ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2013**

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve obligatoire de

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
1 page d'avertissement
12 pages de texte/questions recto/verso

L'USAGE DE CALCULATRICES, DE TELEPHONES PORTABLES OU DE DOCUMENTS PERSONNELS N'EST PAS AUTORISE

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ICNA 2013**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

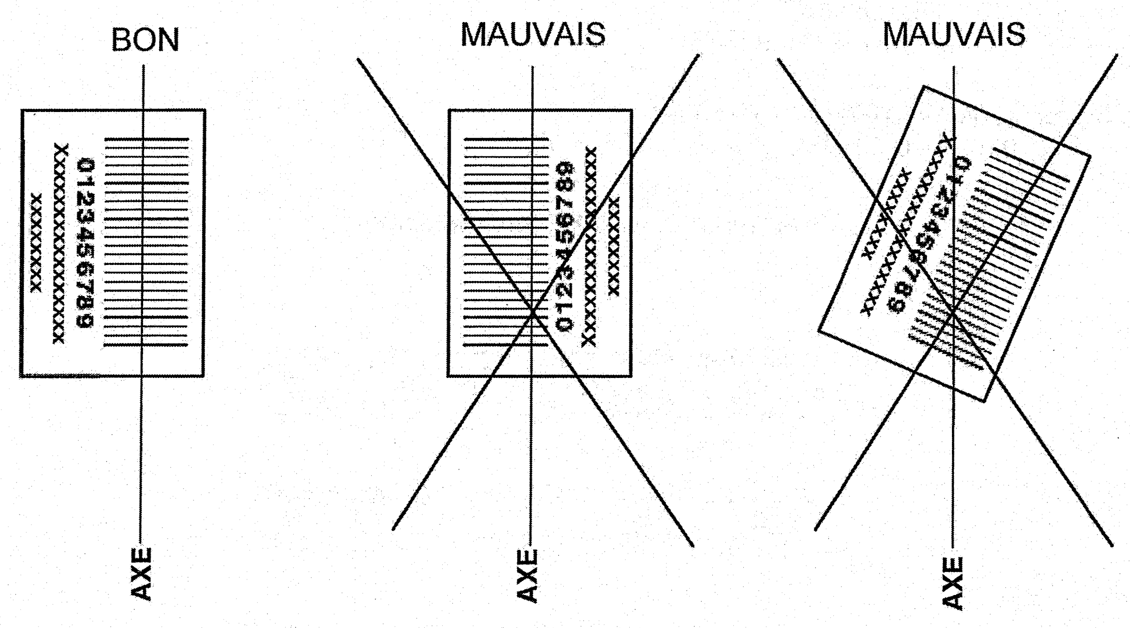
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire de mathématiques ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

<u>EXEMPLES</u> :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.

Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes.

Tournez la page SVP

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement****.*

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

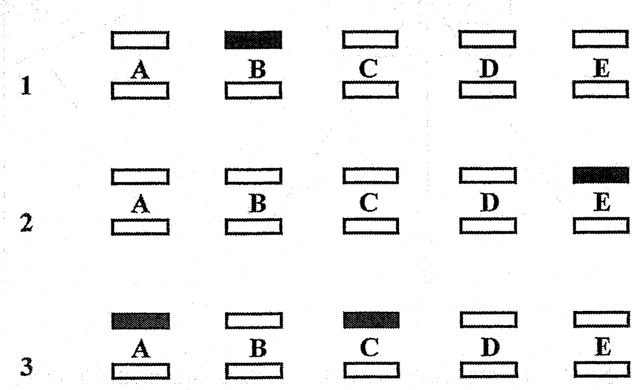
EXEMPLES DE RÉPONSES :

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENTS

L'usage de calculatrices, de téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé. Le sujet comporte 40 questions

QUESTIONS LIEES

1 à 20

21 à 38

39 et 40

PARTIE I

L'espace vectoriel IR^3 est rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de IR^3 qui à tout triplet (x, y, z) de IR^3 associe le triplet

$((2\alpha+1)x - \alpha y + (\alpha+1)z,\ (\alpha-2)x + (\alpha-1)y + (\alpha-2)z,\ (2\alpha-1)x + (\alpha-1)y + (2\alpha-1)z)$ où α est un paramètre réel.

id désigne l'endomorphisme identité de IR^3 et I la matrice unité de l'ensemble, $M_3(IR)$, des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Question 1 : La matrice M de l'endomorphisme f par rapport à la base B s'écrit

A) $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Jusqu'à la question 13 incluse, on se place dans le cas où le paramètre α est égal à -1

Question 2 : Le rang de la matrice M est

A) égal à 1 et Ker f est une droite vectorielle

B) égal à 3 car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes non nulles de cette matrice

C) inférieur ou égal à 2 car M a deux lignes identiques

D) égal à 2 et Ker f est un sous-espace vectoriel de dimension 2

Question 3 : On a

A) $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = IR^3$

B) Im f est inclus dans le plan vectoriel d'équation $3x+2y+3z=0$

C) Im f contient le vecteur $e_2 + e_3$

D) Ker f admet $(0,1,1)$ comme base Faux

$M - \lambda I$

Question 4 : Le polynôme caractéristique $\chi = \det(M\ \lambda - I)$ de la matrice M

A) est de degré 2 car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé

B) est de degré 3 car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal au rang de l'endomorphisme auquel il est associé

C) n'est pas divisible par λ car sinon sa trace serait nulle

D) est égal à $\lambda^3+6\lambda^2+8\lambda$ car $\chi = (-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 8\lambda)$
?
(E) à revérifier

Question 5 : L'endomorphisme f

A) admet une seule valeur propre

B) admet 0 pour valeur propre car f n'est pas un automorphisme

C) admet 3 valeurs propres distinctes 0, 2 et 4

D) admet une valeur propre double

Question 6 : L'endomorphisme f

A) est diagonalisable car f admet trois valeurs propres distinctes

B) n'est pas diagonalisable car f n'est pas bijectif

C) n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans M_3(IR) car le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur IR

D) n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable dans M_3(IR) car le polynôme caractéristique est scindé sur IR

Question 7 : On note λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres, éventuellement confondues, rangées dans l'ordre croissant de l'endomorphisme f. On considère $B' = (v_1, v_2, v_3)$ la famille de trois vecteurs de IR^3 telle que, pour tout i compris entre 1 et 3, v_i soit un vecteur propre associé à λ_i dont la première composante dans la base B est égale à 1

A) B' n'est pas une base de l'espace IR^3

B) v_1 appartient à $\mathrm{Ker}\, f$

C) (v_1, v_2) est une base du sous-espace $\mathrm{Im}\, f$

D) $f(v_3)$ appartient à l'intersection des sous-espaces $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$

Question 8 : On note D la matrice de l'endomorphisme f dans la base B', si elle existe, et on note P la matrice de passage de B à B', si elle est définie

A) D et P n'existe pas car B' n'est pas une base de IR^3

B) MP = PD

C) PM = DP

D) M et D n'ont pas les mêmes valeurs propres

Question 9 : On considère le système (S)

$$\begin{cases} x + y + z = r \\ -3x - y + z = s \\ -3x - y - 5\, z/3 = t \end{cases}$$

où r, s, t sont des paramètres réels

A) le système (S) n'admet pas de solution car ce n'est pas un système de Cramer

B) le système (S) admet une infinité de solutions si les trois paramètres r, s, t sont nuls

C) l'ensemble des solutions de (S) inclut le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$

D) l'ensemble des solutions de (S) ne contient qu'un seul élément qui vérifie $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$

Tournez la page SVP

Question 10 : La matrice P^{-1}

A) n'est pas définie si

B) est la matrice de passage de B' à B et vérifie rang P + rang $P^{-1} = 3$ $=6$ faux

C) a les coefficients de ses lignes qui sont les composantes des vecteurs de B dans la base B' colonnes

D) est la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 12 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ E car $P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 12 & -8 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Question 11 : Soit n un entier naturel, on a

A) $M^n = P^{-1} D^n P$ $M = PDP^{-1}$

B) $M^n = P\, D^n P^{-1}$

C) pour tout n entier supérieur ou égal à 2 la dernière ligne de M^n est nulle

D) pour tout n entier supérieur ou égal à 2, M^n a deux lignes identiques (les 2 dernières)

Question 12 : Soit E l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = b$ où b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$

A) Cet ensemble E est non vide si et seulement si b est le vecteur nul

B) Cet ensemble E est non vide si et seulement si b appartient à Im f

C) Si $b = v_1$ alors E est la droite vectorielle $\mathbb{R}\, v_1$ non car $f(v_1) = -4v_1 \neq v_1$

D) E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On considère les systèmes différentiels linéaires

$$(I)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (II)\begin{cases} y_1' = -4y_1 \\ y_2' = -2y_2 \\ y_3' = 0 \end{cases}$$

$Y' = DY$ $X' = \Pi X$ $D = P^{-1}\Pi P$ $Y' = P^{-1}\Pi P Y$ $P^{-1}X' = P^{-1}\Pi X$

Question 13 : On note (y_1, y_2, y_3) une solution de (II), s'il en existe

A) L'ensemble des solutions du système (II) est réduit à un seul élément

B) L'ensemble des solutions du système (II) est un espace vectoriel de dimension 3 d'après la question 13

C) Parmi les solutions de (I) on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $X' = PY'$ $X = PY$

D) Parmi les solutions de (I) on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Dans les cinq questions suivantes, on suppose $\alpha = 1$

Question 14 : Le sous espace vectoriel Ker f est

A) une droite vectorielle de dimension 1 car $rg(f) = 2$ par th du rang

B) de dimension 2

C) réduit au vecteur nul car f est bijectif

D) de dimension non nulle au plus égale à 3 car f n'est pas injective ?? piège car vrai mais ici $\dim(\ker f) = 1$

Question 15 : Soit (P) le plan d'équation $y + z = 0$ et (D) la droite d'équation $x = y = z$. On a

A) Ker f est inclus dans P

B) Ker $f + D = P$ $\longrightarrow = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\ker(f) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

C) $x = -y = -z$ est une équation de Ker f non $x = y = -z$

D) $2e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur de Ker f $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Question 16 : On a

A) $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre double car M est de rang 1   Non L

B) M est diagonalisable car toutes ses valeurs propres sont simples   Non

C) Im f est un sous espace propre de dimension 1   non L

D) Ker f est un sous espace propre de dimension 2   non 1

E

On considère les matrices N et Q définies par

$$N=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & a & -1\\ -1 & b & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$ ↳ ici M trigonalisable

où a et b sont des paramètres réels

Question 17 : On considère l'équation matricielle (1) : M N = N Q

A) elle donne un système de rang 1, donc a et b sont liés par une relation linéaire

B) elle donne un système de rang 2, ce qui permet de déterminer les valeurs de a et b

C) il existe une infinité de solutions (a,b) telles que $a + b = 0$

D) le couple $(-2,-2)$ est solution

Question 18 :   ? car 2 vp à trouver

A) il existe une matrice inversible unique N vérifiant l'équation (1)   matrice des vp

B) l'équation M N = N Q admet une solution mais la matrice N n'est pas inversible

C) les matrices N et Q sont semblables

D) les matrices M et Q sont semblables $M = NQN^{-1}$
↳ triang sup

Dans les deux dernières questions de cette partie, on pose $\alpha = 0$

Question 19 : La matrice M

A) a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes

B) n'est pas diagonalisable car 0 est valeur propre

C) le vecteur $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de f et constitue une base de Ker $(f+id)$

D) le vecteur $e_1 - e_2$ est un vecteur propre de f et constitue une base de Im f (pour la vp 1)

Question 20 : La matrice M est telle que

A) $M(M^2 + M + I) = 0$

B) $M(M^2 - M + I) = 0$

C) la matrice $M - I$ est inversible $\det(M-I)=0$

D) il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout n entier supérieur à 2

$M^n = u_n M + v_n I$

PARTIE II

On considère l'équation différentielle

(E) $\quad x(x-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$

Question 21 : On note, si elle existe, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de (E) développable en série entière de rayon de convergence R

A) (E) n'admet pas de solution développable en série entière au voisinage de 0

B) $(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$ pour tout entier naturel n

C) $((n+1)^2 x - n(n-1))\, a_n = 0$ pour tout entier naturel n

D) $(n+1)a_n - na_{n+1} = 0$ pour tout entier strictement positif n et a_0 arbitraire ?

? ✓ plutôt !! $n \in \mathbb{N}$

Question 22 : Le rayon de convergence R de cette série entière solution de l'équation différentielle (E), si elle existe, est égal à

A) 0 car la seule solution développable en série entière est la fonction nulle
B) 0 car la suite de terme général a_{n+1}/a_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
C) 1 car la suite de terme général a_{n+1}/a_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$
D'alembert
D) $+\infty$ Faux

Question 23 : Une série entière de rayon de convergence R, réel strictement positif, est

A) toujours normalement convergente sur l'intervalle]–R,R[
B) toujours absolument et simplement convergente sur l'intervalle]–R,R[
C) simplement convergente sur l'intervalle]–R,R[mais n'est pas nécessairement absolument convergente sur cet intervalle
D) normalement convergente sur tout compact de l'intervalle]–R,R[

Question 24 : La suite (a_n), n entier naturel, des coefficients du développement en série entière d'une solution de l'équation différentielle (E)

$a_0 = 0$ qd on remplace ds équa diff
A) est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = na_1$ pour tout entier strictement positif n, où a_1 est un réel quelconque
B) est définie pour tout entier naturel n par $a_n = na_0$ où a_0 est un réel quelconque
C) est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = (-1)^n na_1$ pour tout entier strictement positif n, où a_1 est un réel quelconque Faux
D) n'est pas définie car il n'existe pas de solution développable en série entière autre que la fonction nulle inutile

Question 25 : La fonction f solution de (E) développable en série entière

A) est nécessairement la fonction nulle
B) est définie sur IR par $f(x) = a_1x/((1-x)^2)$
C) est définie sur]–1,1[par $f(x) = a_1x/((1+x)^2)$
D) est définie sur]–1,1[par $f(x) = a_1x/((1-x)^2)$ ok ??

On considère les intervalles ouverts $I_1=]-\infty,0[$, $I_2=]0,1[$ et $I_3=]1,+\infty[$ et on note $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur l'intervalle I_k, pour k entier compris entre 1 et 3.

Question 26 : Une solution y_0 de l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles I_k, pour k entier compris entre 1 et 3,

A) est définie par $y_0(x) = x/((1+x)^2)$
B) est définie par $y_0(x) = x/((x-1)^2)$
C) n'existe pas
D) est nécessairement la fonction nulle

Question 27 : En effectuant le changement de fonction inconnue défini sur I_k, pour k entier compris entre 1 et 3, par $y = z\,y_0$ où y_0 est la fonction définie dans la question 21 et y une solution de (E), on obtient

A) $z'' + \{2(y_0'/y_0) + (3/(x-1))\}z' = 0$ pour tout x appartenant à I_k
B) $z'' + \{2(y_0'/y_0) + (3/(x+1))\}z' = 0$ pour tout x appartenant à I_k
C) z' vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre
D) la fonction z n'est soumise à aucune condition

Question 28 : On obtient alors, λ et μ désignant des réels et ln la fonction logarithme népérien, pour tout x appartenant à I_k, pour k entier compris entre 1 et 3,

A) $z'(x) = \lambda\,(x+1)/(x^2)$
B) $z'(x) = (x-1)/(x^2)$ λ manque $z' = \lambda\,\frac{(x-1)}{x^2}$ C
C) $z(x) = \lambda(\ln|x| + (1/x))$
D) $z(x) = \lambda(\ln|x| - (1/x)) + \mu$

$z = \lambda\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + \mu$

Question 29 : Sur chacun des trois intervalles I_k, pour k entier compris entre 1 et 3, on obtient pour y solution de l'équation différentielle (E), λ et μ désignant des réels,

A) $y(x) = \lambda(x\ln|x| + 1)/((x-1)^2)$
B) $y(x) = (\lambda(x\ln|x| + 1)/((x-1)^2)) + (\mu\,x/((x-1)^2))$
C) $y(x) = (\lambda(x\ln|x| - 1)/((x+1)^2)) + (\mu\,x/((x+1)^2))$
D) $y(x) = (\lambda(x\ln(x) + 1) + \mu\,x)/((x-1)^2)$

Question 30 : Soit g une solution de (E) sur l'intervalle $]-\infty,1[$

A) il n'existe pas de solution de (E) sur $]-\infty,1[$ autre que la fonction nulle
B) g est continue sur $]-\infty,1[$ mais n'est pas nécessairement dérivable en 0
C) g est une fonction réelle de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ telle que la restriction à I_1 (respectivement I_2) appartient à $\mathscr{S}_1$ (respectivement $\mathscr{S}_2$)
D) g est continue sur $]-\infty,1[$ mais g' n'est pas nécessairement continue en 0

Question 31 : La fonction g définie à la question 25, si elle existe, vérifie

A) $g(x) = (a(x\ln|x| + 1)/((x-1)^2)) + (bx/((x-1)^2))$ où a et b sont des réels non nuls fixés
B) $g(x) = (g(0)(x\ln|x|+1)/((x-1)^2)) + (bx/((x-1)^2))$ sur I_1 et
$g(x) = (g(0)(x\ln|x|+1)/((x-1)^2)) + (cx/((x-1)^2))$ sur I_2 avec b et c réels distincts
C) $g(0) = 0$ car sinon $|g'(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 ce qui est impossible puisque g est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$
D) $g(x) = \alpha x/((x+1)^2)$, α réel quelconque, d'aprés la continuité de g' en 0

Question 32 : L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]-\infty,1[$

A) est un espace vectoriel de dimension 1 dont la fonction g_0, définie par $g_0(x) = x/((x-1)^2)$, est une base

B) est la droite vectorielle engendrée par la fonction g_0, définie par $g_0(x) = x/((x+1)^2)$

C) est un espace vectoriel de dimension 2 comme ensemble de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre

D) est l'espace vectoriel nul

Question 33 : Soit h une solution de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$

A) il n'existe pas de solution de (E) sur $]0,+\infty[$ autre que la fonction nulle

B) h n'est pas continue en 1

C) h est continue sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 1

D) h est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ mais h' n'est pas nécessairement continue en 1

Question 34 : On note l la fonction $l(x) = a(x \ln x + 1) + bx$

A) l est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,+\infty[$

B) le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction l s'écrit

$$(a+b) + (a+b)(x-1) + (a/2)\,(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

C) le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction l s'écrit

$$(a+b) + (a+b)x + (a/2)\,x^2 + o(x^2)$$

D) la fonction $l(x)/((x-1)^2)$ a une limite finie en 1 si et seulement si $b = -a$ et cette limite est dans ce cas égale à $a/2$

Question 35 : Les seules solutions possibles de l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ sont les fonctions h définies par, a étant un réel fixé,

A) $h(x) = a((1-x) + x \ln x)/(x-1)^2$ pour x différent de 1 et $h(1) = a/2$

B) $h(x) = a((1-x) + x \ln x)/(x-1)^2$ pour x différent de 1 et $h(1) = -a/2$

C) $h(x) = a((1+x) + x \ln x)/(x-1)^2$ pour x différent de 1 et $h(1) = a/2$

D) $h(x) = a((x-1) + x \ln x)/(x-1)^2$ pour x différent de 1 et $h(1) = a/2$

Question 36 : Une solution h de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$, a étant un réel fixé,

A) ne peut être développable en série entière au voisinage de 1

B) est développable en série entière au voisinage de 1 de rayon de convergence 1

C) s'écrit $a\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}((1/(n+2))-(1/(n+1)))(x-1)^n$ pour tout x appartenant à $]0,2[$

D) s'écrit $a\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}((1/(n+2))-(1/(n+1)))x^n$ pour tout x appartenant à $]0,1[$

Question 37 : Toute solution h de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$

A) est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,2[$ mais ne peut être de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

B) est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ mais ne peut être de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ car toute fonction de classe C^∞ est développable en série entière

C) est de classe C^∞ sur l'intervalle $]1,+\infty[$ mais ne peut être de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

D) est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puisqu'elle est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et développable en série entière au voisinage de 1 donc de classe C^∞ sur $]0,2[$

Question 38 : On en conclut que

A) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0,+\infty[$ est l'espace vectoriel nul

B) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0,+\infty[$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction h_0, définie par

$$h_0(x) = ((1-x) + x\ln x)/(x-1)^2 \text{ pour } x \text{ différent de 1 et } h_0(1) = 1/2$$

C) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur IR est une droite vectorielle

D) l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur IR est réduit à la fonction nulle

PARTIE III

On considère la fonction g de la variable réelle x définie, lorsqu'elle existe, par
$g(x) = x^n/(1-x^2)^{1/2}$ pour tout n entier naturel

Question 39 : Pour tout entier naturel n, on a

A) la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$
B) la fonction g est définie et continue sur $[0, +\infty[-\{1\}$
C) la fonction g est définie, continue et positive sur $[0, 1[$
D) $]-1, 1[$ est le plus grand intervalle sur lequel la fonction g est de classe C^∞

Question 40 : La fonction g

A) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $]0, 1[$ car toute fonction positive et continue sur un intervalle ouvert est intégrable sur cet intervalle ouvert
B) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $[0, 1[$ car g est positive, continue sur $[0, 1[$ et équivalente au voisinage de 1 à $1/(2(1-x))^{1/2}$ fonction intégrable sur $]-\infty, 1[$
C) n'est pas intégrable sur $[0, 1[$ car la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 1
D) est, pour tout n entier naturel, intégrable sur $]-1, 1[$ car g est continue sur $]-1, 1[$ et $|g|$ est équivalente au voisinage de 1 à $1/(2(1-x))^{1/2}$ et à $1/(2(1+x))^{1/2}$ au voisinage de -1 fonctions intégrables sur $]-1, 1[$