Problème 1

On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \, dx$

1 – La suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, vérifie

A) $I_n > 0$ pour tout entier $n \geq 0$

B) (I_n) est strictement décroissante

~~C)~~ (I_n) est croissante

~~D)~~ (I_n) est une suite alternée

à voir.

2 – On a

~~A)~~ $(n+1)\, I_n = (n-1)\, I_{n-2}$, $\forall\, n \geq 2$

B) $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$, $\forall\, n \geq 2$

~~C)~~ $nI_n = (n+2)\, I_{n-2}$, $\forall\, n \geq 2$

~~D)~~ $(n+2)\, I_n = (n+1)\, I_{n-2}$, $\forall\, n \geq 2$

3 – La valeur de I_n est :

~~A)~~ $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \dfrac{\pi}{2}$

~~B)~~ $I_n = \dfrac{2^n n!}{2n+1} \dfrac{\pi}{2}$

C) $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

D) $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$

4 – On a

A) $\frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim}$ $\dfrac{n-1}{2n+1} \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n-1}} \leq 1 \quad \forall\, n > 0$

~~B)~~ $\dfrac{n}{2n+1} \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n-1}} \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall\, n > 0$

C) $1 \underset{+\infty}{\sim}$ $\dfrac{2n}{2n+1} \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n-1}} \leq 1 \quad \forall\, n > 0$

~~D)~~ $\dfrac{2n}{n+1} \leq \dfrac{I_{2n}}{I_{2n-1}} \leq 1 \quad \forall\, n > 0$

Tournez la page S.V.P.

$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$?

5 – La limite de $\frac{I_{2n}}{I_{2n-1}}$ lorsque $n \to \infty$ est : 1

A) 0

B) -1/2

C) 1/2

D) non définie

6 – On pose $u_n = \sqrt{n}\,\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ $\xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $u_n = \sqrt{n}\cdot\frac{2}{\pi} I_{2n}$

A) (u_n) est divergente

B) (u_n) est convergente

C) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

$n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

7 – On pose pour tout $n > 0$ $F_n = n!\left(\frac{n}{e}\right)^{-n} n^{-1/2}$ et on forme $V_n = \ln(F_{n+1}) - \ln(F_n)$

$\sqrt{2\pi}$

A) $V_n = 1 - n.\ln(1+1/n)$

B) $V_n = 1 - \frac{1}{2n^2}$

C) $V_n = 1 - (n+\frac{1}{2}).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

D) $V_n = 1 - (n+\frac{1}{2}).$

8 – On a

A) $V_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

B) $V_n = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

C) $V_n = \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

D) $V_n = \underbrace{-\frac{1}{12n^2}}_{cv} + \underbrace{\frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{cv}$ $\sim \frac{1}{12n^3}) \geq 0$

9 – La série de terme général V_n vérifie

A) la série est convergente

~~B)~~ la série est divergente

C) $\sum_{p=1}^{n} V_p = \ln(F_{n+1}) - \ln(F_1)$

~~D)~~ $\sum_{p=1}^{n} V_p = \ln(F_n) - \ln(F_1)$

10 – En calculant $\frac{F_{2n}}{(F_n)^2}$ on obtient :

~~A)~~ $\frac{F_{2n}}{(F_n)^2} = \frac{u_n}{2}$

~~B)~~ $\frac{F_{2n}}{(F_n)^2} = \frac{u_{n-1}}{2}$

C) $\frac{F_{2n}}{(F_n)^2} = \frac{u_n}{\sqrt{2}}$

~~D)~~ $\frac{F_{2n}}{(F_n)^2} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$

11 – La suite (F_n), $n \in \mathbb{N}^*$, vérifie :

~~A)~~ (F_n) est divergente

~~B)~~ $\lim_{n\to\infty} F_n = 2\pi$ $\{F_n\} \to \sqrt{2\pi}$

~~C)~~ $\lim_{n\to\infty} F_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

~~D)~~ $\lim_{n\to\infty} F_n = +\infty$

12 – Soit $J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx$, $n \geq 0$

~~A)~~ $J_n = (-1)^n I_n$

B) $J_n = I_n$

~~C)~~ $J_n + I_n = \pi$ $\to J_2 = I_2 = \frac{\pi}{4}$

D) $J_n \leq \pi/2$

Tournez la page S.V.P.

13 – Soit $K_n = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \, dx$, $n \geq 0$

~~A)~~ $K_n = 2I_{2n+2}$

B) $K_n = 2I_{2n+1}$

C) $K_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

~~D)~~ $K_n = \dfrac{\pi}{2} I_{n+1}$

14 - Soit $L_n = \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \, dx$, $n \geq 0$

~~A)~~ $L_n = K_n$

B) $L_n = (-1)^n K_n$

~~C)~~ $L_n = \pi I_n$

~~D)~~ $L_n = \dfrac{\pi}{2} n! I_{n-1}$

Problème 2

Etant donnés deux réels strictement positifs a et b

On pose

$a,b > 0$

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \qquad J(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}}_{\text{paire}} = 2\int_0^{+\infty} - = 2I(a,b)$$

15. La fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ déf $\mathbb{R}$ continue paire

~~A)~~ n'est pas continue sur $]-\infty;+\infty[$

~~B)~~ est continue sur $[0;+\infty[$ uniquement

C) est continue sur $]-\infty;+\infty[$

~~D)~~ est continue sur $]0;+\infty[$ uniquement

16. La fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ >0

~~A)~~ est équivalente à $1/_{t^2}$ quand $t \to 0$

B) est équivalente à $\underbrace{1/_{t^2}}_{\text{int.}}$ quand $t \to \pm\infty$

~~C)~~ est équivalente à $1/_{|t|}$ quand $t \to 0$

~~D)~~ est équivalente à $1/_{|t|}$ quand $t \to \pm\infty$

17. On a

~~A)~~ $I(a,b)$ divergente

B) $I(a,b)$ convergente

~~C)~~ $J(a,b)$divergente

~~D)~~ $J(a,b) = \cancel{\tfrac{1}{2}}I(a,b)$
2

Tournez la page S.V.P.

$t = \tan\theta$

18. $I(a,b)$ vaut

A) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$

C) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$

B) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$

D) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\tan^2\theta)^{1/2}}$

19. On pose pour $x > 0$ $g(x) = I(1,x)$

A) g est continue sur $]0;+\infty[$

~~B)~~ $g(1) = 1$ $= \frac{\pi}{2}$

C) g a une limite finie en 0

~~D)~~ $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$

20. On a

A) g non dérivable sur $]0;+\infty[$

B) g dérivable sur $]0;+\infty[$

C) $g'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} d\theta$ pour $x \in \,]0;+\infty[$

D) $g'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x\cos^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} d\theta$ pour $x \in \,]0;+\infty[$

21. $I(a,b)$vérifie

~~A)~~ $I(a,b) = I(\lambda a, b)$ $\lambda > 0$ $\forall\, a,b > 0$

B) $I(a,b) = I(b,a)$ $\forall\, a,b > 0$

$I(\lambda a, \lambda b) = \frac{1}{\lambda} I(a,b)$

~~C)~~ $I(a,a) = I(b,b)$ $\forall\, a,b > 0$

D) $I(a,b) = \lambda I(\lambda a, \lambda b)$ $\lambda > 0$ $\forall\, a,b > 0$

? 22. $I(a,b)$ vérifie

~~A)~~ $I(a,b) = b g\left(\frac{1}{a}\right)$ $\forall\, a,b > 0$

~~B)~~ $I(a,b) = \frac{1}{b} g(a)$ $\forall\, a,b > 0$

~~C)~~ $I(a,b) = \frac{a}{b} g(a)$ $\forall\, a,b > 0$

D) $I(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, g\left(\frac{b}{a}\right)$ $\forall\, a,b > 0$

pas sure

23. En utilisant le changement de variable $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$, $t > 0$ on a

A) $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b) \quad \forall\, a,b > 0$

B) $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b) \quad \forall\, a,b > 0$

C) $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}I(a,b) \quad \forall\, a,b > 0$

D) $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 0 \quad \forall\, a,b > 0$

24. *Soit* $a, b > 0$, on note (an)et (bn)les suites définies par $a_0 = a, b_0 = b$, et pour $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \; et \; b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Pour tout $n \geq 0$, $I\,(a_n, b_n)$vérifie

A) $I(a_n, b_n) = I(2a, b)$

B) $I(a_n, b_n) = I(a, 2b)$

C) $I(a_n, b_n) = I(a, b)$

D) $I(a_n, b_n) = 0$

25. Pour tout $n \geq 0$, $I(a_n, b_n)$ vérifie

A) $I(a_n, b_n) = \frac{1}{a_n}\, g(\frac{b_n}{a_n})$

B) $I(a_n, b_n) = \frac{1}{b_n}\, g(\frac{b_n}{a_n})$

C) $I(a_n, b_n) = \frac{1}{a_n^{\,2}}\, g(\frac{b_n}{a_n})$

D) $I(a_n, b_n) = \frac{1}{b_n^{\,2}}\, g(\frac{b_n}{a_n})$

Tournez la page S.V.P.

Problème 3

Dans tout le problème E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, on désigne par $I=[1,n]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on rappelle que la trace de A, notée Tr(A) représente la somme des éléments de la diagonale principale de A. On note $\chi_A(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de A.

Partie I.

26 – On a $\forall$ $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

~~A)~~ $Tr(A.B) = (-1)^n.Tr(B.A)$
B) $Tr(A.B) = Tr(B.A)$
~~C)~~ $\text{dét}(A.B) = \text{dét}(BA)$
~~D)~~ $Tr(A.B) = Tr(A).Tr(B)$

27 – Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si A est une matrice triangulaire supérieure on a alors :

~~A)~~ $\text{dét}A = \cancel{(-1)^n} \prod_{i\in I} a_{i,i}$
B) $\chi_A(\lambda) = \prod_{i\in I} (a_{i,i} - \lambda)$
~~C)~~ les valeurs propres de A sont réelles
~~D)~~ A est toujours inversible

28 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par λ_i ses valeurs propres, si u est nilpotent, alors :

~~A)~~ il n'existe pas de base de E dans laquelle u peut être représentée par une matrice triangulaire supérieure
B) il existe une de base de E dans laquelle u peut être représentée par une matrice triangulaire supérieure
~~C)~~ il existe un entier $p \in I$ tel que $\underbrace{u^p = 0}_{ok}$ et $\underbrace{\prod_{i\in I} \lambda_i}_{=0} \neq 0$
D) toutes les valeurs propres de u sont nulles

↘ X^p pol. annulateur

29 - Soit u différent de 0 un élément de $\mathcal{L}(E)$. On définit sa trace Tr(u) par la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. On suppose que toutes les valeurs propres de u sont nulles, alors :

$\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ val propre

A) $u^n = 0$
B) pour tout k dans I, $Tr(u^k) = 0$
~~C)~~ u est diagonalisable
~~D)~~ $u^2 = u$

30 – Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors on peut écrire $\chi_A(\lambda)$ sous la forme :

~~A)~~ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda TrA - \text{dét}A$
B) $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda TrA + \text{dét}A$
~~C)~~ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \text{dét}A - TrA$
~~D)~~ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{dét}A - TrA$

$(-x)^2 + (-x) tr A + \det A$

$\lambda^2 - \lambda\, trA + \det A$

31 – Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors on peut écrire $\chi_A(\lambda)$ sous la forme : $(-x)^3 + (-x)^2 \mathrm{tr}A + \cdots + \det A$???

~~A)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \mathrm{Tr}A - 2(\mathrm{Tr}A^2 - (\mathrm{Tr}A)^2)\lambda - \mathrm{dét}A$

~~B)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \mathrm{Tr}A - \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}A^2 + (\mathrm{Tr}A)^2)\lambda + \mathrm{dét}A$

~~C)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \mathrm{Tr}A + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}A^2 + (\mathrm{Tr}A)^2)\lambda - \mathrm{dét}A$

~~D)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \mathrm{dét}A - 2(\mathrm{Tr}A^2 + (\mathrm{Tr}A)^2)\lambda - 2\mathrm{dét}A$

32 – Le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est : $\to \mathrm{tr}(A) = -3$

$A^2 = \ldots$

$\mathrm{tr}(A^2) = 3$

~~A)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

B) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

~~C)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$

~~D)~~ $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

33 – La matrice inverse de la matrice A précédente est:

A) $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$

~~B)~~ $A^{-1} = A^2 + 3A - I_3$

~~C)~~ $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$

~~D)~~ $A^{-1} = -A^2 - 3A + I_3$

34 - On a :

~~A)~~ $A^4 = 7A^2 - 5A + 3I_3$

B) $A^4 = 6A^2 + 8A + 3I_3$

~~C)~~ $A^4 = 8A^2 + 3I_3$

~~D)~~ $A^4 = 6A^2 - 5A + 3I_3$

Partie II.

Dans cette partie seulement on suppose que n = 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit sa trace Tr(u) par la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

35 – u et v désignent deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, $u \neq 0$, vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$, on a

~~A)~~ u est inversible et $\mathrm{Tr}(v) \neq \mathrm{Tr}(u^{-1} \circ v \circ u)$

~~B)~~ u est inversible et $\mathrm{Tr}(v) - \underbrace{\mathrm{Tr}(u^{-1} \circ v \circ u)}_{= \mathrm{Tr}(u \circ u^{-1} \circ v) = \mathrm{Tr}(v)} = 0$ ← ok

~~C)~~ u est inversible et $\mathrm{Tr}(v) - \mathrm{Tr}(u^{-1} \circ v \circ u) = 2$ si u inv. → et contradiction

D) u n'est pas inversible

36 – On a :

~~A)~~ $\mathrm{Tr}(u) = 1$

~~B)~~ $\mathrm{dét}(u) = 1$

C) $u^2 = 0$

~~D)~~ $u^2 = (u - I_2)$

→ $a \neq 0$

37 – Soit e un vecteur de E tel que $u(e) \neq 0$ on a :

(A) $u^2(e) = 0$

~~B)~~ $u^2(e) \neq 0$

(C) la famille $(u(e), e)$ forme une base → car libre + dim 2

~~D)~~ la famille $(u(e), e)$ est liée $\Leftrightarrow u(e) = \lambda e \Rightarrow e$ val pr. $\to e = 0 \Rightarrow u(e) = 0$ Abs

38 – Dans une base B : (e_1, e_2) u est représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En posant $v(e_2) = a.e_1 + b\, e_2$, on a:

(A) $u(e_2) = e_1$

~~B)~~ $v(e_1) = au(e_1) + (b+1)u(e_2)$

~~C)~~ $v(e_1) = bu(e_1) + (a-1)u(e_2)$

(D) v est représentée dans B par $\begin{array}{cc} v(e_1) & v(e_2) \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} b-1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$

Partie III

Dans cette partie on ne suppose plus que n = 2 et u et v désignent toujours deux éléments

de $\mathcal{L}(E)$, $u \neq 0$, vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$,

N

39 – Dans cette question on désire, pour $k \in \square$, calculer $u^k \circ v - v \circ u^k$ en fonction de u et de k.

?...

On note $S_k = u^k \circ v - v \circ u^k$

(A) $S_k = \sum_{p=1}^{k} u^p$

~~B)~~ $S_k = \sum_{p=2}^{k} p.u^p$ $\qquad S_{k+1} = u + S_k \circ u$

~~C)~~ $S_k = (k-1)(k-2).u^k$

~~D)~~ $S_k = k.u^k$

40 - On en déduit que:

(A) $Tr(u^k) = 0 \quad \forall$ k entier > 0

? ~~B)~~ $Tr(u^k \circ v) = 0 \ \forall$ k entier > 0

~~C)~~ toutes les valeurs propres de u sont nulles

~~D)~~ u n'est pas nilpotent

32 rep /40