Liste des questions pouvant être liées :

(1, 2, 3 4, 5, 6)

(7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)

(21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32)

(33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40)

Ce sujet comporte 40 questions, toutes obligatoires.

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $\mathcal{I} =]-1, 1[$ par

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

Question n° 01 :

a) f est de classe C^∞ sur $\mathcal{I}$.

b) f est une fonction paire.

c) f est prolongeable par continuité en $x = +1$, mais pas en $x = -1$.

d) f est prolongeable par continuité en $x = -1$, mais pas en $x = +1$.

Question n° 02 :

Etude de la dérivabilité de f en $x = +1$.

a) Cette étude ne se pose pas car f n'est pas prolongeable en $x = +1$.

Dans le cas contraire, on note f ce prolongement et on pose $\tau = \dfrac{f(1) - f(1-h)}{h}$, $0 < h < 2$. Alors $\lim\limits_{h \to 0^+} \tau$

b) n'existe pas ou est infinie.

c) existe et a une valeur non nulle.

d) La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en $x = +1$ et en $x = -1$.

Question n° 03 :

La dérivée f' de f sur $\mathcal{I}$

a) est positive ou nulle.

b) admet un extremun et un seul.

c) est strictement monotone sur $[0, 1[$.

d) est prolongeable par continuité en $x = 1$ et $x = -1$.

Question n° 04 :

La courbe $\mathcal{C}$ est

a) concave sur au moins un intervalle inclus dans $\mathcal{I}$.

b) convexe sur au plus un intervalle inclus dans $\mathcal{I}$.

$\mathcal{C}$ admet sur $\mathcal{I}$

c) deux points d'inflexion.

d) trois points d'inflexion.

On considère la suite numérique $U = (U_n,\ n \geq 1)$ définie par $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\dfrac{n^2}{k^2 - n^2}\right)$.

Question n° 05 :

U est une somme de Darboux-Riemann associée à la fonction f sur l'intervalle

a) $[-1, 1]$.

b) $[0, 1]$.

c) U est convergente.

d) U est alternée.

Question n° 06 :

a) L'assertion c) de la question 05 est fausse.

Dans le cas contraire, il est possible d'exprimer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ sous la forme

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

On considère les fonctions de la variable réelle x, définies par

$$f(x) = \ln\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\operatorname{Argch}(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Dans le repère Oxy, on note $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{G}$) la courbe représentative de f (respectivement g).

On rappelle que la fonction Argch est la fonction réciproque de la restriction de la fonction ch (cosinus hyperbolique) à $[0, +\infty[$.

On pose $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 2[$, $I_3 =]2, +\infty[$ et $U = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

Question n° 07 :

La fonction f est définie et continue sur

a) $[2, +\infty[$

b) $I_1 \cup I_3$.

La fonction g est définie et continue sur

c) I_3.

d) $I_1 \cup I_3$.

Question n° 08 :

Pour tout $t > 1$, il est possible d'écrire

a) $\operatorname{Argch} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)$.

b) $\operatorname{Argch} t = \ln\left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)$.

g peut s'exprimer, sur son ensemble de définition, sous la forme

c) $g(x) = \dfrac{\ln\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

d) $g(x) = -\dfrac{\ln\left(x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x}\right)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Question n° 09 :

Pour x appartenant à voisinage de 2^+, $\operatorname{Argch}(x-1)$ est équivalente à

a) $\sqrt{x - 2}$.

b) $\sqrt{2}\,(x - 2)$.

g est prolongeable par continuité en 2^+ en posant

c) $g(2^+) = 1$.

d) $g(2^+) = 0$.

Dans les deux questions suivantes, on pose $t = x - 1$ avec $x \in I_3$.

On considère pour $t > 1$, $u(t) = \text{Argch } t - \dfrac{1}{t}\sqrt{t^2-1} = \text{Arg}(x-1) - \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$.

Question n° 10 :

On note $\text{sgn } X = \begin{cases} + & \text{si} \quad X \geq 0 \\ - & \text{si} \quad X < 0 \end{cases}$.

a) $\text{sgn } g'(x) = \text{sgn } u(t)$.

b) $\text{sgn } g'(x) = \text{sgn}\left(-u(t)\right)$.

c) $u'(t) = \dfrac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}$.

d) $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\sqrt{t^2-1}$.

Question n° 11 :

La fonction u est pour $t > 1$

a) décroissante.

b) croissante et bornée.

g est dans I_3

c) strictement décroissante.

d) croissante.

Question n° 12 :

Au voisinage de $+\infty$

a) $g(x) \sim \dfrac{\ln 2}{x}$.

b) $g(x) \sim \dfrac{\ln x}{x}$.

$\mathcal{G}$ possède au voisinage de $x = +\infty$

c) une branche parabolique d'axe Ox.

d) une direction asymptotique.

On considère l'équation différentielle, d'inconnue $y(x)$

$$\left(x^2 - 2x\right) y' + (x-1)\, y = 0. \tag{E}$$

Question n° 13 :

Pour $x \in U$, les solutions de (E) différentes de la banale fonction nulle sont définies par $y = K\sqrt{|x(x-2)|}$, où K est une constante réelle arbitraire

a) indépendante de I_3.

b) dépendante de I_1.

Pour $x \in U$, les solutions de (E) différentes de la banale fonction nulle sont définies par $y = \dfrac{K}{\sqrt{|x(x-2)|}}$, où K est une constante réelle arbitraire

c) indépendante de I_2.

d) dépendante de I_3.

On considère l'équation différentielle, d'inconnue $y(x)$

$$\left(x^2 - 2x\right) y' + (x-1)\, y = b, \tag{E_b}$$

où b est un réel fixé non nul.

Question n° 14 :

$\forall b \in \mathbb{R}$, les solutions sur U de (E_b)

a) forment un espace vectoriel réel de dimension 1.

b) sont obtenues en ajoutant aux solutions de (E) une constante.

c) g vérifie (E_b) sur I_3 pour $b = 1$.

d) g vérifie (E_b) sur I_1 pour $b = -1$.

On définit sur I_2 la fonction h par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ et l'on considère la fonction F définie par l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x h(t)\,dt.$$

Question n° 15 :

F est définie sur

a) I_2. b) U. c) $[0, 2]$. d) $\emptyset$.

Question n° 16 :

Sur son ensemble $\mathcal{E}_F$ de définition, F est

a) continue. b) non bornée.

c) dérivable avec $F'(x) = h(x)\ \forall x \in \mathcal{E}_F$. d) dérivable uniquement sur $I_2\backslash\{1\}$.

Question n° 17 :

Le changement de variable $\theta\sqrt{2} = \sqrt{t}$ donne pour $F(x)$

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2x}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$. b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$.

Nous obtenons ainsi

c) $F(x) = \text{Arcsin}\,\sqrt{2x}$. d) $F(x) = 2\ \text{Arcsin}\,\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

Question n° 18 :

a) $g(x)$. b) $\dfrac{\pi - F(x)}{\sqrt{x\,(2-x)}}$. c) $\dfrac{1+F(x)}{\sqrt{x\,(2-x)}}$. d) $F(x)+\pi$.

sont des solutions sur I_2 de l'équation différentielle (E_1) (Cas où $b = 1$).

Question n°19 :

On pose pour $x \in I_2$, $v(x) = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,(x-1)}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Arccos u est au voisinage de $u = 1$ équivalente à

a) $1-u$. b) $\sqrt{2}\sqrt{1-u}$.

Arcsin u est au voisinage de $u = 1$ équivalente à

c) $\dfrac{\pi}{2} - u$. d) $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{1-u}$.

Question n° 20 :

La limite de $v(x)$ pour $x \to 2^-$ est

a) finie. b) nulle.

c) v est l'unique solution de (E_1) sur I_2. d) v est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions u et f, de la variable réelle x, définies par

$$u(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\text{ch}\ x\right] \quad \text{et} \quad f(x) = e^{u(x)}.$$

On note C_u et C_f les courbes représentatives de u et f.

Question n° 21 :

a) u est définie sur $\mathbb{R}$ et donc f aussi.

b) u n'est pas définie en $x = 0$ mais f est définie en $x = 0$.

c) u est impaire et donc f est paire.

d) u et f sont paires.

Question n° 22 :

La fonction ch (cosinus hyperbolique) admet au point $x = 0$ un dl (développement limité) d'ordre 4, de la forme

$$\operatorname{ch} x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + o\left(x^4\right).$$

a) $\beta = \delta = 0$ car la fonction ch est impaire.

b) Les dl de ch x et de cos x à l'ordre 4 sont identiques.

c) $\alpha = 1$ et $\gamma = \frac{-1}{2}$.

d) $\beta = \frac{1}{2}$ et $\epsilon = -\frac{1}{24}$.

Question n° 23 :

La fonction u admet au point $x = 0$ un dl d'ordre 3, de la forme

$$u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + o\left(x^3\right).$$

a) $\beta = \delta = 0$ car la fonction u est paire.

b) $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 0$.

c) L'existence de ce dl prouve que la fonction u est au moins de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

d) L'existence de ce dl prouve que la fonction u est dérivable en $x = 0$.

Question n° 24 :

a) Il est possible d'écrire pour $x \neq 0$

$$u(x) = 1 - \frac{\ln 2}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + e^{-2x}\right).$$

$u(x)$ admet pour $x \to +\infty$ une limite

b) nulle.

c) indéterminée.

d) finie.

Question n° 25 :

a) La courbe C_u admet deux asymptotes donc une verticale.

b) La courbe C_u admet au moins un point d'inflexion.

c) La courbe C_f admet la droite d'équation $y = \frac{1}{e}$ pour asymptote.

d) La courbe C_f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Question n° 26 :

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = \dfrac{Num(x)}{x^2}$.

a) $Num(x) = x \operatorname{th} x + \ln[\operatorname{ch} x]$.

b) $Num(x) = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \ln[\operatorname{ch} x]$.

c) $Num(x)$ admet en $x = 0$ pour dl d'ordre 2 : $Num(x) = \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

d) u n'étant pas dérivable en $x = 0$ alors la courbe C_u admet en ce point une tangente verticale.

Question n° 27 :

a) La fonction $Num\ :\ x \to Num(x)$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si l'assertion ci-dessus est jugée inexacte alors

b) $Num'(0) = 0$.

c) Num est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

d) $Num(x) > 0 \ \ \forall x \geq 0$.

Question n° 28 :

La fonction f admet au point $x = 0$ un dl d'ordre 2 de la forme

$$f(x) = \alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2 + o\left(x^2\right).$$

a) α, β et γ sont tous non nuls car la fonction f n'est ni paire ni impaire.

b) u admet un dl au point $x = 0$ à un ordre $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et donc f admet aussi au point $x = 0$ un dl de même ordre n.

c) $\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\gamma = 0$.

d) $\alpha = 1$ et $\gamma = \dfrac{1}{8}$.

Question n° 29 :

Soit D la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$.

a) D est tangente en $x = 0$ à la courbe C_f et coupe C_f en deux autres points.

b) Il existe un voisinage v_0 de $x = 0$ tel que $\forall x \in v_0 \ \ f(x) - \dfrac{x}{2} - 1 \geq 0$.

c) C_f admet un centre de symétrie.

d) C_f admet une tangente verticale.

Question n° 30 :

On note F la primitive de f nulle en $x = 0$.

a) F n'existe pas car f n'est pas définie en $x = 0$.

Si l'on accepte l'assertion a) ci-dessus alors on marquera obligatoirement e) à la question 31.

b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{x}} f(t)\,dt$.

c) F est une fonction strictement croissante.

d) F admet pour $x \to +\infty$ une limite infinie.

Question n° 31 :

a) $S_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{4} f\left(\frac{k}{2}\right)$ est une valeur approchée de $F(2)$ par la méthode des rectangles.

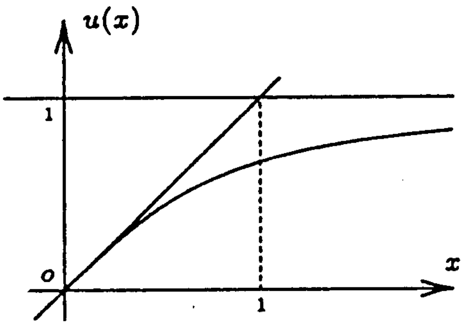
b) $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{3} f\left(\frac{k}{2}\right)$ n'est pas une valeur approchée de $F(2)$ par la méthode des rectangles.

c) $S_1 = 3,264$ à 10^{-3} près par défaut.

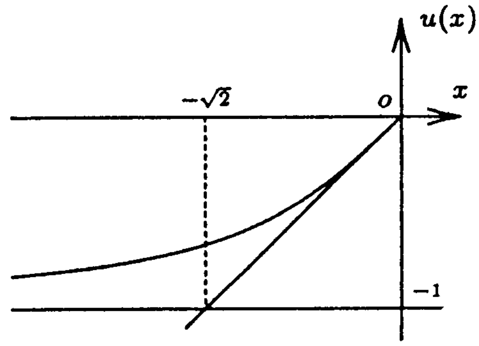
d) $S_2 = 2,792$ à 10^{-3} près par excès.

Question n° 32 :

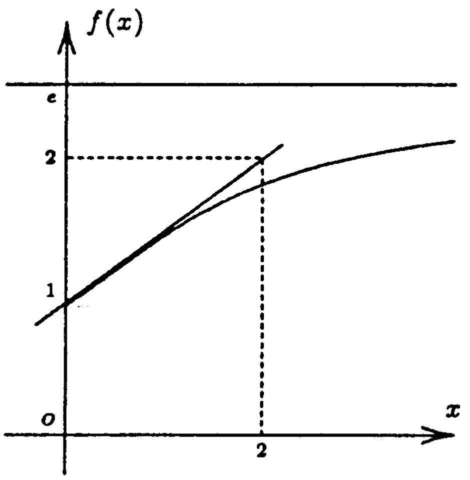
a) C_u est représentée pour $x \geq 0$ par



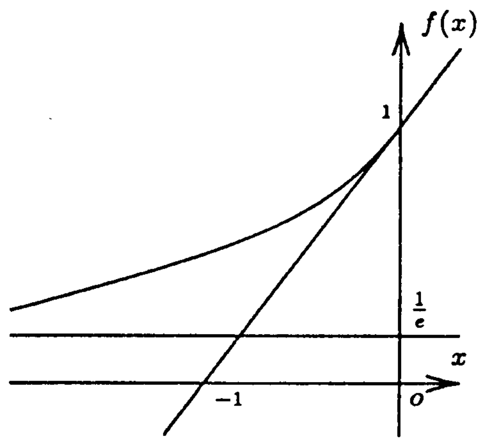
b) C_u est représentée pour $x \leq 0$ par



c) C_f est représentée pour $x \geq 0$ par



d) C_f est représentée pour $x \leq 0$ par



L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $\mathcal{B}_0 = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit l'endomorphisme φ de matrice dans $\mathcal{B}_0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Question n° 33 :

Le déterminant (Det A) de la matrice A est

a) non nul car les deux premières colonnes sont proportionnelles.

b) est nul car la somme des colonnes est $(-1, -1, -1)$.

c) est nul car la première et la troisième ligne sont identiques.

d) est nul car la trace (Tr A) est nulle.

Question n° 34 :

a) A n'est pas inversible.

b) $\overrightarrow{0}$ est un vecteur propre de φ.

c) A admet 0 pour valeur propre au moins double.

d) Tr $A = 0$ donc 0 est la seule valeur propre de A.

Question n° 35 :

Soit le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda I)$ où I est la matrice unité d'ordre 3. O désigne la matrice nulle d'ordre 3.

a) P est un polynôme de degré 2, donc 0 est une valeur propre.

b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda \operatorname{Tr} A - \operatorname{Det} A$.

c) $A^2 - I = O$.

d) $A\left(A^2 - I\right) = O$.

Question n° 36 :

a) A admet trois valeurs propres distinctes positives.

b) A n'est pas diagonalisable parce que 1 est une valeur propre triple.

c) Les sous espaces propres sont tous de dimension 1.

d) A n'est pas diagonalisable parce que 0 est une valeur propre.

Question n° 37 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & x \\ 2 & -1 & -2 & y \\ 4 & -2 & -3 & z \end{pmatrix}$ x, y et z réels.

Il existe des opérations du type $L_i \leftarrow \lambda_i L_i + \sum_{j \neq i} \mu_j L_j$ où $\lambda_i \neq 0$ et $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, qui transforment M en

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & x \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix} = (m'_{lk}).$$

où $\times$ désigne un réel quelconque, telles que

a) $m'_{22} \neq 0$.

b) m'_{34} est indépendant de x.

c) $m'_{33} = 1$.

d) $m'_{23} \neq 0$.

Question n° 38 :

La matrice $M'' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & x \\ 0 & 0 & 1 & x - 2y \\ 0 & 0 & 0 & x - z \end{pmatrix}$ est obtenue par transformation de M à l'aide des opérations successives (dans l'ordre)

a) $L_3 \leftarrow -L_3 + L_1$ puis $L_2 \leftarrow -2L_2 + L_1$.

b) $L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2$ puis $L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$.

c) $L_2 \leftarrow -2L_2 + L_1$ puis $L_3 \leftarrow -L_3 + L_1$.

d) $L_3 \leftarrow -L_1 + L_3$ puis $L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2$.

Question n° 39 :

a) $\operatorname{Im} \varphi$ est de dimension 2.

b) $x + z = 0$ est une équation de $\operatorname{Im} \varphi$.

Ker $\varphi = \mathbb{R}\vec{v}$ avec

c) $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$.

d) $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Question n° 40 :

On considère la famille $\mathcal{B} = \left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ définie par $\begin{cases} \vec{I} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{J} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{K} = \vec{i} + \vec{k} \end{cases}$

a) $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est formée de vecteurs propres de φ.

b) La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est inversible car son déterminant vaut 1.

Soit le sous espace $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $\mathcal{F} = \left(\vec{I}, \vec{K}\right)$.

c) $\mathcal{E}$ est stable par φ.

d) La restriction de φ à $\mathcal{E}$ est une involution.