ICNA – Épreuve optionnelle 2013

PARTIE I

On considère les fonctions φ_1 qui à u élément du segment $I=[0,\pi/2]$, associe
$\varphi_1(u)= 1/(x^2(\cos u)^2+(\sin u)^2)$ et φ_2 qui à u élément du segment I associe
$\varphi_2(u)= (\sin u)/(x^2(\cos u)^2+(\sin u)^2)$, x étant un paramètre réel.

Question 1: La fonction φ_1

~~A)~~ est définie sur I pour tout x réel
~~B)~~ est définie sur I pour tout x réel positif ou nul
C) est définie et continue sur I pour x réel strictement positif
~~D)~~ est continue sur I uniquement pour x réel strictement positif

Question 2: La fonction φ_2
A) est dérivable sur I pour tout x réel non nul
~~B)~~ est dérivable sur I pour tout x réel
C) est dérivable sur $]0,\pi/2]$ pour tout x réel et a pour dérivée
$\varphi_2'(u)= (x^2(\cos u)^3+2(x^2-1/2)(\cos u)(\sin u)^2)/(x^2(\cos u)^2+(\sin u)^2)^2$
~~D)~~ a pour dérivée pour tout u appartenant à I et pour tout x réel strictement positif
$\varphi_2'(u)= (\cos u)/(1-x^2)(\sin 2u)$

Question 3: Les intégrales $\int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\,du$ et $\int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\,du$

~~A)~~ sont définies pour tout x réel car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment
B) sont définies pour tout x réel non nul car toute fonction définie sur segment est intégrable sur ce segment
~~C)~~ sont définies pour x réel strictement positif uniquement
D) sont divergentes pour $x=0$ car les fonctions φ_1 et φ_2 sont équivalentes à la fonction $1/u^2$ au voisinage de 0

Tournez la page SVP

Question 4: L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} (1/(1+t^2))\, dt$

~~A)~~ est divergente car la fonction $1/(1+t^2)$ n'est pas définie en $+\infty$

~~B)~~ est convergente car toute fonction continue sur $[0,+\infty[$ et admettant une limite finie en $+\infty$ a une intégrale généralisée convergente sur cet intervalle

C) est absolument convergente car la fonction $1/(1+t^2)$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et est équivalente à $1/t^2$ en $+\infty$

D) est convergente et vaut $\pi/2$

Question 5: On pose $J(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\, du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\, du$

lorsque ces intégrales sont convergentes. On obtient en utilisant les changements de variable $t = (\tan u)/x$ et $v = \cos u$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,1[$

~~A)~~ $J(x) = \int_0^{\pi/2} x(1+x^2 t^2)/((1+x^2 t^2)(1+t^2)\, x^2)\, dt$

~~B)~~ $J(x) = \int_0^{+\infty} (1/(1+t^2))\, dt = \pi/2$

C) $K(x) = \int_0^1 (1/(x^2 v^2+1-v^2))\, dv$

D) $K(x) = \int_0^1 (1/(1-(1-x^2)\, v^2))\, dv = (1/(2(1-x^2)^{1/2}))\ln((1+(1-x^2)^{1/2})/(1-(1-x^2)^{1/2}))$

$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$

Question 6: On pose $J(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_1(u)\, du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_2(u)\, du$, x appartenant à $]0,1[$

On obtient en utilisant les changements de variable $t = (\tan u)/x$ et $v = \cos u$

~~A)~~ $J(x) = \int_0^{\pi/2} x(1+x^2 t^2)/((1+x^2 t^2)(1+t^2)\, x^2)\, dt$

B) $J(x) = \int_0^1 (1/(1+t^2))\, dt = \pi/2$

~~C)~~ $K(x) = \int_0^1 (1/(x^2 v^2-1+v^2))\, dv$

D) $K(x) = \int_0^1 (1/(1-(1-x^2)\, v^2))\, dv = (1/(2(1-x^2)^{1/2}))\ln((1+(1-x^2)^{1/2})/(1-(1-x^2)^{1/2}))$

On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x \displaystyle\int_0^{\pi/2} u\,\varphi_1(u)\,du$

Question 7: La fonction f vérifie

A) $f(1) = 0$
B) $f(1) = \pi^2/8$
C) $f(x) + f(1/x) = x\,\pi^2/4$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$
D) $f(x) + f(1/x) = \pi^2/4$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$

Question 8: La fonction h définie sur IR par $h(u) = u - (\pi \sin u)/2$ vérifie

A) h est indéfiniment dérivable sur IR
B) h est dérivable mais n'est pas 2 fois dérivable sur IR
C) h est positive sur $[0,\pi/2]$ car h' est strictement positive sur ce segment
D) h est négative ou nulle sur $[0,\pi/2]$ car h est décroissante puis croissante sur ce segment

Question 9: On a pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$

A) $x\,K(x)\pi/2 \leq f(x)$
B) $0 \leq f(x) \leq x\,K(x)\pi/2$
C) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ car $K(x)$ est équivalent à $-2 \ln x$ en 0
D) $\pi/2 \leq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Question 10: Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ a pour limite, si elle existe,

A) $+\infty$
B) $-\infty$
C) $\pi^2/4$
D) $(\pi^2/4) - (\pi/2)$

Tournez la page SVP

PARTIE II

n et p désignent des entiers naturels strictement positifs. IR désigne l'ensemble des nombres réels et **C** l'ensemble des nombres complexes.
On note $\mathcal{M}_p$(IR) l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; M étant un élément de cet ensemble, on désigne par ^{t}M la matrice transposée de M.
On note $\mathcal{O}_p$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre p, $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre p, $\mathcal{T}_p$ l'ensemble des matrices A antisymétriques d'ordre p telles que $A^2 = -I_p$ où I_p est la matrice unité dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre p.

Si l'on désigne par X un vecteur de $\mathbf{C}^p$, $\overline{X}$ désigne le vecteur dont les coordonnées sont les nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur X.

Question 11 : Tout élément A

A) de l'ensemble $\mathcal{S}_p$ vérifie ${}^tA\,A = I_p$

B) de l'ensemble $\mathcal{O}_p$ vérifie ${}^tA = A$

C) de l'ensemble $\mathcal{T}_p$ vérifie ${}^tA = A$

D) de l'ensemble $\mathcal{O}_p$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_p$

Question 12 : On a

A) tout élément de l'ensemble $\mathcal{S}_p$ est inversible

B) tout élément A de l'ensemble $\mathcal{O}_p$ est inversible car le déterminant det A= 1

C) toute matrice antisymétrique d'ordre p est non inversible car ses coefficients diagonaux sont tous nuls

D) pour qu'une matrice antisymétrique d'ordre p soit inversible il est nécessaire que l'entier p soit pair

Question 13 : L'ensemble $\mathcal{F}_p$ est

A) non vide pour tout p entier strictement positif

B) vide pour tout p entier strictement positif

C) non vide uniquement dans le cas où l'entier strictement positif p est pair

D) non vide uniquement dans le cas où l'entier strictement positif p est impair

Question 14 : L'ensemble $\mathcal{O}_p$ est

A) un sous-espace vectoriel sur IR de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$

B) un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$

C) un groupe pour la loi d'addition des matrices

D) un groupe pour la loi de multiplication des matrices

Question 15 : L'ensemble $\mathcal{S}_p$ est

A) un groupe pour la loi de multiplication des matrices

B) un sous-espace vectoriel sur IR de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$ et un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$

C) un sous-espace vectoriel sur IR de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$ mais n'est pas un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$

D) un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$ mais n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathrm{IR})$

Question 16 : On désigne par J_n la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathrm{IR})$ définie par la décomposition par blocs

$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$ pour tout n entier strictement positif. On a

A) J_n appartient à $\mathcal{F}_n$

B) il n'existe aucun entier strictement positif p tel que J_n appartienne à $\mathcal{F}_p$

C) J_n appartient à $\mathcal{F}_{2n}$

D) J_n appartient à $\mathcal{O}_{2n}$

Soit A un élément, s'il en existe, de l'ensemble $\mathcal{F}_{2n}$. On désigne par f, s'il existe, l'endomorphisme de $\mathbf{C}^{2n}$ dont la matrice associée par rapport à la base canonique de $\mathbf{C}^{2n}$ est la matrice A

Question 17 : Soit P un élément de l'ensemble $\mathcal{O}_{2n}$. Alors la matrice $B = {}^{t}P\,A\,P$ $\in \mathcal{F}_{2n}$

A) appartient à $\mathcal{S}_{2n}$

B) est antisymétrique mais n'appartient pas à $\mathcal{F}_{2n}$

C) n'est ni symétrique ni antisymétrique

D) est inversible et a pour inverse la matrice ${}^{t}P\,A^{-1}P$ où A^{-1} désigne l'inverse de A

Question 18 : On a

A) le spectre de la matrice A est inclus dans l'ensemble $\{-1,1\}$

B) le spectre de la matrice A est inclus dans l'ensemble $\{-i\}$

C) $-i$ est valeur propre de l'endomorphisme f car la matrice $(A + i\,I_{2n})$ n'est pas inversible puisque A est une matrice à coefficients réels

D) les valeurs propres complexes de l'endomorphisme f sont conjuguées deux à deux car A est une matrice à coefficients réels

Question 19 : Soit x un vecteur de $\mathbf{C}^{2n}$, alors

A) le vecteur $f(x)+ix$ est vecteur propre de l'endomorphisme f associé à la valeur propre i

B) le vecteur $f(x)+x$ est vecteur propre de l'endomorphisme f associé à la valeur propre 1

C) le vecteur $f(x)-ix$ est vecteur propre de l'endomorphisme f associé à la valeur propre i

D) le vecteur $f(x)$ est vecteur propre de l'endomorphisme f associé à la valeur propre -1, car $A^2 = -I_{2n}$

Question 20 :

A) $\mathbf{C}^{2n}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces propres de l'endomorphisme f

B) $\mathbf{C}^{2n}$ est égal à la somme directe des trois sous-espaces propres de l'endomorphisme f

C) l'endomorphisme f est diagonalisable

D) l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable

A, C

Question 21 : De manière générale

A) un espace vectoriel E sur **C** est nécessairement un espace vectoriel sur IR et sa dimension sur IR est le double de sa dimension sur **C**

B) un espace vectoriel E sur IR est nécessairement un espace vectoriel sur **C**

C) pour pouvoir étendre la structure d'espace vectoriel de E sur IR au corps des complexes **C**, il faut que la dimension de E sur IR soit paire

D) pour pouvoir étendre la structure d'espace vectoriel de E sur IR au corps des complexes **C**, il suffit que la dimension de E sur IR soit paire

Question 22 : On désigne par $\dim_K$ la dimension d'un espace vectoriel sur le corps K. Soit u l'application qui à tout élément X de $\mathbf{C}^{2n}$ associé $\overline{X}$. on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i, u vérifie

A) u est linéaire lorsque $\mathbf{C}^{2n}$ est considéré comme espace vectoriel sur **C**

B) u est linéaire lorsque $\mathbf{C}^{2n}$ est considéré comme espace vectoriel sur IR

C) les dimensions sur IR des espaces vectoriels $u(E_i)$ et E_i sont égales

D) $\dim_{IR}\ u(E_i) = (\dim_{IR} E_i) - 1$

Question 23 : On a

A) $u(E_1)$ est inclus dans E_2 et $u(E_2)$ est inclus dans E_1

B) $\dim_C\ E_1 = n+1$

C) $\dim_{IR} E_1 = \dim_{IR} E_2 = n$

D) $\dim_C E_1 = \dim_C E_2 = n$

Question 24 : Soit X et Y deux vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{2n}$

A) si X et Y appartiennent à deux sous-espaces propres de f distincts alors X et Y sont orthogonaux

B) si X et Y appartiennent au même sous-espace propre de f alors X et Y sont orthogonaux car ${}^tYX = 0$

C) si X et Y appartiennent au même sous-espace propre de f alors X et Y sont orthogonaux car ${}^tY\overline{X} = 0$

D) si X et Y appartiennent au même sous-espace propre de f alors ${}^tYX = 0$ car la matrice A appartient à l'ensemble $\mathcal{O}_{2n}$

Question 25:

A) il n'existe pas de base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{2n}$ formée de vecteurs propres de f

B) la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n)$, où $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormale du sous-espace propre E_1, constitue une base orthonormale de $\mathbb{C}^{2n}$

C) la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n, {}^tX_1, {}^tX_2, \ldots, {}^tX_n)$, où $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormale du sous-espace propre E_1, constitue une base orthonormale de $\mathbb{C}^{2n}$

D) la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_{n-1})$, où $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ est une base orthonormale du sous-espace propre E_1, constitue une base orthonormale de $\mathbb{C}^{2n}$

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base orthonormale, s'il en existe, du sous-espace propre E_1. On pose pour tout entier j compris entre 1 et n, $Z_j = X_j + \overline{X}_j$ et $Z_{j+n} = i(X_j - \overline{X}_j)$. $\in \mathbb{C}$.

Question 26: On a alors, pour tout entier j compris entre 1 et n,

A) $AZ_j = -Z_j$ et $AZ_{j+n} = Z_{j+n}$ $AZ_j = Z_j$

B) $AZ_{j+n} = -Z_j$ et $AZ_j = -Z_{j+n}$ $AZ_{j+n} = Z_{j+n}$

C) ${}^tZ_j Z_j = {}^tZ_{j+n} Z_{j+n} = 0$

D) ${}^tZ_j Z_j = {}^tZ_{j+n} Z_{j+n} = 1$

Question 27: Pour tout entier j et k compris entre 1 et n, on a

A) si j et k sont distincts, ${}^tZ_j Z_k = {}^tZ_{j+n} Z_{k+n} = 0$

B) ${}^tZ_j Z_k = {}^tZ_{j+n} Z_{k+n} = 0$

C) ${}^tZ_j Z_{k+n} = i({}^tX_j X_k + {}^t\overline{X}_j X_k - {}^t\overline{\overline{X}_j X_k} + {}^t\overline{X_j X_k}) = 0$

D) la famille $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n})$ définie, pour tout entier j compris entre 1 et $2n$ par $\sqrt{2}\, Y_j = Z_j$, constitue une base orthonormale de $\mathbb{R}^{2n}$

Question 28: J_n étant la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathrm{IR})$ définie à la **question 16**, on a

A) la matrice de l'endomorphisme f dans la base orthonormale $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n})$ définie à la question 27, est égale à $-J_n$

B) la matrice de l'endomorphisme f dans la base orthonormale $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n})$ définie à la question 27, est égale à J_n

C) la matrice de l'endomorphisme f dans la base orthonormale $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n})$ est égale à J_n

D) la matrice de passage P de la base canonique à la base $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n})$ définie à la question 27, appartient à $\mathcal{O}_{2n}$ et est telle que $J_n = {}^tP\, A\, P$

PARTIE III

On note F la fonction définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^x$$

et G la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$$

IR désigne l'ensemble des nombres réels. $E(y)$ désigne la partie entière du réel y

Question 29 : On pose $f_n(x) = (-1)^{n-1}/n^x$. On établit que

~~A)~~ la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge uniformément sur IR

~~B)~~ la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur l'intervalle $[0,+\infty[$

~~C)~~ la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ ne peut pas converger uniformément sur l'intervalle $[0,+\infty[$

D) la fonction F tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ car la fonction u_n tend vers 0 pour tout n entier supérieur ou égal à 2 et série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur l'intervalle $[2,+\infty[$

Question 30 : Soit x un réel strictement positif. On considère h_x la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h_x(t) = (\ln t)/t^x$. On montre que

A) la fonction h_x est dérivable mais n'est pas de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

B) la suite de terme général $(\ln n)/n^x$ est décroissante à partir du rang $E(e^{1/x})$ car la fonction h_x est décroissante sur $[e^{1/x},+\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$

C) la suite de terme général $(\ln n)/n^x$ est croissante à partir du rang $E(e^{1/x})+1$ car la fonction h_x est croissante sur $[e^{1/x},+\infty[$ et décroissante sur $]0, e^{1/x}]$

D) la suite de terme général $(\ln n)/n^x$ est décroissante

Question 31 : On établit que

A) la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où a est un réel strictement positif

B) la série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est une série alternée divergente sur $[1,+\infty[$

C) la fonction F n'est pas dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$

D) la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$

Question 32 : On montre que

A) $F(x) = (1 - 2^x)\, G(x)$ pour tout x strictement supérieur à 1

B) $F(x) = (2^{1-x} - 1)G(x)$ pour tout x strictement supérieur à 1

C) la fonction G tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ car les fonctions F et G sont équivalentes en $+\infty$

D) la fonction G tend vers -1 quand x tend vers $+\infty$ car les fonctions F et $-G$ sont équivalentes en $+\infty$

Question 33 : On considère la suite de fonctions (u_n), n entier naturel non nul, définies sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k$$. On établit que

A) la suite de fonction de terme général u_n diverge sur l'intervalle $[0,1[$

B) la suite de fonction de terme général u_n converge simplement vers la fonction $U(t) = 1/(1-t)$ sur l'intervalle $[0,1[$

C) $F(1) = -\ln 2$ en utilisant le théorème de convergence dominée

D) $F(1) = \ln 2$ en utilisant le théorème de convergence dominée

Question 34 : Le développement limité au voisinage de 1

A) de la fonction F à l'ordre 1 s'écrit $F(x) = \ln 2 + x\,F'(1) + o(x)$

B) de la fonction F à l'ordre 1 s'écrit $F(x) = \ln 2 + (1-x)F'(1) + o(1-x)$

C) de la fonction $(1-2^{1-x})$ à l'ordre 2 s'écrit $1-2^{1-x} = x\ln 2 - (\ln 2)^2 x^2/2 + o(x^2)$

D) de la fonction $(1-2^{1-x})$ à l'ordre 2 s'écrit $1-2^{1-x} = (x-1)\ln 2 - (\ln 2)2(x-1)^2/2 + o((x-1)^3)$

Question 35 : On en déduit que la fonction G peut s'écrire au voisinage de 1^+

A) $G(x) = (1/x) + ((F'(1)/\ln 2) + (\ln 2)/2) + o(1)$

B) $G(x) = (1/(x-1)) + ((F'(1)/\ln 2) + (\ln 2)/2) + o(1)$

C) $G(x) = (x-1) + ((F'(1)/\ln 2) + (\ln 2)/2) + o(x-1)$

D) $G(x) = (1/(x-1)) - ((F'(1)/\ln 2) + (\ln 2)/2) + o(1)$

Question 36 : On considère la série de fonctions de terme général v_n, n entier naturel non nul, définies sur le segment $[1,2]$ par

$$v_n(x) = (1/n^x) - \int_n^{n+1} dt/t^x$$. On montre que

A) la série de fonctions de terme général v_n diverge sur $[1,2]$

B) la série de fonctions de terme général v_n converge simplement sur $[1,2]$ car $0 \leq v_n(x) \leq (1/n^x) - (1/(n+1)^x)$ terme général d'une série convergente

C) la série de terme général $v_n(x)$ a pour somme $G(x) - (1/(1-x))$ sur l'intervalle $]1,2]$

D) la série de terme général $v_n(x)$ a pour somme $G(x)$ sur l'intervalle $]1,2]$

Question 37 : La série de fonctions de terme général v_n

A) converge uniformément sur le segment [1,2]

B) converge uniformément sur tout segment $[\alpha,2]$ de l'intervalle]1,2] mais ne converge pas uniformément sur le segment [1,2]

C) ne peut pas converger uniformément sur le segment [1,2] car la série diverge sur cet intervalle

D) ne peut pas converger uniformément sur le segment [1,2] car la série ne converge pas normalement sur cet intervalle

Question 38 : On note γ la somme, si elle existe, de la série numérique de terme général $v_n(1)$, n entier naturel non nul. On montre que

A) la somme de la série de fonctions de terme général v_n est continue sur l'intervalle]1,2] mais n'est pas continue en 1

B) la somme de la série de fonctions de terme général v_n est continue sur le segment [1,2] comme somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur [1,2]

C) $G(x) = (1/x) + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ et $F'(1) = \ln 2(\gamma - \ln 2/2)$

D) $G(x) = (1/(x-1)) + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ et $F'(1) = \ln 2(\gamma - \ln 2/2)$

On désigne par IR[X] l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On identifie un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
On dit qu'une suite (B_n) de IR[X] est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes:
$B_0 = 1$, et pour tout entier naturel non nul n, $B_n' = n\, B_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)\, dt = 0$

On admet qu'il existe une et une seule suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n), on l'appelle la suite de polynômes de Bernoulli. On pose $b_n = B_n(0)$.
Soit k un entier naturel, on définit l'application g_k de IR dans IR par :
$g_k(x) = B_{2k}(x/2\pi)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,2\pi[$ et g_k est périodique de période 2π.

Question 39 : Pour tout k entier naturel, la suite $(S_p(g_k))$, p entier naturel, des sommes partielles associée à la série de Fourier de la fonction g_k

A) converge en moyenne quadratique vers la fonction g_k sur le segment $[0,2\pi]$

B) converge en moyenne quadratique vers la fonction g_k sur IR

C) converge normalement donc uniformément vers la fonction g_k sur IR car g_k est continue et de classe C^1 par morceaux sur IR

D) converge uniformément vers la fonction g_k sur IR, mais ne converge pas normalement sur IR car g_k n'est pas de classe C^1 sur IR

Question 40 : Pour tout k entier naturel et pour tout x réel, on a:

A) $g_k(x) = (a_0(k)/2) + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n(k)\cos(nx) + b_n(k)\sin(nx)\Big)$ avec $a_0=0$, $a_n(k)=(-1)^{k-1}(2k)!/(2\pi n)^k = b_n(k)$ pour tout $n>0$

B) $g_k(x) = (a_0(k)/2) + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n(k)\cos(nx) + b_n(k)\sin(nx)\Big)$ avec $a_0=0$, $a_n(k)=2(-1)^{k+1}(2k)!/(2\pi n)^{2k}$
$b_n(k)=0$
pour tout $n>0$

C) $b_{2k} = 2(-1)^{k-1}(2k)!/(2\pi)^{2k}\ G(2k)$

D) $b_{2k} = (-1)^{k-1}(2k)!/(2\pi)^{2k}\ G(2k)$