Première partie

Soit n un entier, $n \geq 2$ on note **dans toute cette partie**, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E.
La matrice élémentaire $E_{i\,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1.
Si $M \in E$, on note $\text{vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

Si $M = (m_{i\,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^{n} m_{k\,k}$ (trace de la matrice M).

On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.

A chaque matrice U de E, on associe :

- L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(UM)$.
- L'ensemble $H_U = \{ M \in E \,/\, T(UM) = 0 \} = \text{Ker}(T_U)$.

1. On rappelle que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

On a :

(A) $\dim(E^*) = \dim(E)$

~~B)~~ $\dim(E^*) = \dim(E) + 1$

~~C)~~ $\dim(E^*) = 2\dim(E)$

~~D)~~ $\dim(E^*) = (\dim(E))^2$

2. L'application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$ est :

~~A)~~ inversible

(B) élément de E^* linéaire

~~C)~~ injective

~~D)~~ surjective $\dim$ finie

Tournez la page S.V.P.

3. L'application T vérifie :

(A) pour tout $(A,B)\in E^2, T(AB)=T(BA)$

~~B)~~ pour tout $(A,B,C)\in E^3, T(ABC)=T(BAC)$

(C) pour tout $(A,B,C)\in E^3, T(ABC)=T(CAB)$

~~D)~~ si $(A,B)\in E^2$, A inversible, $T(AB)=T(A)$

4. Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ des éléments de E :

~~A)~~ $T(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$

(B) $T(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ij}$

(C) $T('AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$

~~D)~~ $T('AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{ij}$

5. Pour $U\in E$,

~~A)~~ l'application T_U n'est pas linéaire

(B) l'application T_U est élément de E^*

~~C)~~ pour tout $(A,B)\in E^2, T_U(AB)=T_U(BA)$

(D) H_U est un sous-espace vectoriel de E

$\simeq \ker(T_U)$

6. Pour tout couple $(i,j)\in\mathbb{N}^2$:

~~A)~~ E_{ij} est une matrice inversible

~~B)~~ E_{ij} est une matrice diagonalisable

(C) E_{ij} est une matrice de rang 1

~~D)~~ E_{ij} est une matrice de trace nulle

Dans les questions **7.** *et* **8.** uniquement on prend $n=2$, et on pose $U=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

7. On a :

(A) la famille $\mathscr{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est une base de $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\dim=2^2=4$

~~B)~~ pour tout couple $(i,j)\in\{1,2\}^2$, $T_U(E_{ij})=0$ $=1$

~~C)~~ $\mathrm{Ker}(T_U)=\{0\}$

(D) H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0

8. On a :

A) $\dim H_U = 1$

B) $\dim H_U = 2$

C) $\dim H_U = 3$

D) H_U possède une matrice inversible

On revient au cas général.

9. Soit U une matrice non nulle de E on a :

A) pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $T_U(E_{ij}) = 0$

B) on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.

C) $\dim H_U = n-1$

D) $\dim H_U = n^2 - 1$

10. Si H est un hyperplan vectoriel de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

A) $\dim H = n-1$

B) $\dim H = n^2 - 1$

C) il existe A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H telle que : $E = H \oplus \text{vect}(A)$

D) H est un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension n.

Dans la suite, pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^{r} E_{ii} \in E$

11. On a, pour tout $1 \leq r \leq n$, :

A) la matrice R_r est de rang n

B) la matrice R_r est inversible

C) la matrice R_r est de trace nulle

D) $H_{R_r} = \{0\}$

Tournez la page S.V.P.

12. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est- à -dire $P = (p_{ij})$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1,i} = 1, \ 1 \le i \le n-1 \\ p_{1n} = 1 \\ p_{ij} = 0, \text{ ailleurs} \end{cases} .$$

(A) P est inversible
~~B)~~ P n'est pas inversible
(C) P appartient à l'hyperplan H_{R_r}
~~D)~~ P n'appartient pas à l'hyperplan H_{R_r}

V rgr $\Leftrightarrow$ V semblable équivalente à J_r $\Leftrightarrow \exists P, Q$ inv tq $V = P J_r Q^{-1}$

→ **13.** On a : une matrice V de E est de rang r, si et seulement si,
~~A)~~ il existe une matrice inversible Q de E telle que $Q^{-1}VQ = R_r$
~~B)~~ il existe une matrice inversible Q de E telle que $V = Q^{-1}R_rQ$
~~C)~~ la trace de la matrice V est r
(D) il existe deux matrices S_1 et S_2 inversibles de E telles que $S_1 V S_2 = R_r$

Pour la question suivante, on admet le résultat :
Si H est un hyperplan vectoriel de E, il existe un élément U non nul de E tel que $H = H_U$.

14. Soit H un hyperplan vectoriel de E
il existe un élément U de E de rang r tel que $H = H_U$.
on suppose qu'il existe deux matrices S_1 et S_2 inversibles de E telles que $S_1 U S_2 = R_r$.
On note toujours P la matrice de la question **12.**
(A) la matrice $S_2 P S_1$ est inversible
(B) la matrice $S_2 P S_1$ est élément de H
~~C)~~ la matrice $R_r P$ est élément de H
~~D)~~ H ne contient aucune matrice inversible

Deuxième partie

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ où pour tout réel x, $u_n(x)=\frac{1}{2^n}\cos(nx)$.

15. On a :

A) il existe au moins un réel x pour lequel la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ diverge

B) le terme général de cette série ne converge jamais vers 0

C) la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

D) la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$

Dans la suite, on pose pour tout x pour lequel cela a un sens, $U(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

16. On a :

A) $U(0)=\frac{1}{2}$

B) $U(0)=\frac{1}{4}$

C) $U(\pi)=\frac{3}{2}$

D) $U(\pi)=\frac{-1}{2}$

17. On a :

A) $\cos(nx)$ est la partie réelle de e^{inx}

B) $\cos(nx)$ est la partie imaginaire de e^{inx}

C) pour tout réel x, $\cos(nx)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

D) pour tout réel x, $\sin(nx)=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$

Tournez la page S.V.P.

18. On a pour tout réel x,

A) $U(x)=\dfrac{\cos x-2}{4\cos x-5}$

B) $U(x)=\dfrac{\cos x-2}{5\cos x-4}$

C) $U(x)=\dfrac{2\cos x-1}{5-4\cos x}$

D) Il n'existe aucune formule donnant $U(x)$ pour tout réel x

Soit $\alpha\in\left]-1,1\right[$, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ où $w_n(x)=\dfrac{\alpha^n}{n}\cos(nx)$ et on pose pour x réel, $W(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$.

19. On a, pour tout $\alpha\in\left]-1,1\right[$:

A) $W(0)=\ln(1-\alpha)$

B) $W(0)=-\ln(1-\alpha)$

C) $W(0)=\ln(1+\alpha)$

D) $W(0)=\ln(\alpha-1)$

20. On a, pour tout $\alpha\in\left]-1,1\right[$:

$\dfrac{\alpha^n}{n}\leq\dfrac{\alpha^n}{2}$ CV

A) la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\alpha^n}{n}$ diverge

B) la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{|\alpha|^n}{n}$ converge car c'est le terme général de la série exponentielle

C) pour $\alpha\neq 0$, la règle de d'Alembert permet de prouver que la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{|\alpha|^n}{n}$ converge

D) la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

21. De plus, la fonction W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car toutes les fonctions w_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

~~A)~~ la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

Ⓑ la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

Ⓒ la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$

~~D)~~ la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

22. On note $\operatorname{Im} z$, la partie imaginaire d'un complexe z. Pour $\alpha \in]-1,1[$, on a :

Ⓐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx} = \dfrac{\alpha e^{ix}}{1-\alpha e^{ix}}$

~~B)~~ $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx} = \dfrac{1}{1-\alpha e^{ix}}$

Ⓒ $W'(x) = -\operatorname{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}$

~~D)~~ $W'(x) = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}$

23. On a pour tout réel x,

~~A)~~ $W'(x) = \dfrac{2\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$

Ⓑ $W'(x) = \dfrac{-\alpha\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$

~~C)~~ $W'(x) = \dfrac{\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$

~~D)~~ $W'(x) = \dfrac{\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$

Tournez la page S.V.P.

24. On arrive ainsi à :
pour tout réel x, $W(x) = k\ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)$ où k est une constante non nulle et on peut alors en déduire l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\,dx$ en :

A) effectuant une intégration par parties
B) effectuant un changement de variables
C) utilisant un argument de parité
(D) utilisant que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

25. On peut conclure que :

A) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\,dx = k$
(B) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\,dx = 0$
C) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\,dx = \frac{1}{2}$
D) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos(x)+\alpha^2)\,dx \neq 0$

Troisième partie

On note $A = \underset{e_1}{\underset{e_2}{\underset{e_3}{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}}}$ et $\chi_A(X) = \det(A - XI_3)$ son polynôme caractéristique.

$= (-(X-2)^2(X-3)$
$\rightarrow$ trigonal.

26. On a :

A) $\chi_A(X) = (X-3)(X-2)^2$
(B) $\chi_A(X) = (3-X)(X-2)^2$
C) $\chi_A(X) = (X-3)^2(X-2)$
D) $\chi_A(X) = (X-3)(X-2)(X-1)$

$\dim E_2(A) = 1$

27. La matrice A ci-dessus est :

A) diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
B) diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension de chaque sous-espace propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.
(C) non diagonalisable
(D) inversible

28. Si A est la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, si on pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\varepsilon_2 = 4e_1 + 3e_2 + 4e_3$ et $\varepsilon_3 = -2e_1 - e_3$ on a :

Ⓐ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

~~B)~~ ε_1, ε_2 et ε_3 sont trois vecteurs propres de u.

~~C)~~ $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ donc par vect. pr

~~D)~~ $u(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_3$

On note $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A = PTP^{-1}$

29. On a :

~~A)~~ les matrices A et T sont semblables car elles ont le même rang "⇒"

~~B)~~ les matrices A et T sont semblables car elles ont le même déterminant "⇒"

Ⓒ les matrices A et T sont semblables car elles ont le même polynôme caractéristique

~~D)~~ les matrices A et T sont semblables car elles ont la même trace. "⇐"

30. Si on note $P = \begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$, on a : $\quad P = \mathcal{B}_{e \to \varepsilon}$

$A = PTP^{-1}$

$P^{-1}AP = T$

~~A)~~ $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$u(\varepsilon_1) = 3.\varepsilon_1$

Ⓑ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

~~C)~~ $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

~~D)~~ $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tournez la page S.V.P.

On note $T=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

On note $C(T)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices qui commutent avec la matrice T c'est-à-dire les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MT=TM$.

31. On a :

A) $C(T)=\{0\}$.

B) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 3 engendré par les matrices J, K et L

C) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les matrices K et L

D) $C(T)$ est un espace vectoriel de dimension 4

32. On admet que $C(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices qui commutent avec la matrice A, est de dimension 3, on a alors :

A) $C(A)=\text{vect}\{J,K,L\}$

B) $C(A)=\text{vect}\{T,T^2,T^3\}$

C) $C(A)=\text{vect}\{I_3,A,A^2\}$

D) $C(A)=C(T)$

$M\in\mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP\in\mathcal{C}(T)$

↳ algèbre
↳ stable pour le produit

Quatrième partie

33. Une série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ de rayon $R\neq 0$:

A) converge normalement sur l'intervalle $]-R,R[$

B) converge normalement sur l'intervalle $[-R,R]$

C) converge normalement sur tout segment $[a,b]\subset]-R,R[$

D) diverge si $x\in\{-R,R\}$

34. Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série de réels, on a :

A) $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge

B) $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0}u_n$ converge

C) $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ diverge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0}u_n$ diverge

D) si (u_n) est une suite de reéls décroissante et de limite nulle, $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ converge

On s'intéresse dans la suite de cette partie aux séries $\sum_{n\geq 2} u_n$ où pour a et b réels, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a (\ln n)^b}$.

35. On a :

~~A)~~ pour tout couple (a,b) de réels, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge

(B) si $a>1$, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente

(C) si $a<1$, la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ diverge

~~D)~~ si $a=b=1$, la règle de d'Alembert permet de donner la nature de la série série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$

36. Dans cette question, $a=1$.

On a :

~~A)~~ l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\,(\ln x)^b}\,dx$ ne converge que si $b\neq 1$

~~B)~~ l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\,(\ln x)^b}\,dx$ ne converge que si $b<1$

(C) si l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\,(\ln x)^b}\,dx$ converge alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge

(D) si l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\,(\ln x)^b}\,dx$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge

37. Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs, on a :

~~A)~~ $\left|\sum_{n=2}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |u_n|$,

~~B)~~ $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$, pour tout entier $n\geq 2$

(C) $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \dfrac{1}{n^a (\ln n)^b}$, pour tout entier $n\geq 2$

(D) si de plus, $a>1$, la série entière $\sum_{n\geq 2} u_n x^n$ converge normalement sur l'intervalle $]-1,1[$

Tournez la page S.V.P.

38. Dans cette question $b=0$ et on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. On a :

A) si $a=1$ et si $n\geq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$

B) si $a=1$ et si $n\geq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$

C) si $a=2$ et si $n\geq 1$, $\sum_{n\geq 1}u_n$ diverge

D) si $a=2$ et si $n\geq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

Dans la suite on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2}f_n$, où on pose pour tout $x\in[0,1[$, et tout $n\geq 2$, $f_n(x)=\frac{1}{\ln n}x^n(1-x)$. On note $\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in[0,1[}|f_n(x)|$.

39. On a :

A) $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{(n+1)\ln n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

B) $\|f_n\|_\infty=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

C) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ équivaut à 1 au voisinage de l'infini

D) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ équivaut à $\frac{1}{e}$ au voisinage de l'infini

40. La série de fonctions $\sum_{n\geq 2}f_n$ ne converge pas normalement sur l'intervalle $[0,1[$ car :

A) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$

B) la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ diverge

C) la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ converge

D) la série $\sum_{n\geq 2}\|f_n\|_\infty$ diverge

IN CHOISY - D'après documents fournis