ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE Session 1993

CONCOURS DE RECRUTEMENT EXTERNE
D'ELEVES INGENIEURS
DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE
(I C N A)

EPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

QUESTIONS LIEES :

(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)

(13,14,15,16,17,18,19)

(20,21,22,23,24)

(25,26,27,28,29,30)

(31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41)

(42,43,44,45,46,47,48,49,50)

Ce sujet comporte 50 questions dont 40 obligatoires.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall n \geq 2,\ u_n - (1+i)\,u_{n-1} + i\,u_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

Question n° 01 :

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel

a) L'assertion ci-dessus est fausse car (1) comporte des coefficients complexes.

b) Dans le cas contraire alors $\mathcal{E}$ est de dimension 4.

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel

c) de dimension 2.

d) de dimension 4.

Question n° 02 :

Etude de suites particulières éléments de $\mathcal{E}$.

a) Si $u_0 = u_1$ alors la suite (u_n) est une suite constante.

b) Si u_0 et u_1 sont des imaginaires purs alors u_n est aussi un imaginaire pur.

c) Il existe dans $\mathcal{E}$ une et une seule suite arithmétique, différente de la suite nulle.

d) Il existe dans $\mathcal{E}$ deux et seulement deux suites géométriques de raison différente de 1.

Question n° 03 :

On appelle a et b les racines de l'équation caractéristique de (1)

$$r^2 - (1+i)\,r + i = 0 \qquad (2)$$

où $\text{Im}\, b < \text{Im}\, a$.

Il existe λ et μ complexes tels que, pour tout n

a) $u_n = \lambda\, a^n + \mu$.

b) $u_n = \lambda\, a^n + \mu\, b^n$.

Nous avons aussi

c) u_n est une combinaison linéaire des suites a^n et $\overline{a}^{\,n}$ car $b = \overline{a}$.

d) Il existe un réel strictement positif ρ et une suite réelle φ_n tels que, pour tout n, $u_n = \rho^n\, e^{i\varphi_n}$.

Dans les quatre questions suivantes, on considère $\mathcal{E}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et on étudie les trois sous espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ suivants :

$\mathcal{E}_0$: suites à termes réels ($u \in \mathcal{E}_0 \iff u_n \in \mathbb{R}\ \ \forall n \geq 0$).

$\mathcal{E}_1$: suites à termes pairs réels ($u \in \mathcal{E}_1 \iff u_{2n} \in \mathbb{R}\ \ \forall n \geq 0$).

$\mathcal{E}_2$: suites à termes impairs réels ($u \in \mathcal{E}_2 \iff u_{2n+1} \in \mathbb{R}\ \ \forall n \geq 0$).

On note f, g et h les suites respectives $(f_n = 1)$, $(g_n = i^n)$ et $\left(h_n = i^{n+1}\right)$ définies pour tout $n \geq 0$.

Question n° 04 :

a) $\mathcal{E}_0$ est vide.

Dans le cas contraire, le sous espace vectoriel $\mathcal{E}_0$ est

b) de dimension 2.

c) formé (uniquement) des suites constantes.

d) contient des suites non constantes.

Question n° 05 :

a) $\mathcal{E}_1$ est vide.

Dans le cas contraire, le sous espace vectoriel $\mathcal{E}_1$ est

b) est de dimension 2.

c) engendré par la famille $\mathcal{F}_1 = (f, g)$.

d) engendré par la famille $\mathcal{F}_2 = (f, h)$.

Question n° 06 :

a) $\mathcal{E}_2$ est vide.

Dans le cas contraire, le sous espace vectoriel $\mathcal{E}_2$ est

b) est de dimension 2.

c) engendré par la famille $\mathcal{F}_1 = (f, g)$.

d) engendré par la famille $\mathcal{F}_2 = (f, h)$.

Question 07 :

Il résulte des trois questions précédentes que

a) $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

b) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$.

c) $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

d) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$.

Le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n-1} & = & u_{n-1} \\ u_n & = & (1+i)\, u_{n-1} - i\, u_{n-2} \end{array} \right. \tag{3}$$

peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

où M est une matrice carrée d'ordre 2.

Question n° 08 :

a) Toute matrice carrée d'ordre 2, à coefficients complexes, est diagonalisable.

b) Toute matrice carrée d'ordre 2, à coefficients complexes, est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

c) Les valeurs propres de M sont les carrés des solutions de l'équation (2).

d) M admet deux valeurs propres conjuguées.

Question n° 09 :

a) Il existe une matrice inversible P telle que

$$P\,M\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

b) L'assertion a) n'existe pas

Dans le cas où l'assertion a) est vraie alors une expression de P est

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

d) $P = \dfrac{1}{-1+i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question n° 10 :

Les questions 05 et 06 permettent le calcul de u_n en fonction de u_0 et de u_1.

a) $u_n = \dfrac{1+i}{2}\,[-(i-i^n)\,u_0 + (1-i^n)\,u_1]$.

b) $u_n = \dfrac{-1+i}{2}\,[-(i-i^n)\,u_0 + (1-i^n)\,u_1]$.

c) $u_n = \dfrac{1+i}{2}\,[-i\,u_0 + u_1 + (u_0-u_1)\,i^n]$.

d) $u_n = \dfrac{-1+i}{2}\,[-i\,u_0 + u_1 + (u_0-u_1)\,i^n]$.

Question n° 11 :

On considère dans cette question la suite de $\mathcal{E}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

a) Il n'existe aucune suite définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Dans le cas contraire, alors (u_n) est une suite

b) 4−périodique. c) géométrique. d) arithmétique.

Question n° 12 :

Nous écrivons la relation de récurrence (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_n & = & u_n - u_{n-1} \\ v_n & = & i\,v_{n-1} \end{array}\right. \qquad (5)$$

ce qui permet de définir la suite (v_n) associée à la suite (u_n).

a) La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison i.

b) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison i.

Nous déduisons de (5) la relation

$$u_n - u_{n-1} = i^{n-1}\,(u_1 - u_0)$$

ce qui permet d'affirmer que

c) la suite (u_n) est une suite arithmétique.

d) La suite (u_n) n'est constante que si et seulement si $u_1 - u_0 = 0$.

Pour tout x réel, on pose $E(x)$ sa partie entière. Pour $a \in \mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on considère la fonction g_a de la variable réelle x

$$g_a : x \mapsto x^a\,E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Question n° 13 :

Soit D_a le domaine de définition de g_a.

a) $D_a = \mathbb{R}^*\ \forall a \in \mathbb{N}_1$.

b) $D_{\frac{1}{2}} =]0, +\infty[$.

Etude de la parité de g_a.

c) Si a est un entier pair alors g_a est paire.

d) Si a est un entier impair alors g_a est impaire.

On suppose dans les trois questions suivantes que $a = 1$.

Question n° 14 :

a) $g_1(x) = x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) = x, \quad x \neq 0.$

b) g_1 n'est pas prolongeable par continuité en 0.

c) g_1 se prolonge par continuité à droite mais pas à gauche en $x = 0$.

d) g_1 est affine par morceaux sur D_1.

Question n° 15 :

a) g_1 n'est dérivable en aucun point de son domaine de définition D_1.

Dans le cas contraire

b) g_1 est dérivable sur tout intervalle ouvert de D_1.

c) g_1 admet en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à gauche.

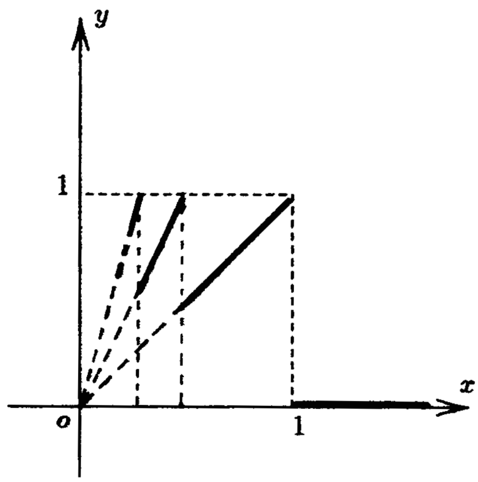
d) g_1 admet en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée à droite.

Question n° 16 :

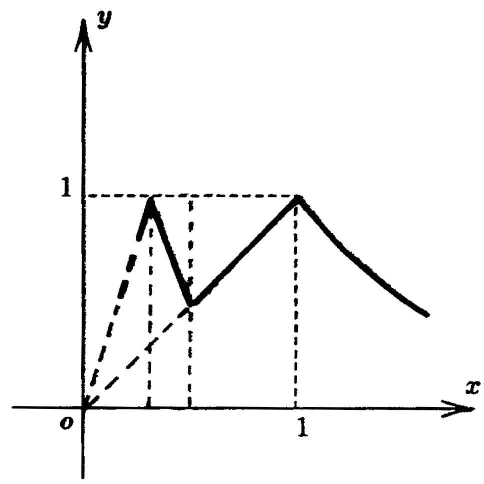
Nous représentons la courbe représentative de g_1 par

Pour $x > 0$:

a)

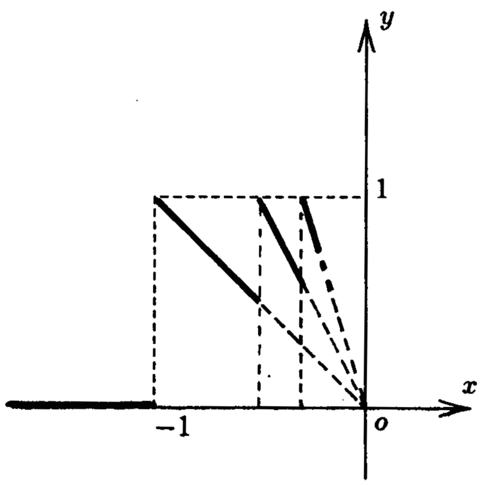


b)

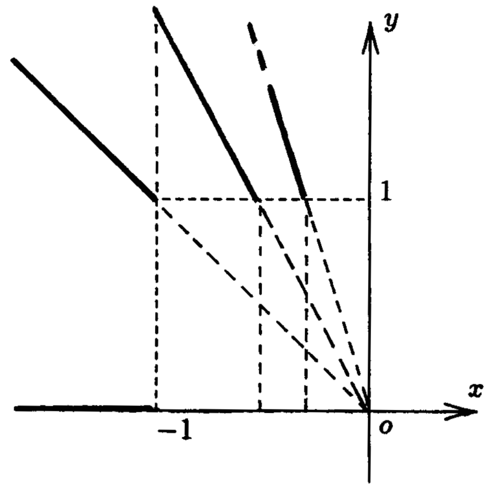


Pour $x < 0$:

c)



d)



Question n° 17 :

On suppose dans cette question $a = 2$. On peut dire alors que g_2

a) a pour domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

b) a pour limite 1 à droite de 0.

c) a pour limite 0 à droite de 0.

d) est impaire car $E(x)$ est impaire.

Question n° 18

On suppose dans cette question $a = \frac{1}{2}$. On peut dire alors que $g_{\frac{1}{2}}$

a) a pour limite 1 à droite de 0.

b) n' a pas pour limite 0 en $+\infty$.

c) est continue sur tout intervalle de la forme $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

d) est dérivable sur tout intervalle de la forme $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Question n° 19 :

Remarques diverses sur g_a

a) $g_a(x) = (g_1(x))^a \quad \forall x \in D_a$.

b) $g_a(x) \neq (g_1(x))^a \quad \forall x \in D_a$.

c) g_a est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

d) g_a n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Soit la fonction de la variable réelle x définie par

$$f : x \mapsto \int_1^x \varphi(t)\,dt \quad \text{où} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t^2}\sqrt{1+t^4}.$$

que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note D le domaine de définition de f et $\mathcal{C}$ son graphe sur D.

Question n° 20 :

Etude de la fonction intégrante φ.

a) φ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ est

c) divergente.

d) convergente.

Question n° 21 :

Nous avons

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $D = \mathbb{R}^*$.

La fonction intégrante est paire donc

c) f est paire.

d) f est impaire.

Question n° 22 :

a) Sur D, f est de classe C^∞.

b) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

c) $f(x)$ s'annule pour deux valeurs distinctes de D.

d) $\varphi(t)$ est équivalent à 1 au voisinage de $+\infty$ et cela implique que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Question n° 23 :

Au voisinage de 1, $f(x)$ admet un développement limité en h où $x = 1 + h$.

$$f(x) = \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \delta h^3 + o(h^3)$$

et nous avons

a) $\alpha = 0$ et $\beta = 2\gamma = \sqrt{2}$.

b) $\delta = -\frac{4}{3}\gamma$ et $\beta = \sqrt{2}$.

Il résulte de ce développement

c) que la tangente à $\mathcal{C}$ en $A(1, f(1))$ est de coefficient directeur $-\sqrt{2}$.

d) que les deux arcs d'extrémité A sont localement de part et d'autre de cette tangente.

Question n° 24 :

a) La double inégalité $t^4 < 1 + t^4 < (1 + t^2)^2$ implique qu'il existe une constante K telle que dans un voisinage de $+\infty$, on ait $x + K < f(x) < x - \dfrac{K}{x}$.

b) La quantité $f(x) - x + 1 = f(x) - \displaystyle\int_1^x dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Le changement de variable $t = \dfrac{1}{z}$ et une transformation fournissent l'égalité

$$\int_1^{+\infty} (\varphi(t) - 1)\, dt = \int_0^1 \frac{z^2}{1 + \sqrt{z^4 + 1}}\, dz.$$

d) La branche de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ est asymptote à la droite $y = x - b$ où une valeur approchée à moins de 10^{-3} près de b est $0,847$.

On considère la série de terme général

$$U_n = \text{Arctan}\, \frac{1}{n}, \quad n \geq 1 \qquad (1)$$

Question n° 25 :

a) Le terme général de cette série ne tend pas vers une limite pour n tendant vers l'infini.

Dans le cas contraire alors si : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$, nous avons

b) $L = 0$.

c) $L = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $L = -1$.

Question n° 26 :

a) $\{U_n\}$ est une série divergente car son terme général tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $\{U_n\}$ est une série convergente car son terme général tend vers 0.

c) Pour $n \to +\infty$, $U_n \sim \dfrac{1}{n}$. Ainsi les séries $\{U_n\}$ et $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ sont de même nature.

d) Nous déduisons de l'assertion c) que la série alternée $\{(-1)^n U_n\}$ est convergente.

Question n° 27 :

On considère dans cette question la série de terme général

$$V_n = \operatorname{Arctan} \frac{n+1}{n-1} - \frac{\pi}{4} \quad n \geq 2. \tag{2}$$

Nous avons

a) $U_n = V_n \quad \forall n \geq 2.$ b) $U_n \neq V_n \quad \forall n \geq 2.$

A l'aide d'un développement limité, par exemple, nous montrons que pour $n \to +\infty$ nous avons

c) $U_n \sim V_n.$ d) $U_n \not\sim V_n.$

On considère dans les deux questions suivantes la série de terme général

$$W_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} + \lambda \sin \frac{1}{n} \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Question n° 28

Un développement limité de W_n à l'ordre 3, pour $n \to +\infty$, permet d'écrire

$$W_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{4}$$

a) Le développement précédent est impossible car W_n ne tend pas vers 0 pour n tendant vers l'infini.

Dans le cas contraire, nous avons

b) α est indépendant de λ.

c) $\beta = 0$, pour tout λ.

d) Il existe une valeur de λ telle que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Question n° 29 :

Pour tout λ réel (fixé)

a) $\{W_n\}$ converge. b) $\{(-1)^n W_n\}$ converge.

Pour $\lambda = -1$

c) $\{W_n\}$ diverge. d) $\{(-1)^n W_n\}$ converge.

Question n° 30 :

On considère dans cette question la série de terme général

$$X_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} + \lambda \sin \frac{1}{n} + \mu \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right) \quad n \geq 1 \tag{5}$$

où (λ, μ) est un couple de constantes réelles.

Un développement limité de X_n à l'ordre 3, pour $n \to +\infty$, permet d'écrire

$$X_n = \frac{\alpha'}{n} + \frac{\beta'}{n^2} + \frac{\gamma'}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{6}$$

a) Le développement précédent est impossible car le troisième terme ne peut admettre de développement limité à l'infini. En effet

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right) = +\infty$$

Dans le cas contraire, nous avons

b) $\exists\,(\lambda,\mu)$ tel que $\{X_n\}$ converge.

c) $\exists\,(\lambda,\mu)$ tel que $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$.

Il faut sous entendre pour les assertions b) et c) : il existe au moins un couple (λ,μ).

d) Il existe un et un seul couple (λ,μ) tel que la série alternée $\{(-1)^n\,X_n\}$converge.

On considère la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^{2n}-2}{(\ln x)^{2n}+2} & \text{pour} \quad x>0 \\ 1 & \text{pour} \quad x=0 \end{cases}$$

n est un entier supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal Oxy.

Question n° 31 :

Nous pouvons dire que f_n

a) n'est pas continue en $x=0$.

b) est dérivable en $x=0$ et $f_n'(0)=-1$.

c) est continue mais non dérivable en $x=0$.

d) est dérivable en $x=0$ et $f_n'(0)=0$.

Question n° 32 :

Nous pouvons écrire $f_n'(x) = \dfrac{4\,u(x)}{\left[(\ln x)^{2n}+2\right]^2}$, où $u(x)$ est une expression à calculer.

a) $u(x)$ n'existe pas sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Dans le cas contraire, alors nous avons sur $]0,+\infty[$

b) u strictement croissante.

c) u monotone (au sens large).

d) l'équation $u(x)=0$ admet deux racines (distinctes).

Question n° 33 :

Etude du développement asymptotique de f_n en $x=0$. Nous avons

a) $f_n(x) = 1 - \dfrac{4}{(\ln x)^{2n}} + \mathcal{O}\left((\ln x)^{-4n}\right)$.

b) $f_n(x) = 1 - \dfrac{2}{(\ln x)^{2n}} + \mathcal{O}\left((\ln x)^{-2n}\right)$.

Nous rappelons que $\mathcal{O}(h)$ exprime l'existence d'une constante M et d'un voisinage v_0 de zéro tels que $|\mathcal{O}(h)| \leq M\,|h|\ \ \forall\, x \in v_0$.

Nous en déduisons que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet au point $x=0$

c) une tangente verticale.

d) une tangente horizontale.

Question n° 34 :

Soit f la fonction définie, si elle existe, comme la limite de la suite (f_n) quand n tend vers $+\infty$. Nous pouvons dire que f est sur $]0,+\infty[$

a) continue.

b) discontinue.

c) continue et dérivable.

d) monotone par morceaux.

Question n° 35 :

D'une manière générale

a) Il ne peut y avoir convergence uniforme d'une suite de fonctions continues vers une fonction discontinue.

b) Il existe des suites de fonctions continues qui convergent uniformément vers une fonction discontinue.

La convergence de la suite (f_n) vers f est

c) uniforme sur $]0, +\infty[$.

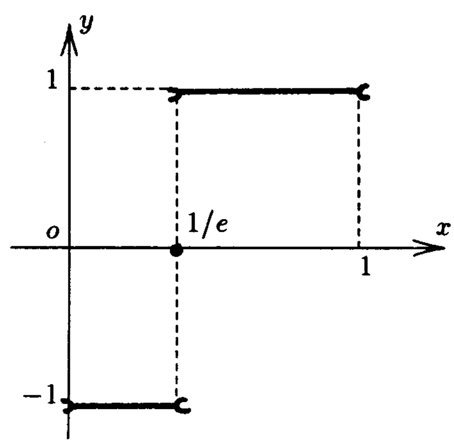
d) uniforme sur $]\frac{1}{e}, e[$.

Question n° 36 :

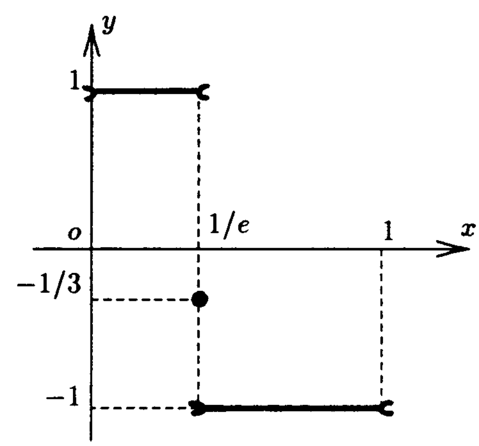
La représentation graphique de f est dans le repère Oxy

Pour $0 \leq x \leq 1$:

a)

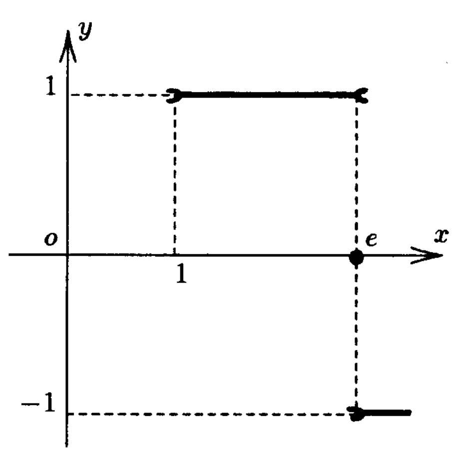


b)

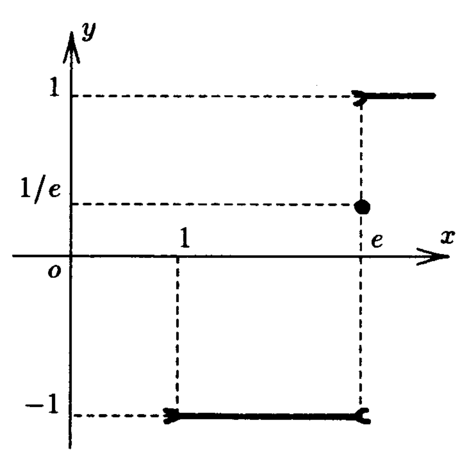


Pour $x \geq 1$:

c)



d)



On considère la fonction numérique, définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

et l'on se propose d' étudier une résolution approchée de l'équation

$$g(x) = 0 \tag{1}$$

Question n° 37 :

Généralement une équation du type (1) admet pour $x \geq 0$ une et une seule racine si

a) g est strictement monotone.

b) $0 \in g([0,+\infty[)$.

Nous avons dans le cas présent

c) g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-2,+\infty[$.

d) g est concave sur $[0,+\infty[$.

Question n° 38 :

Pour déterminer une valeur approchée de la racine α de l'équation (1), nous utilisons l'algorithme suivant définissant les deux suites adjacentes (u_n) et (v_n).

$u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour $n \geq 0$

$$\begin{cases} \text{si} \quad g\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) > 0 & \text{alors} \quad u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ \text{si} \quad g\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) < 0 & \text{alors} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n \\ \text{si} \quad g\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) = 0 & \text{alors} \quad u_{n+1} = \alpha \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \alpha \end{cases}$$

L'algorithme décrit ci-dessus est communément appelé

a) Regula Falsi (Méthode de la sécante).

b) Dichotomie.

Nous avons

c) la suite (u_n) est constante pour $1 \leq n \leq 6$.

d) une valeur approchée de α à 10^{-1} près est $\frac{1}{2}$.

Dans les trois questions suivantes, on considère la fonction numérique

$$f_1(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2}{(\ln x)^2 + 2}$$

de courbe représentative $\mathcal{C}_1$ dans le repère orthogonal Oxy.

Question n° 39 :

Sur l'intervalle $[0,+\infty[$

a) f_1 est continue et dérivable.

b) f_1 est bornée.

c) $|f_1(x)| \leq 1$.

d) f_1 est monotone.

Question n° 40 :

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$

a) f_1 n'est pas dérivable au moins deux fois.

Dans le cas contraire alors

b) f_1' est strictement monotone et admet un et un seul zéro.

c) f_1'' admet un et un seul zéro.

d) f_1'' admet deux zéros (distincts).

Question n° 41 :

a) La courbe $\mathcal{C}_1$ n'admet pas de point d'inflexion.

Dans le cas contraire, si β est l'abscisse du point d'inflexion, alors une valeur approchée à 10^{-1} près est

b) 1,0. c) 0,5. d) 1,7.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans β_0 est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Question n° 42 :

De manière générale, toute matrice carrée réelle d'ordre 3 est

a) semblable à une matrice réelle triangulaire.
b) équivalente à une matrice diagonale réelle.

Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée réelle d'ordre 3 admet toujours

c) trois racines réelles distinctes ou non.
d) au moins une racine réelle.

Question n° 43 :

Le polynôme caractéristique de la matrice A admet

a) Exactement deux racines distinctes.
b) Une racine double et une simple.

On note I la matrice unité d'ordre 3 et O la matrice nulle d'ordre 3. Nous avons

c) $(A-I)(A-2I) = O$.
d) $A(A-I)(A-2I) = O$.

Question n° 44 :

id étant l'application identique dans $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme f vérifie les relations

a) $\operatorname{Ker}(f-id) = \operatorname{Im}(f-id)$.
b) $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im}(f-id) \oplus \operatorname{Im}(f-2id)$.

Nous déduisons des questions précédentes que l'endomorphisme f est

c) non diagonalisable.
d) diagonalisable.

Question n° 45 :

Soit le polynôme $P(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Pour $n \geq 3$, on considère la division euclidienne du monôme λ^n par le polynôme $P(\lambda)$. Le reste $R(\lambda)$ est de degré

a) ≤ 2 et de valuation ≥ 1.
b) 1 car le terme de degré 2 s'annule.

Nous déduisons de la division précédente que

$$A^n = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

où α, β et γ sont tels que

c) $\alpha = 2^n$ et $\gamma = 0$.
d) $\alpha + \beta = 1$ et $\gamma = 0$.

Question n° 46 :

Il existe une matrice inversible P telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) L'hypothèse ci-dessus est fausse.

Dans le cas où l'hypothèse ci-dessus est jugée acceptable alors

b) $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$. d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question n° 47 :

On considère le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & 4z & = & p \\ 3x & - & 4y & + & 12z & = & q \\ x & - & 2y & + & 5z & = & r \end{array} \right. \qquad (S)$$

où $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$.

Nous pouvons dire que le système (S)

a) est de Cramer.

b) est de rang 2.

c) n'admet des solutions que si et seulement si $p = q = r = 0$.

d) est compatible si et seulement si $p - 2q + 4r = 0$.

Question n° 48 :

On considère le systéme linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & 4z & = & p \\ 3x & - & 4y & + & 12z & = & q \\ x & - & 2y & + & 5z & = & r \\ x & & & - & 2z & = & s \end{array} \right. \qquad (S')$$

où $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$.

a) l'ensemble des solutions de (S') contient celui de (S) (Au sens strict).

b) (S') et (S) ont exactement les mêmes solutions.

c) (S') n'admet jamais de solution.

d) (S') admet une infinité de solutions pour au moins un 4−uplet (p, q, r, s).

Question n° 49 :

On considère dans cette question la matrice M telle que $M = A^2$. Nous avons

a) M est une matrice carrée d'ordre 9.

b) M et A ont les mêmes sous espaces propres.

D'une manière générale, pour toute matrice M telle que $M = A^2$ où A est une matrice carrée quelconque d'ordre 3.

c) Si A est diagonalisable alors M l'est aussi.

d) M et A ont même rang.

Question n° 50 :

On considère dans cette question une matrice N telle que $N^2 = A$. Nous avons

a) N n'existe pas.

S'il existe au moins une matrice N telle que $N^2 = A$, alors

b) N et A ont les mêmes sous espaces propres.

c) N est unique.

d) N et A ont même rang.