ERRATA

EPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

<u>QUESTION 26 PAGE 7</u>

Au lieu de : ...$\Gamma(1) = 1$ et $log\gamma$ soit convexe :

Lire : ...$\Gamma(1) = 1$ et $log\Gamma$ soit convexe :

Soit l'équation différentielle $y' = f(y)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ application de classe C^1. Soit $h \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que l'on connaît déjà les valeurs $y(0) = y_0, y(h) = y_1, y(2h) = y_2$.

Question 34

Le polynôme de degré 2 prenant les valeurs $f(y_0), f(y_1), f(y_2)$ en $0, h, 2h$ s'écrit $ax^2 + bx + c$ avec :

a) $a = \frac{f(y_2)-2f(y_1)+f(y_0)}{2h^2}$.
b) $a = \frac{f(y_2)+2f(y_1)+f(y_0)}{2h^2}$.
c) $b = \frac{-f(y_2)+4f(y_1)-3f(y_0)}{2h}$.
d) $b = \frac{f(y_2)-4f(y_1)+3f(y_0)}{2h}$.

Question 35

En remarquant que l'équation différentielle permet d'écrire :

$$y(3h) = y(2h) + \int_{2h}^{3h} f(y(t))dt$$

et en remplaçant dans cette expression $f(y(t))$ par le polynôme précédent, on obtient pour $y(3h)$ l'expression approchée suivante :

a) $y(2h) + \frac{h}{12}(23f(y_2) + 16f(y_1) + 5f(y_0))$
b) $y(2h) + \frac{h}{6}(23f(y_2) + 16f(y_1) + 5f(y_0))$
c) $y(2h) + \frac{h}{12}(23f(y_2) - 16f(y_1) + 5f(y_0))$
d) $y(2h) + \frac{h}{6}(23f(y_2) - 16f(y_1) + 5f(y_0))$

Question 36

On suppose maintenant que l'on possède une valeur approchée de $y(3h)$ notée $\widehat{y_3}$. En utilisant un polynôme prenant les valeurs $y_1, y_2, \widehat{y_3}$ aux points $h.2h,3h$ et en s'inspirant de ce qui a été fait aux questions 34) et 35) la valeur approchée de :

$$y(2h) + \int_{2h}^{3h} f(y(t))dt$$

est :

a) $y(2h) + \frac{h}{12}(5f(\widehat{y_3}) + 8f(y_2) - f(y_1))$
b) $y(2h) + \frac{h}{6}(5f(\widehat{y_3}) + 8f(y_2) - f(y_1))$
c) $y(2h) + \frac{h}{12}(-5f(\widehat{y_3}) + 8f(y_2) + f(y_1))$
d) $y(2h) + \frac{h}{6}(-5f(\widehat{y_3}) + 8f(y_2) + f(y_1))$

Question 37

Dans la question précédente, on a établi une formule donnant une valeur approchée de $y(3h)$ à partir de $\widehat{y_3}$. On notera cette formule sous la forme d'une application F. On construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en se donnant $u_0 = \widehat{y_3}$ et en posant $\forall n \geq 0, u_{n+1} = F(u_n)$. On a alors :

a) $\forall n > 1, |u_{n+1} - u_n| = \frac{5h}{6}|f(u_n) - f(u_{n-1})|$.
b) $\forall n > 1, |u_{n+1} - u_n| = \frac{5h}{6}|u_n - u_{n-1}|$.
c) $\forall n > 1, |u_{n+1} - u_n| = \frac{5h}{12}|u_n - u_{n-1}|$.
d) $\forall n > 1, |u_{n+1} - u_n| = \frac{5h}{12}|f(u_n) - f(u_{n-1})|$.

2ème ERRATA

EPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

CONCOURS ICNA

JEUDI 10 AVRIL 8H30-12H30

QUESTION 3 PAGE 1

Dans l'expression de P (λ) au lieu de x

Lire : λ (lambda)

QUESTION 9 PAGE 3

Dans l'introduction de la question

Lire : η_f (Eta indice f)

REMARQUE :

La notation log désigne le logarithme népérien

EPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

Ce sujet comporte 40 questions, toutes obligatoires
Liste des questions pouvant être liées :
1-17, 18-30, 31-40.

Dans la suite, pour une matrice réelle carrée M, les notations $tr(M)$ et $det(M)$ désigneront respectivement la trace et le déterminant de la matrice M. Pour une matrice réelle quelconque A, l'expression $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i + \beta C_j$ avec α, β deux réels, sera une abbréviation pour l'opération élémentaire consistant à remplacer la ligne (resp. colonne) i de A par la combinaison linéaire à coefficients α et β de cette ligne (resp. colonne) et de la ligne (resp. colonne) j. De même, $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) signifiera que l'on permute les lignes (resp. colonnes) d'indices i et j. Enfin, Id désignera la matrice identité et 0 la matrice nulle.

Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 1

On effectue l'opération : $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ pour obtenir une nouvelle matrice M_1. On a :

a) $det(M) = det(M_1)$.
b) $det(M) = -det(M_1)$.
c) $ker(M) = ker(M_1)$.
d) $ker(M) \neq ker(M_1)$.

Question 2

En développant par rapport à la 3 ième colonne, on obtient :

a) $det(M) = 0$.
b) $det(M) = 1$.
c) $det(M) = -1$.
d) $det(M) = 2$.

Question 3

On définit l'application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall \lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = det(M - \lambda Id)$. Il existe deux complexes a,b tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

a) $P(\lambda) = 1 + ax + bx^2 - 2x^3 + x^4$.
b) $P(\lambda) = 2 + ax + bx^2 + x^3 + x^4$.
c) $P(\lambda) = 2 + ax + bx^2 2x^3 + x^4$.
d) $P(\lambda) = 1 + ax + bx^2 + 2x^3 + x^4$.

Question 4

En prenant la valeur particulière $\lambda = 1$, on obtient : $P(1) = det(Q)$ avec :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

En effectuant dans l'ordre les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ on obtient un matrice dont le déterminant a pour valeur :

a) $P(1)$.
b) $-P(1)$.
c) $2P(1)$.
d) $-2P(1)$.

Question 5

La valeur de $P(-2)$ est :

a) 3.
b) 9.
c) -3.
d) 0.

Question 6

On déduit des deux questions précédentes que $P(\lambda)$ est une fonction polynôme dont les coefficients sont :

a) De somme nulle.
b) De somme strictement négative.
c) Strictement positifs.
d) Strictement positifs sauf celui de degré 3 qui est nul.

Question 7

Déterminer deux complexes α,β tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)^2$ et en déduire que M possède:

a) 4 valeurs propres réelles distinctes.
b) 2 valeurs propres réelles doubles.
c) 2 valeurs propres doubles.
d) 1 valeur propre réelle double et 1 valeur propre imaginaire double.

Question 8

Le théorème de Cayley-Hamilton permet d'affirmer que :

a) $M^2 - M + Id = 0$.
b) $M^2 + M + Id = 0$.
c) $M^2 - M + Id$ n'est pas inversible.
d) $M^2 + M + Id$ est nilpotent.

Soit $\alpha \in [-1,1]$. On s'intéresse maintenant à l'ensemble E des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ tel que $E = \{f | f^2 + \alpha f + Id = 0\}$.

Question 9

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels et soit $f \in E$ non nul. On définit une application η de $\mathbb{R}[X]$ dans l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ par :

$$\forall P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i \in \mathbb{R}[X], \eta(P) = \sum_{i=0}^{N} a_i f^i$$

L'application η_f vérifie :

a) $\eta_f(PQ) = P\eta_f(Q) + \eta_f(P)Q$.
b) $\eta_f(PQ) = \eta_f(P)\eta_f(Q)$.
c) $\eta_f(0) = Id$.
d) $\eta_f(1) = Id$.

Question 10

Soit le polynôme $Q(X) = X^2 + \alpha X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la division euclidienne de P par Q montre qu'il existe un polynôme R tel que :

a) $P(f) = R(f)$ et le degré de R est au moins 2.
b) $P(f) = R(f)$ et le degré de R est au plus 1.
c) $P(f) = Q(f)R(f)$ et le degré de $R(f)$ est au plus 1.
d) $P(f) = Q(f)R(f)$ et le degré de $R(f)$ est 1.

Question 11

L'endomorphisme f a :

a) au moins une valeur propre réelle.
b) exactement une valeur propre rélle.
c) aucune valeur propre réelle.
d) 0 ou 1 valeur propre réelle.

Question 12

On déduit de la question précédente que le noyau de η_f est :

a) de dimension 1.
b) de dimension 2.
c) réduit à $\{0\}$.
d) L'ensemble des multiples de Q.

Question 13

On déduit de même que l'image I_f de η_f est :

a) de dimension 1.
b) de dimension 2.
c) de dimension strictement supérieure à 2.
d) de dimension 0 ou 1.

Question 14

On munit $\mathbb{R}^4$ d'une loi externe $I_f \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ en posant pour $\phi \in I_f$ et $x \in \mathbb{R}^4$: $\phi.x = \phi(x)$. En prenant comme loi interne l'addition usuelle des vecteurs et comme loi externe la loi précédente, $\mathbb{R}^4$ a une structure d'espace vectoriel car :

a) I_f est un corps.
b) I_f est un anneau.
c) $\mathbb{R}[X]$ est un corps.
d) $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre.

Question 15

Soit e_1 un vecteur non nul de E. Le couple $(e_1, f(e_1))$ est :

a) Une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
b) Une famille libre du I_f-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
c) Une famille génératrice du I_f-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.
d) Une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel de dimension 1 du I_f-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

Question 16

En prenant e_2 vecteur de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas au sous-espace vectoriel réel engendré par $(e_1, f(e_1))$, et en considérant la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ on montre que le I_f-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est :

a) de dimension 1.
b) de dimension 3.
c) de dimension 2.
d) de dimension 4.

Question 17

Il existe une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On s'intéresse dans cette partie aux applications continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ solutions de l'équation fonctionnelle (E) :

$$\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$$

Question 18

Soit f une solution de (E) prenant des valeurs strictement positives dans l'intervalle $]0,1]$.

a) f est strictement positive sur tout R^{+*}.
b) f s'annule pour $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.
c) f se prolonge par continuité en 0.
d) f admet une limite à droite et à gauche pour $x \in \mathbb{N}$, mais ne peut pas être continue en ces points.

Question 19

Soit f_1 et f_2 deux solutions de (E) satisfaisant aux conditions de 18). On définit les applications g_1,g_2 par $g_1(x) = log(f_1(x))$ et $g_2(x) = log(f_2(x))$. en tout point $x > 0$ où $f_1(x) \neq 0$ (resp. $f_2(x) \neq 0$). On pose enfin $h = g_2 - g_1$.

a) h est nulle sur tous les entiers.
b) h est périodique sur $\mathbb{R}^+$ de période 1.
c) h est strictement croissante.
d) h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Question 20

On se donne f satisfaisant aux conditions de 18) telle que $f(1) = 1$. On pose comme précedemment $g = logf$ en tout point où f ne s'annule pas et on suppose que g est convexe. On a alors pour tout $x \in]0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}, n > 1$:

a) $g(x+n) - g(n) \geq xlog(n-1)$
b) $g(x+n) - g(x) \geq (1-x)log(n)$.
c) $g(x+n) - g(n) \leq xlog(n)$.
d) $g(x+n) - g(x) \leq xlog(n)$

Question 21

Sous les hypothèses de 19)., la quantité $g(x+n)-g(n)$ vaut :

a) $g(x)+log(x)+\sum_{i=1}^{+\infty}(log(x+i)-log(i))$.
b) $g(x)+log(x)+\sum_{i=1}^{n-1}(log(x+i)-log(x+i-1))$.
c) $g(x)+log(x)+\sum_{i=1}^{n}(log(x+i+1)-log(x+i))$.
d) $g(x)+log(x)+\sum_{i=1}^{n-1}(log(x+i)-log(i))$.

Question 22

Soit $x\in]0{,}1[$ et soit la série de terme général : $u_n(x)=xlog\left(\frac{n}{n-1}\right)-log(x+n-1)+log(n-1)$ avec $n\geq 2$. Pour $n\to+\infty$ on a :

a) $u_n(x)=\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
b) $u_n(x)=\frac{x(x-1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
c) $u_n(x)=\frac{x(x-1)(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
d) $u_n(x)=\frac{x(x-1)(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Question 23

Pour $x\in]0{,}1[$, la série de terme général $u_n(x)$ converge :

a) Simplement car elle est alternée.
b) Absolument.
c) Simplement mais pas absolument.
d) Simplement car $u_n(x)$ est positif, décroissant avec n pour n assez grand.

Question 24

Soit $u(x)$ la limite de la série $\sum_{i\geq 2}u_i(x)$.

a) $u(x)$ se prolonge par continuité en 0, mais pas en 1.
b) $u(x)$ se prolonge par continuité en 0 et en 1.
c) $u(x)$ se prolonge par continuité en 1, mais pas en 0.
d) $u(x)$ ne se prolonge par continuité ni en 0 ni en 1.

Question 25

On pose $h(x)=-log(x)+u(x)$ en tout point x de l'intervalle $]0{,}1]$ pour lequel cette quantité est définie. On a :

a) $g(x)=h(x)$ pour $x\in]0{,}1]$.
b) $g(x)=h(x)$ pour $x\in]0{,}1[$.
c) $g(x)=h(x+1)$ pour $x\in]0{,}1]$.
d) $g(x)=h(x+1)$ pour $x\in]0{,}1[$.

Question 26

On déduit de la question précédente et de 19) qu'une application Γ strictement positive sur $]0, +\infty[$, solution de E) telle que $\Gamma(1) = 1$ et $log\gamma$ soit convexe :

a) Ne peut exister que sur $]0, +\infty[-\mathbb{N}$.

b) Existe et toute application de la forme $\Gamma + h$ avec h périodique de période 1 est solution de E).

c) Existe et est unique.

d) Existe.

Question 27

En tout point $x \in]0, +\infty[$ où Γ est définie, et en utilisant le résultat de la question 25)., on obtient la relation suivante :

a) $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)...(x+n-1)}$.

b) $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

c) $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{-x} n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

d) $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{-x}}{n!x(x+1)...(x+n)}$.

Question 28

Soit la série de terme général $q_n = log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}$. Elle est :

a) Simplement convergente car alternée.

b) Simplement convergente car q_n est positif décroissant.

c) Absolument convergente car $q_n = \frac{-1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ pour $n \to +\infty$.

d) Absolument convergente car $q_n = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ pour $n \to +\infty$.

Question 29

On note γ la limite de la série de terme général q_n. En remplaçant dans l'expression de u_n définie en question 23). $log\frac{n}{n-1}$ par $\frac{1}{n-1} + \left(log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)$, on obtient en tout point $x \in]0, +\infty[$ où Γ est définie :

a) $\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$.

b) $\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{nx} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$.

c) $\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{nx} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$.

d) $\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}$.

Question 30

On déduit de la question précédente que pour $x \to 0, x > 0$:

a) $\Gamma(x) \equiv \frac{1}{x}$.

b) $\Gamma(x) \equiv x$.

c) $\Gamma(x)$ tend vers 1.

d) $\Gamma(x)$ tend vers $+\infty$.

Dans cette partie, on étudie un algorithme d'intégration numérique des équations différentielles connu sous le nom de méthode prédicteur-correcteur. Dans la suite, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes en une indéterminée à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n que l'on munira de sa structure canonique d'espace vectoriel réel.

Question 31

Soit $(x_1, \dots x_n)$ un n-uplets de réels et soit P_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$. Pour $i = 1 \dots n$ on pose $Q_i(X) = \frac{P_n(X)}{(X-x_i)}$. La famille des $(Q_i)_{i=1\dots n}$ est :

a) Une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
c) Une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
d) Une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 32

L'opérateur de dérivation D est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $D(1) = 0$ et $D(X^i) = iX^{i-1}$,$i = 1 \dots n$. On a :

a) $DP_n(X) = \sum_{i=1}^{n} Q_i$.
b) $DP_n(X) = \sum_{i=1}^{n} iQ_i$.
c) $DP_n(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{i}$.
d) $DP_n(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i^n Q_i$.

Question 33

Soit $(y_1 \dots y_n)$ un n-uplet de réels et soit f une application polynôme de degré $n-1$ telle que $y_i = f(x_i), i = 1 \dots n$.

a) L'ensemble des applications polynômes de degré $n-1$ vérifiant cette propriété est un espace vectoriel de dimension 1.
b) L'application f est unique.
c) On peut calculer f comme étant l'application polynôme associée au polynôme

$$g(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i P_n(X)}{(X - x_i)DP_n(x_i)}$$

d) On peut calculer f comme étant l'application polynôme associée au polynôme

$$g(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i P_n(x_i)}{(X - x_i)DP_n(X)}$$

Question 38

On suppose maintenant que la dérivée de f est bornée en valeur absolue sur tout $\mathbb{R}$ par un réel positif $M > 0$. Le théorème des accroissements finis montre que :

a) On peut trouver $0 < r < 1$ et $h > 0$ tels que $|u_{n+1} - u_n| < r$.
b) On peut trouver $0 < r < 1$ et $h > 0$ tels que $|u_{n+1} - u_n| < r^n$.
On en déduit que :
c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge vers u vérifiant $u = F(u)$.
d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge vers 0.

Question 39

On veut résoudre l'équation $y' = arctg(y)$. On donne $h = 1$,$y_0 = 1$,$y_1 = 1.9561$,$y_2 = 3.1460$. On applique tout d'abord la formule donnant $\widehat{y_3}$, puis on construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut estimer y_3 à 10^{-2} près par :

a) 5.10
b) 4.82
c) 5.51
d) 4.46

Question 40

La méthode reste convergente pour :

a) $h = 4$.
b) $h = 2$.
c) $h = -3$.
d) $h = -4$.