CORRIGÉ ICNA Épreuve optionnelle 2010

PARTIE I

1. Puisque l'image par f de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ par f est la famille $(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1})$ qui est génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $f\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n \geqslant 1$, et $f(\mathbb{R}_0[X]) = \{0\}$.

Par récurrence sur k, on aura, pour $k \leqslant n$: $f^k\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \mathbb{R}_{n-k}[X]$, et, en particulier, $f^n\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \mathbb{R}_0[X]$. On a donc $f^n \neq 0$ et $f^{n+1} = 0$, c'est-à-dire que f est nilpotent d'ordre $n+1$.

Ce ne peut donc pas être un automorphisme, ni un projecteur !

Rem : En fait, l'application f est l'application qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivée P', puisque ces deux applications coïncident sur la base canonique. Cette remarque sera utilisée par la suite.

Q1 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

2. L'endomorphisme $g : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{cases}$ est évidemment bijectif, et son inverse est $g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{cases}$ (il suffit de vérifier que la composée de ces deux endomorphismes est égale à id).

D'autre part, il est clair que $\deg g(P) = \deg P$, donc g laisse stables les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_k[X]$ pour $k \in [0, n]$, et sa matrice dans la base canonique est donc triangulaire supérieure. Elle ne peut être à diagonale nulle, sinon son déterminant serait nul !

Q2 : Réponses B,D

---

3. La formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ g(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(P)}{k!}$$

(on a vu que $f(P) = P'$ donc par récurrence $f^k(P) = P^{(k)}$), donc $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}$. Conclusion :

Q3 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

4. Il n'est pas franchement utile, contrairement à ce que dit l'énoncé, d'utiliser le résultat précédent pour répondre à la question. En effet :

A. $g - \mathrm{id}$ est l'endomorphisme qui, à tout polynôme P associe le polynôme $P(X+1) - P(X)$. Donc, en utilisant la formule du binôme, on voit que l'image par P du polynôme X^k pour $k \geqslant 1$ sera un polynôme de degré exactement $k-1$ (et l'image d'un polynôme constant est le polynôme nul). Il en résulte que l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ par $g - \mathrm{id}$ sera exactement $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et, pour les mêmes raisons que dans la question 1, on obtient que $g - \mathrm{id}$ est nilpotent d'ordre $n+1$.

B. Puisque l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ par $g - \mathrm{id}$ est égale à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $g - \mathrm{id}$ ne peut être de rang 1 que si $n = 1$...

C. D Tout d'abord, remarquons que dire qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel est diagonalisable dans « $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ » n'a strictement aucun sens ! L'énoncé voulait certainement parler de la *matrice* de cet endomorphisme... La seule valeur propre (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) d'une matrice nilpotente étant 0 (car X^{n+1} en est un polynôme annulateur), cette matrice ne peut être diagonalisable, sinon elle serait semblable, donc égale, à la matrice nulle.

Finalement :

Q4 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

5. *Rem : La question est complètement farfelue ! on introduit ici un endomorphisme, mais on ne sait pas dans quel espace vectoriel on se place ! !*

Remarques préliminaires :

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents de E *qui commutent*, alors $u+v$ est nilpotent (exercice classique ; utiliser la formule du binôme avec un exposant convenable...).
  On ne peut rien dire, par contre, si u et v ne commutent pas !
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Si u est un endomorphisme nilpotent de E, qui commute avec un endomorphisme v quelconque, alors $u\circ v$ est nilpotent. (car $(uv)^n = u^n v^n$ ...)

A. On peut écrire $\exp(h) = \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{h^k}{k!} = \mathrm{id} + h\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{h^{k-1}}{k!}\right)$.

En vertu de la deuxième remarque préliminaire, l'endomorphisme $u = h\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{h^{k-1}}{k!}\right)$ est nilpotent (d'ordre $\leqslant p$).

On peut donc écrire $\exp(h) = \mathrm{id} + u$, avec u nilpotent, et il est facile de vérifier (exercice classique), qu'il s'agit d'un endomorphisme inversible, d'inverse $\mathrm{id} - u + u^2 - \ldots + (-1)^{p-1}u^{p-1}$.

B. $\exp(h)$ est un automorphisme, donc son rang est égal à la dimension de l'espace de départ. Comme on ne sait pas de quel espace il s'agit..., ni même d'ailleurs s'il est de dimension finie...

C. $\exp(h)$ étant un automorphisme ne peut être nilpotent.

D. Il est vrai que $\exp(h) - \mathrm{id}$ est nilpotent (voir ci-dessus), mais la justification fournie est inexacte (voir première remarque préliminaire).

Q5 : Réponse A

---

6. Comme composée de deux polynômes de degré m, $l_m(e_m(X))$ est un polynôme de degré exactement m^2. Donc (sauf dans le cas $m \leqslant 2$!), et sans calcul, les quatre réponses sont absolument impossibles.

CEPENDANT : Montrons que : $l_m(e_m(X)) = X + X^{m+1}P(X)$ où P est un polynôme (sans préciser son degré).

On remarque pour cela que e_m et l_m sont des parties principales de développements limités célèbres. Plus précisément :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} e_m(x) + o(x^m) \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{x\to 1}{=} l_m(x) + o((x-1)^m))$$

D'après le cours sur la composition de développements limités, $l_m(e_m(x))$ sera la partie principale du développement limité de $\ln\circ\exp$ à l'ordre m, i.e $l_m(e_m(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(e^x) + o(x^m) = x + o(x^m)$.

Mais $l_m(e_m(X)) - X$ est un polynôme . Puisque ce polynôme doit être un $o(x^m)$ quand $x \to 0$, il s'écrira sous la forme $X^{m+1}P(X)$, ce qui établit le résultat annoncé.

Q6 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

7. Application directe du cours sur les polynômes d'endomorphisme ! (attention au $h-1$ qui n'a pas de sens...).

Q7 : Réponse C

---

8. On a $l_{p-1}(\exp(h)) = l_{p-1}(e_{p-1}(h)) = h + h^p P(h)$ en reprenant le résultat démontré à la question 6. Puisque $h^p = 0$, on a $l_{p-1}(\exp(h)) = h$ (et il est nilpotent d'ordre p, même si cela pouvait se démontrer autrement).

Q8 : Réponses A,B

---

9. On avait trouvé, à la question 3 : $g = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}$, avec f nilpotent d'ordre $n+1$. On peut donc écrire $g = \exp(f)$, et, en reprenant le résultat précédent avec ici $p = n+1$, on obtient $l_n(g) = f$, soit $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(g-\mathrm{id})^k}{k} = f$.

Il n'y a donc aucune réponse exacte (l'indice supérieur est n et non $n-1$!).

Q9 : Réponse E (pas de réponse exacte)

PARTIE II

10. $\det A = 0$, donc f n'est pas un automorphisme. Les autres questions sont des questions de cours.

Q10 : Réponses A,C

---

11. f n'étant pas bijective, 0 est valeur propre de f.

On sait aussi que, d'une façon générale, la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre , et, lorsque l'endomorphisme est diagonalisable, il y a égalité.

Ici, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Ker}\, f$; le rang de f est 2 car la matrice possède visiblement deux colonnes linéairement indépendantes. Conclusion :

Q11 : Réponse D

---

12. $\det B = 0$, donc g n'est pas bijectif. Mais cela n'a rien à voir avec le fait que B ne soit pas symétrique, ni avec sa diagonalisabilité !

Q12 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

13. Essayons de ne pas faire trop de calculs :

A. est manifestement fausse, car le terme dominant du polynôme caractéristique doit être $-X^3$.

B. La matrice $A - 9I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim \mathrm{Ker}(f - 9\mathrm{id}) = 2$; ainsi, 9 est valeur propre de f, d'ordre 2 puisque f est diagonalisable. Et on a déjà vu que 0 est valeur propre d'ordre 1, donc $\chi_A = -X(X-9)^2$.

C. $B - I = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ -8 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (déterminant nul), donc 1 est valeur propre de B. On a déjà vu que 0 est valeur propre , et la somme des trois valeurs propres est égale à $\mathrm{tr}(B) = 2$, donc la troisième valeur propre est aussi égale à 1. Donc $\chi_B = -X(X-1)^2$.

D. est manifestement fausse, car, g n'étant pas bijective, 0 est valeur propre .

Q13 : Réponses B,C

---

14. A. B. A étant diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples. On sait également que les valeurs propres de A sont exactement les racines de π_A, donc $\pi_A = X(X-9)$. L'ensemble des polynômes annulateurs de f est donc l'idéal engendré par $X(X-9)$.

C. $X^3 - 18X^2 + 81X = X(X^2 - 18X + 81) = X(X-9)^2 = -\chi_A$, et l'énoncé contient la démonstration du résultat !

D. $X - 9$ n'est pas annulateur de f, sinon on aurait $f = 9\mathrm{id}$.

Q14 : Réponses A,C

---

15. On a vu que 1 est valeur propre d'ordre 2 de B, mais $B - I$ (calculée au dessus) est de rang 2, donc $\dim(\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})) = 1 < 2$ et B n'est pas diagonalisable. $X(X-1)$ ne peut donc être annulateur de g (car sinon, g annulerait un polynôme scindé à racines simples donc serait diagonalisable).

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, l'idéal annulateur de g contient son polynôme caractéristique, qui est $-X(X-1)^2$.

Q15 : Réponse B

16. A. B. La division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $X(X-9)$ s'écrit : $X^k = X(X-9)Q + aX + b$, et en faisant successivement $X = 0$ puis $X = 9$, on trouve $b = 0$ et $a = 9^{k-1}$.

C. D. La division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $X(X-1)^2$ s'écrit : $X^k = X(X-1)^2Q + aX^2 + bX + c$. Pour $X = 0$, on obtient $c = 0$, puis pour $X = 1$, on obtient $a + b = 1$. En dérivant l'égalité, puis en faisant de nouveau $X = 1$ on trouve $k = 2a + b$, d'où $a = k-1$ et $b = 2-k$.
Finalement : $X^k = X(X-1)^2Q + (k-1)X^2 + (2-k)X$.

Rem : ces relations sont en fait valables pour tout $k \geqslant 1$.

Q16 : Réponses A,D

17. La relation précédente donne : $A^k = Q(A)A(A-9I) + 9^{k-1}A$, et puisque $X(X-9)$ est annulateur de A, on obtient $A^k = 9^{k-1}A$.

Même principe pour B.

Q17 : Réponses B,D

PARTIE III

18. On calcule les produits partiels, qui se simplifient :

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$$

Donc la suite des produits partiels *diverge* vers $+\infty$, et le produit infini $\displaystyle\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right)$ est divergent.

La réponse à la question D est inexacte, car l'énoncé dit « converge » vers $+\infty$... La réponse à la question B est inexacte, car le fait que $u_n > 1$ implique seulement que la suite (P_n) est croissante.

Q18 : Réponse E (pas de réponse exacte)

19. A. C'est exact. En effet, si le produit infini $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergent, la suite (P_n) des produits partiels tend vers $\ell \neq 0$, et par conséquent $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ tend vers 1 (les P_n sont non nuls puisque les u_i sont tous non nuls).

B. C. D. Ces trois affirmations sont fausses : il suffit de reprendre l'exemple de la question précédente.

Q19 : Réponse A

20. A. C. Dans l'exemple de la question 19, on avait $P_n = n+1$ donc $\dfrac{P_m}{P_n} = \dfrac{m+1}{n+1}$ qui n'a pas de limite quand m et n tendent vers $+\infty$. Cet exemple montre que les réponses A et C sont fausses.

D. Si le produit infini $P = \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, la suite des produits partiels (P_n) tend vers $\ell \neq 0$, donc $\dfrac{P_m}{P_n}$ tend vers $\dfrac{\ell}{\ell} = 1$ quand m et n tendent vers $+\infty$.

B. Réciproquement, supposons que $\dfrac{P_m}{P_n}$ tend vers 1 quand m et n tendent vers $+\infty$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2\ ,\ m \geqslant n_0 \text{ et } n \geqslant n_0 \Longrightarrow 1-\varepsilon < \frac{P_m}{P_n} < 1+\varepsilon$$

En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple dans cette propriété, on en déduit qu'à partir d'un certain rang n_0, le rapport $\dfrac{P_n}{P_{n_0}}$ est strictement positif, i.e que tous les P_n sont de même signe.
De plus, puisque $\dfrac{P_m}{P_n}$ tend vers 1, $\ln\left(\dfrac{P_m}{P_n}\right)$ tend vers 0, i.e $\ln|P_m| - \ln|P_n|$ tend vers 0 quand m et n tendent vers $+\infty$. Cela signifie que la suite $(\ln|P_n|)$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente, et par conséquent, la suite $(|P_n|)$ converge. Les P_n étant tous de même signe à partir d'un certain rang, cela signifie que la suite (P_n) converge, donc que le produit infini est convergent.

Q20 : Réponses B,D

---

21. En notant $P_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} u_i$, on a $\ln P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.
Si le produit infini converge, la suite (P_n) converge vers ℓ différent de 0, donc $\ell > 0$ et $(\ln P_n)$ converge vers $\ln \ell$, donc la série de terme général u_n converge.
Si la série de terme général u_n converge et a pour somme S, alors la suite $(\ln P_n)$ converge vers S et (P_n) converge vers e^S qui est non nul, i.e que le produit infini converge.
En conclusion (les deux réponses A et C sont en fait strictement équivalentes !) :

Q21 : Réponses A,C

---

22. D'après ce qui précède, le produit infini de l'énoncé est convergent si et seulement si la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge. Or cette série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 0$, et, si $\alpha > 0$, son terme général est équivalent, quand $n \to +\infty$, à $\dfrac{1}{n^\alpha}$, qui est le terme général d'une série convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Q22 : Réponse B

---

23. A. B. L'inégalité (de convexité) $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ est bien connue. Elle implique que f est à valeurs négatives, avec un maximum en 0.

C. La réponse est fausse, sans faire de calcul : si g admettait un minimum en 0, ce serait $g(0) = 0$ et donc g serait à valeurs toujours positives, ce qui est manifestement faux puisque sa limite en -1^+ est $-\infty$.

D. $g''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} + 1 = \dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2}$ qui s'annule en changeant de signe en 0, donc g admet un point d'inflexion en 0.

Q23 : Réponses A,D

---

24. On vient de répondre...

Q24 : Réponse B

---

25. L'étude, facile et rapide, des variations de g (le signe de g'' donne les variations de g' et $g'(0) = 0$...), montre que g est négative sur $]-1, 0]$ puis positive sur $[0, +\infty[$.
L'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ (avec égalité pour $x = 0$) est vraie pour tout $x > -1$. Conclusion :

Q25 : Réponse A

---

26. La phrase « On en déduit...» est superflue ; l'énoncé voulait nous faire faire un encadrement barbare, alors que le simple équivalent $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ suffit pour prouver la convergence de la série.

La série étant à termes positifs, les notions de convergence et d'absolue convergence sont ici identiques.

Enfin, vous devez savoir que, SI une série converge, son terme général tend vers zéro, mais que la réciproque est fausse !

Q26 : Réponse C

---

27. A. B. La fonction h est seulement continue par morceaux (discontinue aux points entiers impairs) et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Les deux réponses sont donc fausses.

C. D Étant périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, elle admet un développement en série de Fourier, et l'expression de cette série ne contiendra que des termes en sin puisque h impaire. On sait que ce développement s'écrit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$ où $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; ici, $T=2$ et $\omega=\pi$...

Q27 : Réponse D

---

28. D'après le théorème de Dirichlet, le développement en série de Fourier de h converge simplement vers h en tout point où h est continue, et vers la demi-somme des limites à droite et à gauche aux points de discontinuité, qui sont les entiers de la forme $2k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$. En ces points, la limite à gauche de h est égale à 1, la limite à droite est égale à -1, donc la demi-somme vaut 0. Conclusion :

Q28 : Réponses B,C

---

29. A. B. La convergence en moyenne quadratique est relative à la norme $\|h\|^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} |h(t)|^2\,dt$, donc est relative à l'intervalle $[-1,1]$. h étant continue par morceaux, le théorème de Parseval s'applique, et assure la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier de h.

C. D. Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[-1,1[$ (et a fortiori pas sur $\mathbb{R}$), car sinon la fonction somme devrait être continue à droite en -1, ce qui n'est pas le cas.

Q29 : Réponse A

---

30. J'ai déjà dit que le théorème de Parseval s'applique ici. Il s'écrit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|h\|^2 \quad \text{ou, ici,} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n(f)|^2}{2} = \|h\|^2$$

Il ne reste plus qu'à calculer :

$$b_n = \int_{-1}^{1} h(t)\sin(\pi n t)\,dt = 2\int_0^1 t\sin(\pi n t)\,dt = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(intégration par parties, je n'ai pas reproduit les détails du calcul).

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3}$, et on retrouve la formule bien connue $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q30 : Réponse C

---

31. Pour tout $x\in[-1,1[$, $H(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$ et H est 2-périodique. Son graphe est facile à tracer ; il permet de voir facilement que H est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux (non dérivable aux points entiers impairs), et elle est paire (mais h est impaire). Donc :

Q31 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

32. H étant continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de H vers H, d'après un théorème du cours.

Quant à la convergence en moyenne quadratique « sur $\mathbb{R}$ », je ne sais toujours pas ce que cela veut dire...

Q32 : Réponse D

---

33. Le α de l'énoncé est la pulsation ω, et vaut donc π, puisque H est 2-périodique.

La fonction étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2\int_0^1 H(t)\cos(\pi n t)\,dt$. En particulier, $a_0 = 2\int_0^1 \frac{t^2-1}{2}\,dt = -\frac{2}{3}$.

Q33 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

34. *Rem : si on connait la bonne réponse, inutile de faire les calculs à cette question...*

Pour ceux qui n'ont jamais fait cela, on calcule, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 2\int_0^1 H(t)\cos(\pi n t)\,dt = \int_0^1 (t^2-1)\cos(\pi n t)\,dt = \int_0^1 t^2\cos(\pi n t)\,dt = 2\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}$$

(intégrations par parties, je n'ai pas reproduit les détails du calcul).

La formule de Parseval s'écrit ici

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{2} = \|H\|^2$$

ce qui donne

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{2}{15}$$

d'où on tire le résultat bien connu : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Q34 : Réponse B

---

35. Notons $\ell = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. $\ln \ell = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

L'encadrement $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x \geqslant 0$, conduit à

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} \leqslant \ln \ell \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

soit $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{180} \leqslant \ln \ell \leqslant \frac{\pi^2}{6}$, puis $\exp\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{180}\right) \leqslant \ell \leqslant \exp\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$, ce qui donne approximativement $3,01 \leqslant \ell \leqslant 5,18$.

Q35 : Réponse C

PARTIE IV

36. La fonction f est définie en tout point t tel que $t \neq 0$ et $1+xt^2 > 0$. Elle sera donc définie sur $]0,+\infty[$ lorsque $x \geqslant 0$; lorsque $x < 0$, il faut de plus $xt^2 > -1$ soit $t^2 < -\dfrac{1}{x}$, soit, puisque $t > 0$, $t < \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$, et elle sera donc définie alors seulement sur $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right[$.

Attention : l'affirmation dans C est fausse : $1+xt^2$ est strictement *positif* pour tout t inférieur à...

Attention : le terme « uniquement » dans la réponse B est de trop ; l'affirmation est encore vraie pour x=0...

Les théorèmes usuels assurent ensuite sa continuité sur son domaine de définition.

Enfin, pour $x > 0$, $\ln(1+xt^2) \underset{t\to 0}{\sim} xt^2$ donc $f(t)$ est bien équivalente en 0 à $\dfrac{xt}{1+t^2}$, ce qui permet de la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Q36 : Réponse D

---

37. Pour $x \geqslant 0$, on a $1+xt^2 \geqslant 1$ donc $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Les deux réponses A et B sont inexactes.

Soit $x > 0$. $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+xt^2) = +\infty$ donc $\ln(1+xt^2) \sim \ln(xt^2) = \ln x + 2\ln t \sim 2\ln t$, d'où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln t}{t^3}$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, c'est-à-dire $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Q37 : Réponse D

---

38. Il suffit de lire, puisque l'énoncé fournit aussi la démonstration complète...

Q38 : Réponse D

---

39. Si on lit bien la définition initiale de f, il est marqué :
« On considère la fonction f de la variable réelle t, définie sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$..»

Alors, parler de fonction impaire ou d'intégrabilité sur $]-\infty,+\infty[$ pour une telle fonction *n'a absolument aucun sens !*
Sans même lire le contenu entier des réponses, on répond aussitôt :

Q39 : Réponse E (pas de réponse exacte)

---

40. A. B. Un calcul simple montre que la formule de la réponse B est exacte. Mais le problème est que l'énoncé ne définit clairement pas F en $(0,0)$...Question douteuse...

C. On sait que, pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1+u) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{u^k}{k}$, donc, pour $u \neq 0$, $\psi(u) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{u^{k-1}}{k}$, et cette égalité reste vraie pour $u = 0$. ψ est donc bien développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence égal à 1 ; d'après le cours, elle est donc bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

D. Cela n'a pas de sens, pour les fonctions de plusieurs variables, de parler de différentiabilité sur un ensemble qui est fermé ! !

Q40 : Réponses B,C

Rem : Après ces cinq questions, on s'attendrait à des questions intéressantes sur des intégrales à paramètres... Mais non ! c'est déjà fini...

Rem : INCROYABLE ! **Ces cinq dernières questions sont rigoureusement identiques aux questions n° 31 à 35 de l'épreuve optionnelle de 2007 ! !**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆