

---

5. Dire que $f_\lambda f$ appartient à E équivaut à :

$$\forall x > 0\ ,\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t} \,\mathrm{d}t \text{ existe}$$

- Cela peut ne pas être vrai pour tout λ réel : prendre par exemple $f = 1$ (qui appartient bien à E), et $\lambda = -x$ ...Les affirmations A et C sont donc fausses.
- Mais, si $\lambda \geqslant 0$, alors $x + \lambda > 0$ donc l'intégrale ci-dessus est (absolument) convergente, et vaut $\mathrm{L}(f)(x+\lambda)$.

Q5 : Réponse D

---

6. A. Réponse exacte, il suffit de lire la définition de E.

B. Le changement de variable dans l'intégrale proposée ne permet absolument pas de conclure ce qui est écrit !

C. C'est évidemment faux si $x \leqslant 0$!

D. Mais la question précédente donne l'idée de la démonstration du D.
Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$; on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} t^n = 0$, donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} t^n$, étant continue, est bornée sur $\mathbb{R}_+$: il existe M tel que, pour tout $t \geqslant 0$, on ait $0 \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} t^n \leqslant \mathrm{M}$.
On a alors

$$\forall t \geqslant 0\ ,\ \forall x > 0\ ,\ \left|\mathrm{e}^{-xt} t^n f(t)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} t^n\right| \left|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} f(t)\right| \leqslant \mathrm{M} \left|\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} f(t)\right|$$

et, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$ existe ($f \in \mathrm{E}$), il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} t^n \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$, c'est-à-dire que ε_n appartient à E.
C'est la réponse D, qui était d'ailleurs donnée un peu plus loin.

Q6 : Réponses A,D

---

7. On élimine d'emblée les réponses A et C, puiqu'elles mentionnent $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} g(x,t) \,\mathrm{d}x$ et non $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} g(x,t) \,\mathrm{d}t$.

Les hypothèses correctes apparaissent dans les réponses B et D, mais il y en a trop par rapport au théorème habituel.
En effet , l'hypothèse de domination

$$\left|g(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ pour tout } (x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J} \quad \text{avec } \int_{\mathrm{J}} \varphi \text{ convergente}$$

implique automatiquement la convergence de $\int_J \left|g(x,t)\right| \mathrm{d}t$, donc celle de $\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ puisqu'une intégrale absolument convergente est convergente. Ces dernières hypothèses ne servent donc à rien. Mais elles ne gênent pas, je pense donc qu'on peut conclure :

Q7 : Réponses B,D

---

8. A. Réponse fausse : en effet, on ne sait pas que $\int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$ converge (c'est le cas $x=0$, exclu dans la définition de E.

B. C Réponse B exacte : l'inégalité de l'énoncé est exacte, donc on a bien ici l'hypothèse de domination avec $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-x_0 t}\left|f(t)\right|$ qui est continue et intégrable. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ implique alors la continuité sur tout intervalle de la forme $[x_0,+\infty[$ avec $x_0 > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$ (réponse C fausse).

D. La linéarité de l'application L est immédiate, et l'ensemble d'arrivée de L est bien inclus dans l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après B.

Q8 : Réponses B,D

---

9. $\dfrac{\partial g}{\partial x}g(x,t) = -t\mathrm{e}^{-xt}f(t)$. Pour $x_0 > 0$ (*ce qui n'est pas dit dans l'énoncé*), et pour $x \geqslant x_0$, on a bien
$\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}g(x,t)\right| = \left|-t\mathrm{e}^{-xt}f(t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-x_0 t}\left|f(t)\right| = \varphi(t)$ avec φ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque $\varepsilon_1 f \in \mathrm{E}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ pour conclure que $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[x_0,+\infty[$ avec $x_0 > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\forall x > 0\ ,\ \mathrm{L}(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}f(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{L}(\varepsilon_1 f)(x)$$

PIÈGE : l'inégalité donnée dans l'énoncé A $\left(\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}g(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-x_0 t}f(t)\right)$ est <u>fausse</u>, puisqu'il manque la valeur absolue ! ! (j'avoue que je ne l'ai vu qu'en me relisant ! !). On doit donc considérer la réponse A comme <u>inexacte</u>.

Par récurrence facile, on obtient ensuite que $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathrm{L}(\varepsilon_n f)$.
Il y a donc une « erreur » de signe dans les réponses C et D.

Q9 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

10. A. B. Notons d'abord que la *formule* de Taylor-Lagrange n'est *plus au programme* ! Seule demeure *l'inégalité* de Taylor-Lagrange...

Cette formule est celle de la réponse B (pour $n=0$, il s'agit du théorème des accroissements finis).

C. D. Cette formule appliquée à la fonction exp, avec $n=1$, $a=0$ et $b=u$ donne

$$\exists c \in]0,u[\text{ ou }]u,0[\text{ tq } \mathrm{e}^u - 1 - u = \mathrm{e}^c\frac{u^2}{2}$$

donc $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \mathrm{M}\dfrac{u^2}{2}$ avec $\mathrm{M} = \sup\limits_{\substack{x\in[0,u]\\ \text{ou } [u,0]}} e^x$.

Si $u \geqslant 0$, $\mathrm{M} = \mathrm{e}^u$ et si $u \leqslant 0$, $\mathrm{M} = 1$, donc la réponse C est fausse et la réponse D exacte.

Q10 : Réponses B,D

---

11. En appliquant l'inégalité précédente à $u = ht$, avec $h \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$ (*rem :* $t \geqslant 0$ n'est pas dit dans l'énoncé...), on obtient :

$$\left|e^{-ht} - 1 + ht\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2} e^{|h|t}$$

et, en multipliant par e^{-xt} :

$$\left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2} e^{(|h|-x)t}$$

Pour $|h| \leqslant \frac{x}{2}$, on a $|h| - x \leqslant -\frac{x}{2}$ d'où, puisque $t \geqslant 0$, $(|h|-x)t \leqslant -\frac{xt}{2}$, et on obtient alors l'inégalité de la réponse A.

Puis :

$$\begin{aligned}\frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + L(\varepsilon_1 f)(x) &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \left[e^{-(x+h)t} - e^{-xt}\right] f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \left[e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right] f(t)\,dt\end{aligned}$$

ce qui conduit, en utilisant l'inégalité démontrée à la réponse A, à

$$\left|\frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + L(\varepsilon_1 f)(x)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \left|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}\right| \left|f(t)\right| dt \leqslant \frac{1}{|h|}\frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{xt}{2}} \left|f(t)\right| dt$$

soit

$$\left|\frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + L(\varepsilon_1 f)(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} L(\varepsilon_2 \left|f\right|)\left(\frac{x}{2}\right)$$

ce qui ne correspond à aucune des réponses B et C, mais permet quand même de conclure

$$\lim_{h\to 0} \frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} = -L(\varepsilon_1 f)(x)$$

c'est-à-dire $L(f)$ dérivable en x et $L(f)'(x) = -L(\varepsilon_1 f)(x)$.

Q11 : Réponses A,D

PROBLÈME II

12.

$$B_1' = 1 \text{ d'où } B_1 = X + c \text{ et } \int_0^1 B_1 = 0 \Longrightarrow c = -\frac{1}{2} \quad \text{soit } B_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$B_2' = 2X - 1 \text{ d'où } B_2 = X^2 - X + c \text{ et } \int_0^1 B_2 = 0 \Longrightarrow c = \frac{1}{6} \quad \text{soit } B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$B_3' = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2} \text{ d'où } B_3 = X^3 - \frac{3X^2}{2} + \frac{X}{2} + c \text{ et } \int_0^1 B_3 = 0 \Longrightarrow c = 0 \quad \text{soit } B_3 = X^3 - \frac{3X^2}{2} + \frac{X}{2}$$

$$B_4' = 4X^3 - 6X^2 + 2X \text{ d'où } B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 + c \text{ et } \int_0^1 B_4 = 0 \Longrightarrow c = -\frac{1}{30} \quad \text{soit } B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5' = 5X^4 - 10X^3 + 5X^2 - \frac{1}{6} \text{ d'où } B_5 = X^5 - \frac{5X^4}{2} + \frac{5X^3}{3} - \frac{X}{6} + c \text{ et } \int_0^1 B_5 = 0 \Longrightarrow c = 0 \quad \text{soit } B_5 = X^5 - \frac{5X^4}{2} + \frac{5X^3}{3} - \frac{X}{6}$$

Ces quelques calculs prouvent qu'il est facile de montrer par récurrence que chaque polynôme B_n existe, est unique et est de degré n, unitaire.

Q12 : Réponses B,C

---

13. $C_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}B_{n+1}(1-X)$ d'où, en dérivant cette relation :

$$C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+2}B'_{n+1}(1-X) = (-1)^n(n+1)B_n(1-X) = (n+1)C_n(X)$$

et $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,dt = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t)\,dt \underset{\text{chgt } u=1-t}{=} \int_0^1 (-1)^n B_n(u)\,du$, donc la réponse A est exacte ; B et C sont fausses.

Ce qui précède montre que la suite (C_n) vérifie les mêmes relations que la suite (B_n) ; par unicité, on aura bien $C_n = B_n$ pour tout n.

Q13 : Réponses A,D

---

14. A. est farfelu ! considérer par exemple $f = 1$...

En fait, en séparant l'intégrale en deux, et faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$ dans la première et le changement de variable $u = \dfrac{t+1}{2}$ dans la seconde, puis en utilisant la relation de Chasles, on trouve

$$\int_0^1 \left[f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t+1}{2}\right)\right] dt = 2\int_0^1 f(t)\,dt$$

B. On pose ici $C_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\dfrac{X}{2}\right) + B_n\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$. On a alors :

- $C_0 = 1$.
- Pour $n \geqslant 1$: $C'_n(X) = \dfrac{2^{n-1}}{2}\left[B'_n\left(\dfrac{X}{2}\right) + B'_n\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] = 2^{n-2}n\left[B_{n-1}\left(\dfrac{X}{2}\right) + B_{n-1}\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] = nC_{n-1}(X)$
- Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 C_n(t) = 2^{n-1}\cdot 2\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ en utilisant la relation démontrée à la question A.

Ce qui précède montre que la suite (C_n) vérifie les mêmes relations que la suite (B_n) ; par unicité, on aura bien $C_n = B_n$ pour tout n.

C. D. • Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle 0 = \int_0^1 B_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\right]$

soit $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geqslant 2$.

De plus, d'après 13.d, pour tout entier n, $B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$. Donc $B_n(0) = 0$ pour n impair $\geqslant 3$.

- Enfin, d'après 14.b : $B_n(0) = 2^{n-1}[B_n(0) + B_n(\frac{1}{2})]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $B_n(\frac{1}{2}) = 0$ pour n impair $\geqslant 3$.

Pour tout n, on a $B_n(\frac{1}{2}) = \dfrac{1-2^{n-1}}{2^{n-1}}B_n(0)$, donc les égalités de la fin de la réponse D sont inexactes.

Q14 : Réponses B,C

---

15. Notons déjà que, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$, u est continue si et seulement si $\ell = 1$.

On a , d'après le développement en série entière de la fonction exp :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{u(x)} = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

et cela reste vrai pour $x = 0$ sous réserve de poser $u(0) = \ell = 1$.

Pour cette valeur (seulement) de ℓ, $\dfrac{1}{u}$ est développable en série entière, avec un rayon de convergence égal à $+\infty$, donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction ne s'annulant pas, il en est de même de son inverse, c'es-à-dire de u.

Enfin, la réponse D est inexacte : une fonction peut être de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage d'un point sans être développable en série entière au voisinage de ce point, j'ai donné un tel exemple en cours.

Q15 : Réponse C

---

16. On notera la faute d'orthographe « On choisi » dans cette question, et le tout aussi joli « On défini » dans la question 17...

Bon, dans cette question, il suffit de faire un développement limité :

D'après la question précédente, $\dfrac{1}{u(x)} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{2x^3}{12}\right) - \frac{x^3}{8} + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Il n'y a pas de terme en x^3 dans le développement limité (ce qui sera confirmé à la question 21), donc :

$$\boxed{\textbf{Q16 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$$

---

17. Encore un calcul passionnant :

$$\begin{aligned} u(x)\mathrm{e}^{tx} &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{1}2 + \mathrm{o}(x^3)\right)\left(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2} + \frac{t^3x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{1}2 + tx - t\frac{x^2}{2} + t\frac{x^3}{12} + t^2\frac{x^2}{2} - t^2\frac{x^3}{4} + t^3\frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 1 + \frac{2t-1}{2}x + \frac{6t^2-6t+1}{12}x^2 + \frac{2t^3-3t^2+t}{12}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Là encore, cette formule sera confirmée à la question 21 ; et on a fait tous ces calculs pour finalement conclure :

$$\boxed{\textbf{Q17 : Réponse E (aucune réponse exacte)}}$$

---

18. A. B. La réponse A est exacte, c'est clairement expliqué. Donc la réponse B est automatiquement fausse.

C. D. Puisque ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il n'est pas utile de revenir à la définition pour calculer les dérivées partielles ! On peut directement faire :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t) = u'(x)\mathrm{e}^{xt} + t\,u(x)\mathrm{e}^{xt} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,t) = u'(0) + t\,u(0) = -\frac{1}{2} + t$$

ce qui est une partie de la réponse D, mais il faut quand même vérifier le début de cette réponse au cas où il y ait un piège...

$$\frac{\phi(h,t)-\phi(0,t)}{h} = \frac{\frac{h}{\mathrm{e}^h-1}\mathrm{e}^{th}-1}{h} = \frac{h\mathrm{e}^{th}-\mathrm{e}^h+1}{h(\mathrm{e}^h-1)} = \frac{h(1+th+\mathrm{o}(th)) - (1+h+\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}(h^2)+1}{h(\mathrm{e}^h-1)} = \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)h^2 + o(h^2)}{h^2+\mathrm{o}(h^2)}$$

ce qui correspond bien au calcul de l'énoncé, et permet de déduire, par définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,t) = \lim_{h\to0}\frac{\phi(h,t)-\phi(0,t)}{h} = t - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\textbf{Q18 : Réponses A,D}}$$

---

19. A. B. La définition de ϕ peut s'écrire simplement $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\phi(x,t) = u(x)\mathrm{e}^{xt}$; je ne vois pas pourquoi l'énoncé a traité à part le cas $x = 0$, puisqu'on avait prolongé u par continuité en 0 en posant $u(0) = 1$.

On peut donc écrire sans problème, pour tous x, t, $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(x,t) = x\phi(x,t)$.

C. D. ϕ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, le théorème de Schwarz s'applique ; on peut intervertir l'ordre des dérivées partielles, d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n\phi}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\big(x\phi(x,t)\big) = x\frac{\partial^n\phi}{\partial x^n} + n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\phi$$

en utilisant, pour la dernière égalité, la formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit.

Q19 : Réponses B,C

---

20. A. B. C. Dans les hypothèses de la réponse A, la continuité de h par rapport à t assure effectivement son intégrabilité sur le segment $[a,b]$ (la continuité par morceaux suffirait). La dérivabilité par rapport à x est la seconde hypothèse qui figure dans le théorème du cours.

Il manque cependant trois hypothèses :

- la continuité (par morceaux) de $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$
- la continuité de $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$
- et la classique hypothèse de domination.

Il est donc *nécessaire* de rajouter l'hypothèse « $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ est continue *par morceaux* » ; et l'hypothèse de continuité de $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ ne suffit pas de toutes façons.

On peut donc considérer que les trois réponses sont inexactes.

D. • $A_0 = 1$ car $\phi(0,t) = 1$. $A'_{n+1} = (n+1)A_n$ résulte directement de 19.c.

- On sait que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Ce la implique que, pour tout entier n, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  De plus, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x,t)$ étant continue sur le compact $K \times [0,1]$ y est bornée, indépendamment de x et de t. L'hypothèse de domination sur le segment $[0,1]$ sera donc vérifiée.

  Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ assure alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

  Or, pour $x \neq 0$:

$$\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\left[\frac{1}{x}\mathrm{e}^{tx}\right]_{t=0}^{t=1} = 1$$

  résultat qui reste valable pour $x = 0$ par continuité.

  Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\displaystyle\int_0^1 \phi(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$, soit $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$, et, en particulier, pour $x = 0$ on obtient bien $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ce qui précède montre que la suite (A_n) vérifie les mêmes relations que la suite (B_n) ; par unicité, on aura bien $A_n = B_n$ pour tout n.

Q20 : Réponse D

---

21. A. B. La fonction $x \mapsto \phi(x,t)$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre, donné par la formule de Taylor-Young :

$$\phi(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(0,t)\frac{x^n}{n!} + o(x^N)$$

soit, puisque $\dfrac{\partial^n \phi}{\partial x^n}(0,t) = A_n(t) = B_n(t)$:

$$x\mathrm{e}^{tx} = (\mathrm{e}^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{B_n(t)}{n!}x^n + o(x^N)\right)$$

L'énoncé a donc « oublié » le $o(x^N)$ dans la formule du A...

Ensuite, en écrivant le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^{tx}$ à l'ordre N : $x\mathrm{e}^{tx} = x\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^{\mathrm{N}})$, ainsi que celui de $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$: $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^{\mathrm{N}})$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^k x^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!} x^n\right) + \mathrm{o}(x^{\mathrm{N}})$$

ce qui est la formule de la réponse B à un tout petit détail près...

C. D. Dans le calcul précédent, le terme en $x^{\mathrm{N}+1}$ du terme de gauche ne sert à rien, donc on a en fait :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{t^k x^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!} x^n\right) + \mathrm{o}(x^{\mathrm{N}})$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier dans les deux membres de cette égalité les coefficients des termes en x^{k+1} avec $1 \leqslant k+1 \leqslant \mathrm{N}$ ce qui donne :

$$\frac{t^k}{k!} = \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant \mathrm{N}, 0\leqslant q\leqslant \mathrm{N}\\ p+q=k+1}} \frac{1}{p!}\frac{\mathrm{B}_q(t)}{q!} \quad (0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$$

soit

$$\frac{t^k}{k!} = \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{(k+1-q)!}\frac{\mathrm{B}_q(t)}{q!} \quad \text{d'où} \quad t^k = \frac{1}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}\mathrm{B}_q(t)$$

Pour $\underline{k \geqslant 1}$, $t^k = 0$ lorsque $t = 0$, donc on obtient :

$$\forall k \geqslant 1\,,\ \sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}\mathrm{B}_q(0) = 0 \quad \text{ou encore :} \quad \forall n \geqslant 1\,,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} b_k = 0$$

C'est bien la formule de l'énoncé, mais elle n'est valable que pour $\underline{n \geqslant 1}$! D'ailleurs, il était facile de voir que les deux réponses données en C et D sont fausses pour $n = 0$, ce qui permettait de répondre directement sans faire aucun calcul !!

Tout cela pour piteusement conclure :

Q21 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

22. A. B. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1 = \int_0^1 \frac{f''(t)\mathrm{B}_2(t)}{2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{f'(t)\mathrm{B}_2(t)}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\mathrm{B}_2'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(1)-f'(0)}{2}b_2 - \int_0^1 f'(t)\mathrm{B}_1(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{car } \mathrm{B}_2(1) = \mathrm{B}_2(0) = b_2 \text{ et } \mathrm{B}_2' = 2\mathrm{B}_1 \\
&= \frac{f'(1)-f'(0)}{2}b_2 - \left[f(t)\mathrm{B}_1(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f(t)\mathrm{B}_1'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f'(1)-f'(0)}{2}b_2 - \frac{f(1)+f(0)}{2} + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui est la réponse A.

C. D. La formule précédente permet de voir tout de suite que la réponse D est inexacte.

Démontrons la formule de la réponse C. par récurrence sur p :

- pour $p = 1$, il s'agit de la formule que l'on vient de démontrer.

- Supposons la vérifiée à l'ordre p. Alors, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
R_{p+1} &= \int_0^1 \frac{f^{(2p+2)}(t)B_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}\,dt = \left[\frac{f^{(2p+1)}(t)B_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}\right]_0^1 - \frac{1}{(2p+2)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B'_{2p+2}(t)\,dt \\
&= \frac{f^{(2p+2)}(1)-f^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}b_{2p+2} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)\,dt \quad \text{car } B'_{2p+2}=(2p+2)B_{2p+1} \\
&= \frac{f^{(2p+2)}(1)-f^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}b_{2p+2} - \frac{1}{(2p+1)!}\left[f^{(2p)}(t)B_{2p+1}(t)\right]_0^1 + \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p)}(t)B'_{2p+1}(t)\,dt \\
&= \frac{f^{(2p+2)}(1)-f^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}b_{2p+2} + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 f^{(2p)}(t)B_{2p}(t)\,dt \quad \text{car } B_{2p+1}(0)=B_{2p+1}(1)=0 \text{ et } B'_{2p+1}=(2p+1)B_{2p} \\
&= \frac{f^{(2p+2)}(1)-f^{(2p+2)}(0)}{(2p+2)!}b_{2p+2} + R_p
\end{aligned}$$

puis, en remplaçant R_p par la formule donnée par l'hypothèse de récurrence, on trouve bien la formule au rang $p+1$.

Q22 : Réponses A,C

---

23. On va considérer ici la fonction f définie par : $\forall x \in [0,2\pi[,\ f(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ puis prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

La fonction f est alors continue (car $B_{2k}(0)=B_{2k}(1)$), et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Elle sera donc somme de sa série de Fourier (qui d'ailleurs converge normalement). On aura donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$$

où $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos nt\,dt = 2\int_0^1 B_{2k}(u)\cos(2\pi nu)\,du$, après avoir fait le changement de variable $u = \frac{t}{2\pi}$.

On obtient de la même façon $b_n(f) = 2\int_0^1 B_{2k}(u)\sin(2\pi nu)\,du$.

D'autre part, la relation $f(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ n'est valable que pour $x \in [0,2\pi[$ (et non pour tout $x \in \mathbb{R}$), ce qui donne finalement la réponse C, bien que je reste perplexe devant la phrase « la convergence de la série étant assurée par la continuité de B_{2k} ... »

Q23 : Réponse C

---

24. A. $\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = 0$ n'est vraie que pour $k \geqslant 1$, par définition de la suite des polynômes de Bernoulli.

B. C. D. Il faut ici supposer $n \neq 0$ ce qui n'est pas marqué dans l'énoncé...

- en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_2(t)\cos(2\pi nt)\,dt &= \left[\frac{1}{2\pi n}B_2(t)\sin(2\pi nt)\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B'_2(t)\sin(2\pi nt)\,dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n}\left(\left[-\frac{B'_2(t)\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B''_2(t)\cos(2\pi nt)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{(2\pi n)^2} \quad \text{car } B'_2(t) = 2t-1 \text{ et } B''_2(t) = 2
\end{aligned}$$

- Soit $k \geqslant 2$. En intégrant deux fois par parties :

$$\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,dt = \left[\frac{1}{2\pi n}B_{2k}(t)\sin(2\pi nt)\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B'_{2k}(t)\sin(2\pi nt)\,dt$$

d'où :

$$\int_0^1 \mathrm{B}_{2k}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi n}\left(\left[-\frac{\mathrm{B}'_{2k}(t)\cos(2\pi n t)}{2\pi n}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 \mathrm{B}''_{2k}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Or, $\mathrm{B}'_{2k} = 2k\mathrm{B}_{2k-1}$, $\mathrm{B}''_{2k} = (2k)(2k-1)\mathrm{B}_{2k-2}$ et $\mathrm{B}_{2k-1}(0) = \mathrm{B}_{2k-1}(1) = 0$ si $k \geqslant 2$, d'où

$$\int_0^1 \mathrm{B}_{2k}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2\pi n)^2}(2k)(2k-1)\int_0^1 \mathrm{B}_{2k-2}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière relation permet d'obtenir, par récurrence :

$$\int_0^1 \mathrm{B}_{2k}(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}$$

Conclusion :

Q24 : Réponse D

---

25. A. B. D'après le cours (séries de Rieman), la fonction ζ est définie si et seulement si $x > 1$.

C. D Tout élève a certainement déjà vu les formules données dans la réponse D. Si on s'en rappelle, on peut tout de suite terminer la question !

On peut aussi remarquer que la formule de la réponse C est manifestement fausse pour $k = 1$. Cependant, pour votre culture personnelle, et afin que tous les calculs précédents servent à quelque chose, je vais établir la bonne formule.

Je reprends les notations et résultats de la question 23. On avait $f(x) = \mathrm{B}_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur $[0, 2\pi[$;
donc $f(2\pi - x) = \mathrm{B}_{2k}\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) = \mathrm{B}_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ (d'après la question 13.), et, f étant 2π-périodique, $f(-x) = f(x)$ c'est-à-dire que f est paire. Donc les $b_n(f)$ sont nuls.

Compte tenu des calculs de la question 24, on peut donc écrire le développement en série de Fourier :

$$\forall x \in [0, 2\pi[\,,\ \mathrm{B}_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \underbrace{\int_0^1 \mathrm{B}_{2k}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ pour } k\geqslant 1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}\cos nx$$

Pour $k \geqslant 1$ et $x = 0$, on a donc $b_{2k} = \dfrac{2\cdot(2k)!(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ et enfin la formule (exacte) :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{\pi^{2k}\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}b_{2k}$$

par exemple : pour $k = 1$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$ d'où $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$; pour $k = 2$, $b_4 = -\dfrac{1}{30}$ d'où $\zeta(4) = \pi^4 \cdot \dfrac{8}{24}\cdot\dfrac{1}{30} = \dfrac{\pi^4}{90}$ etc...

Bref :

Q25 : Réponses B,D

PROBLÈME III

26. A. Si on exclut le cas d'un triangle dont un coté est de longueur nulle, on a forcément $a \geqslant 1$ (*que vient faire b dans l'énoncé ?*), et le triangle $(a, a{+}1, c)$ est rectangle d'hypothénuse c si et seulement si $c^2 = a^2{+}(a{+}1)^2 = 2a^2{+}2a{+}1$.

B. C. D. H n'est rien d'autre que l'ensemble des couples $(a, \sqrt{2a^2+2a+1})$ tels que $a \in \mathbb{N}^*$ et $\sqrt{2a^2+2a+1} \in \mathbb{N}^*$. Il est alors facile de vérifier que la réponse C. est exacte.

Q26 : Réponses A,C

---

27. A. Cet algorithme ne donne pas le résultat voulu, puisqu'on ne teste même pas si $\sqrt{2i^2+2i+1}$ est entier.

B. Jolie boucle infinie, puisque la valeur de i n'est pas incrémentée !

C. Ce dernier algorithme se rapproche de quelque chose de correct. Le problème est qu'il n'est pas indiqué quelles sont les valeurs affichées... Puisque l'opération $a := a+1$ est faite en premier, il aurait fallu tester $c=\sqrt{2a^2+2a+1}$ et non $c=\sqrt{2(a+1)^2+2(a+1)+1}$.

$$\boxed{\textbf{Q27 : Réponse D}}$$

---

28. Il suffit de faire les calculs !

Sachant que $(a_0,c_0)=(0,1)$, $(a_1,c_1)=(3,5)$, $(a_2,c_2)=(20,29)$, $(a_3,c_3)=(119,169)$ et $(a_4,c_4)=(696,985)$, il suffit de résoudre (en vérifiant la compatibilité du système) :

$$\begin{cases} c_2+\alpha c_1+\beta c_0=0 \\ c_3+\alpha c_2+\beta c_1=0 \\ c_4+\alpha c_3+\beta c_2=0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 29+5\alpha+\beta=0 \\ 169+29\alpha+5\beta=0 \\ 985+169\alpha+29\beta=0 \end{cases}$$

ce qui conduit à $\alpha=-6$ et $\beta=1$.

$$\boxed{\textbf{Q28 : Réponse B}}$$

---

29. Encore un système à résoudre !

$$\begin{cases} a_2+\lambda a_1+\beta a_0=\delta \\ a_3+\lambda a_2+\beta a_1=\delta \\ a_4+\lambda a_3+\beta a_2=\delta \end{cases} \iff \begin{cases} 20+3\lambda=\delta \\ 119+20\lambda+3=\delta \\ 696+119\lambda+20=\delta \end{cases}$$

ce qui conduit à $\lambda=-6$ et $\delta=2$. Passionnant !

$$\boxed{\textbf{Q29 : Réponse A}}$$

30.
- On a donc ici : $\begin{cases} u_{n+1}-6u_n+u_{n-1}=2 \\ v_{n+1}-6v_n+v_{n-1}=0 \end{cases}$. Les relations de récurrence pour les suites u et v étant les mêmes que celles des deux questions précédentes pour les suites a et c, on aura évidemment $(u_k,v_k)\in \mathrm{H}$ pour $1\leqslant k\leqslant 4$ (donc la réponse A est fausse !).
- On démontre ensuite, par récurrence sur n, les relations de la réponse C :
  - — Elles sont facilement vérifiées pour $n=0,1$.
  - — Si elles sont vérifiées jusqu'au rang n alors

$$\begin{aligned} u_{n+2}-3u_{n+1}-2v_{n+1}-1 &= (6u_{n+1}-u_n+2)-2)-3u_{n+1}-2(4u_n+3v_n+2)-1 \\ &= 3(3u_n+2v_n+1)-u_n+2-2(4u_n+3v_n+2)-1=0 \end{aligned}$$

  donc $u_{n+2}=3u_{n+1}+2v_{n+1}+1$

  etc...
- Et on en déduit $(u_k,v_k)\in\mathrm{H}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, par récurrence sur k :
  - — C'est vrai pour $k=1$...
  - — si la relation est vérifiée au rang k alors, en utilisant les relations de la réponse C :

$$\begin{aligned} 2u_{k+1}^2+2u_{k+1}+1-v_{k+1}^2 &= 2(3u_k+2v_k+1)^2+2(3u_k+2v_k+1)^2+1-(4u_k+3v_k+2)^2 \\ &= 2u_k^2+2u_k+1-v_k^2=0 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

  ce qui prouve $v_{k+1}^2=2u_{k+1}^2+2u_{k+1}+1$ et $(u_{k+1},v_{k+1})\in\mathrm{H}$.

$$\boxed{\textbf{Q30 : Réponses B,C}}$$

---

31. $\chi_A = \det(A - XI_2) = X^2 - 6X + 1$, et ce polynôme a pour racines $3 \pm 2\sqrt{2}$. Donc, d'après le cours :

Q31 : Réponses B,D

---

32. A. Réponse fantaisiste.

B. C. D. Plutôt que de résoudre des systèmes linéaires pour chercher les vecteurs propres de A, on utilise astucieusement l'énoncé et on calcule :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc la matrice P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres associés (dans cet ordre) aux valeurs propres $3 + 2\sqrt{2}$ et $3 - 2\sqrt{2}$. On aura donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc :

Q32 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

33. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les relations trouvées à la question 30.c s'écrivent :

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

donc en posant $X_n = PX'_n$ avec $X'_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, cela équivaut à $X'_{n+1} = (P^{-1}AP)X_n + P^{-1}B$.

On calcule alors $P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = B$ donc $P^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (là encore, inutile de calculer P^{-1}, utiliser l'énoncé !). Finalement :

Q32 : Réponse C

Rem : Le « problème » III s'arrête ici ; pourtant, à partir des résultats de la question précédente, il n'était pas bien difficile (mais pas passionnant !) de calculer y_n et z_n et d'en déduire u_n et v_n !

PROBLÈME III

REMARQUE PRÉLIMINAIRE : Si on a la relation de l'énoncé, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ 0 = \langle u(x+y) | x+y \rangle = \langle u(x) + u(y) | x+y \rangle = \underbrace{\langle u(x) | x \rangle}_{=0} + \langle u(x) | y \rangle + \langle y | u(x) \rangle + \underbrace{\langle u(y) | y \rangle}_{=0}$$

d'où $\langle u(x) | y \rangle = -\langle x | u(y) \rangle$, ou encore $u^* = -u$: u est un endomorphisme antisymétrique, tout simplement ! (la réciproque est immédiate).

34. B. L'écriture $\varphi(X(X^2-1))$ n'a aucun sens, puisque φ est une fonction de deux variables ! (et, en plus, $X(X^2-1) \notin E$ car ce polynôme est de degré 3...)

A. C. D. Notons déjà que la réponse C est strictement identique à la réponse A (car dire que u vérifie la propriété (P) pour φ sous-entend qu'il s'agit d'un produit scalaire !)

Il est facile de vérifier que φ est bien un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$; en effet, c'est bien une forme bilinéaire symétrique, positive car $\varphi(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2$ est positif, et définie car, si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ donc $P = 0$ puisque $\deg P \leqslant 2$.

Si on note $P_1 = \dfrac{X^2 + X}{2}$, $P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$ et $P_3 = 1 - X^2$, on vérifie que $\varphi(P_i, P_j) = \delta_{ij}$, donc (P_1, P_2, P_3) est une famille orthonormale pour φ, donc une base orthonormale.

On calcule : $u(P_1) = X^2 + X = 2P_1$, $u(P_2) = -X^2 + X = -2P_2$ et $u(P_3) = 0$, donc la matrice de u dans cette base est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce n'est pas celle de l'énoncé ; de plus, la matrice de u dans une base orthonormale n'est pas antisymétrique, on ne peut donc pas avoir $u^* = -u$ et u ne peut vérifier la propriété (P).

Bref :

Q34 : Réponse E (aucune réponse exacte)

---

35. A. B. J'ai déjà répondu à cette question. Réponse B (il y a même équivalence).

C. D. Le terme d'indice (i, j) de la matrice A est la coordonnée sur e_i du vecteur $u(e_j)$, elle est donc égale, la base étant orthonormale, à $\left\langle u(e_j) \middle| e_i \right\rangle = -\left\langle e_j \middle| u(e_i) \right\rangle$. Cela prouve que ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$. Autrement dit, le début de la réponse C est exact, mais la fin est fausse, et le début de la réponse D est fausse, la fin étant exacte...

Q35 : Réponse B

---

36. cf. remarque préliminaire et question précédente...

Q36 : Réponse B

---

37. A. On sait que $u^* = -u$; d'après le cours, $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$. Donc, ici, $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ et le reste de la réponse découle du cours.

B. La réponse est fausse : il n'y a pas *d'équivalence*, seulement une implication, donnée en réponse A.

C. fantaisiste...

D. L'implication $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u \Longrightarrow \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ est un exercice classique, que je ne reproduis pas ici.

Q37 : Réponses A,D

---

38. A. Cette équivalence est toujours vraie (que u vérifie ou non la propriété (P)). En effet, si u est diagonalisable, il existe une base où sa matrice est diagonale avec sur la diagonale ses valeurs propres. Si la seule valeur propre est 0, ce sera donc la matrice nulle, et u sera l'endomorphisme nul.
La réciproque est immédiate.

Rem : Ainsi, l'*équivalence* est vraie, ce qui ne veut pas dire que les propriétés énoncées le soient !

B. C. $\left\langle u^2(x) \middle| x \right\rangle = \langle u(x) | u^*(x) \rangle = -\langle u(x) | u(x) \rangle = -\|u(x)\|^2$.
Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u^2)$, il existe $x \neq 0$ tel que $u^2(x) = \lambda x$ d'où $\left\langle u^2(x) \middle| x \right\rangle = \lambda \|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$.

Donc, puisque $\|x\| \neq 0$, $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 0$.

On a donc bien $\operatorname{Sp}(u^2) \subset \mathbb{R}_-$.

D. $(u \circ u)^* = u^* \circ u^* = (-u) \circ (-u) = u \circ u$ donc u^2 est symétrique ; il ne vérifie pas (P) (sauf si $u = 0$!).

Q38 : Réponses A,C

---

39. A. u^2 est bien symétrique (voir ci-dessus) donc diagonalisable, mais la raison évoquée dans l'énoncé est fantaisiste !

C. est fausse : on a vu dans la question précédente que les valeurs propres de u^2 sont $\leqslant 0$.

B. u^2 est symétrique réel donc diagonalisable, et ses valeurs propres sont négatives ou nulles (déjà vu). Si sa seule valeur propre était 0, alors u^2 serait l'endomorphisme nul, donc $\operatorname{Ker} u^2 = \mathrm{E}$, ce qui donnerait (question 37.d) $\operatorname{Ker} u = \mathrm{E}$ et $u = 0$, ce qui est exclu.
Il existe donc bien une valeur propre strictement négative.

D. $\operatorname{Vect}(x, u(x))$ ne peut être une droite vectorielle que si x est un vecteur propre de u (car $x \neq 0$ par hypothèse). Il existerait alors $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$, d'où $u^2(x) = \mu^2 x$ d'où $\mu^2 = \lambda < 0$: contradiction.

Q39 : Réponse B

A. B. $u^2(x) = \lambda x$, donc $u^2(x) \in \mathrm{F}$. Les images par u des vecteurs x et $u(x)$, qui forment une base de F, étant dans F, F est stable par u.

D'après le cours, si F est stable par u, $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^*, donc ici par $-u$ donc par u.

C. D. Puisque $\operatorname{Im} u$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, il résulte d'un théorème célèbre du cours que la restriction de u à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $\operatorname{Im} u$, donc l'endomorphisme v induit par u sur $\operatorname{Im} u$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u$. Cet automorphisme vérifie bien sûr, lui aussi, la propriété (P).

On peut alors par récurrence, à l'aide de la question précédente, construire une base de $\operatorname{Im} u$ de la forme $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_p, u(e_p))$ ce qui prouvera que $\operatorname{Im} u$ est de dimension paire.

Plus simplement, si A est la matrice de v dans une b.o.n de $\operatorname{Im} u$, A est inversible est vérifie ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$ donc $\det({}^t\mathrm{A}) = (-1)^r \det \mathrm{A}$ où $r = \operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$, d'où $\det \mathrm{A} = (-1)^r \det \mathrm{A}$ et, puisque $\det \mathrm{A} \neq 0$, r est pair.

Q40 : Réponses A,C

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆