

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



Épreuve commune obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2



Ce sujet comporte :

4 pages de garde, d'instructions/QCM et d'avertissements recto/verso
14 pages de texte recto/verso



CALCULATRICE NON AUTORISÉE

Tournez la page S.V.P.

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve «commune obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

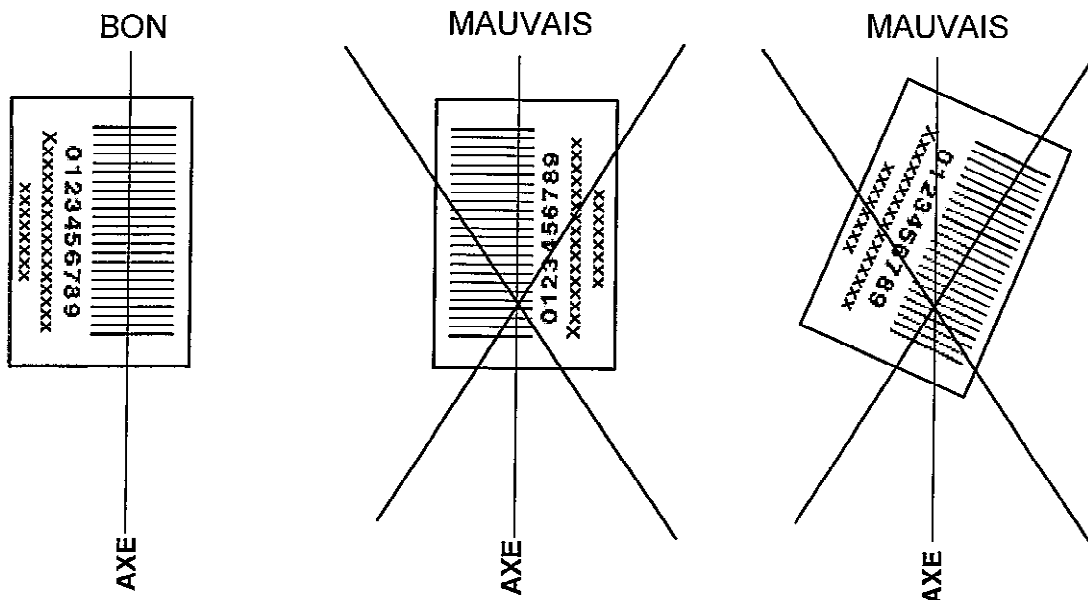
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

- 1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



- 2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un **STYLO BILLE** ou une **POINTE FEUTRE** de couleur **NOIRE**.
- 3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les brouillons qui vous sont fournis à la demande par le surveillant qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.

Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes.

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.
- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :

A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :

A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E

Tournez la page S.V.P.

AVERTISSEMENTS

L'usage de calculatrices, téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé.

QUESTIONS LIÉES

1 à 21
22 à 32
33 à 40

PARTIE I

r désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{N}_r$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et r , enfin $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre r à coefficients réels. I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficients m_{ij} est à diagonale strictement dominante si et seulement si pour tout i appartenant à $\mathbb{N}_r$ $|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$ où $| \cdot |$ désigne la valeur absolue.

Une matrice A de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ de coefficients a_{ij} est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

- pour tout couple (i, j) d'entiers de $\mathbb{N}_r$, a_{ij} appartient à l'intervalle $[0, 1]$
- pour tout entier naturel i de $\mathbb{N}_r$, la somme de tous les coefficients de la ligne i est égale à 1.

Si, de plus, les coefficients de A sont tous non nuls, la matrice est dite stochastique stricte.

On note $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_r^*$ celui des matrices stochastiques strictes.

On note, pour tout n entier naturel non nul, $a_{ij}^{(n)}$ les coefficients de la matrice A^n . On dira que la suite de terme général la matrice A^n converge et a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, la matrice A^∞ de coefficients a_{ij}^∞ , si pour tout couple (i, j) d'entiers de $\mathbb{N}_r$ la suite $(a_{ij}^{(n)})$ est convergente et a pour limite, quand n tend vers $+\infty$, le réel a_{ij}^∞ .

1) L'ensemble $\mathcal{S}_2$

- A) est stable pour l'addition des matrices
- B) est stable pour le produit matriciel
- C) est stable pour la multiplication par un scalaire réel
- D) n'est pas stable pour la produit matriciel

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2) La matrice A

- A) appartient à $\mathcal{S}_2^*$
- B) n'appartient pas à $\mathcal{S}_2$
- C) vérifie $A^2 = (5/6)A + (1/6)I_2$
- D) vérifie $A^2 = (1/6)A + (5/6)I_2$

- 3) Pour tout n entier naturel non nul
- A) il existe 2 suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_n A + b_n I_2$ et $a_{n+1} = a_n + (5/6)b_n$ et $b_{n+1} = (1/6)a_n$
 - B) il existe 2 suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $A^n = a_n I_2 + b_n A$ et $a_{n+1} = b_n + (5/6)a_n$ et $b_{n+1} = (1/6)a_n$
 - C) il existe une suite de réels (a_n) telles que $A^n = a_n A$
 - D) il existe plusieurs suites de réels (a_n) et plusieurs suites de réels (b_n) telles que $A^n = a_n A + b_n I_2$ et $a_{n+1} = (5/6)a_n + b_n$ et $b_{n+1} = (1/6)a_n$
- 4) S'il existe des suites de réels (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = a_n A + b_n I_2$, alors
- A) la suite $(a_n + b_n)$ est constante de valeur 1
 - B) la suite $(a_n + b_n)$ n'est pas constante
 - C) les suites (a_n) et (b_n) vérifient pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = (-a_n + 1)/6$ et $b_{n+1} = 1 - (b_n/6)$
 - D) les suites (a_n) et (b_n) vérifient pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 1 - (a_n/6)$ et $b_{n+1} = (-b_n + 1)/6$
- 5) Reprenant les notations et les hypothèses de la question 4,
- A) il n'existe pas de réel l tel que la suite $(a_n - l)$ soit une suite géométrique
 - B) on peut établir l'existence d'un réel l tel que $(a_n + l)$ soit une suite géométrique convergente de raison $1/6$
 - C) pour tout entier naturel non nul n , $a_n = (1/7)(1 - (-1/6)^{n-1})$ et $b_n = (1/7)(6 + (-1/6)^{n-1})$
 - D) pour tout entier naturel non nul n , $b_n = (1/7)(1 - (-1/6)^{n-1})$ et $a_n = (1/7)(6 + (-1/6)^{n-1})$
- 6) Toujours sous les hypothèses et les notations de la question 4
- A) on ne peut pas conclure à la convergence de la suite de terme général A^n
 - B) la suite de terme général A^n converge et sa limite appartient au complémentaire de $\mathfrak{S}_2^*$ dans $\mathfrak{S}_2$
 - C) la suite de terme général A^n converge vers une matrice de $\mathfrak{S}_2^*$
 - D) les coefficients a_{ij}^∞ de la limite de la suite de terme général A^n vérifient $a_{11}^\infty = a_{21}^\infty = 3/7$ et $a_{12}^\infty = a_{22}^\infty = 4/7$

On considère la matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 \\ 2/9 & 1/3 & 4/9 \end{pmatrix}$

On note $\chi_B = \det(B - \lambda I_3)$ le polynôme caractéristique de la matrice B

7) La matrice B

- A) est diagonalisable comme matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous distincts
- B) est diagonalisable car une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples
- C) appartient à $\mathfrak{S}_3$ et a pour polynôme caractéristique $\chi_B = (\lambda - 1)(\lambda - (5/21))((4/9) - \lambda)$ en développant le déterminant suivant la dernière colonne
- D) est diagonalisable car il existe un polynôme annulateur de la matrice B scindé à racines simples

On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de la matrice B telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et on

considère la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

8) Le sous-espace propre de B

- A) associé à la valeur propre λ_1 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(1, 1, 1)$
- B) associé à la valeur propre λ_2 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(0, 1, 0)$
- C) associé à la valeur propre λ_3 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(7, -9, 7)$
- D) associé à la valeur propre λ_1 est la droite vectorielle dont une base est le vecteur $(1, -1, 1)$

9) On montre que

A) il existe plusieurs matrices P telles que $B = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

B) il existe une matrice P telle que $B = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = (1/16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

C) il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}DP$ et $P^{-1} = (1/16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

D) il existe une seule matrice $P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $B = PDP^{-1}$

10) La suite de terme général B^n

A) est définie par $B^n = (1/16) \begin{pmatrix} 7(5/21)^n + 9 & 7(-(5/21)^n + 1) & 0 \\ 9(-(5/21)^n + 1) & 9(5/21)^n + 7 & 0 \\ 7(5/21)^n + 9 - 16(4/9)^n & 7(-(5/21)^n + 1) & 16(4/9)^n \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel non nul

B) est définie par $B^n = (1/16) \begin{pmatrix} 7(5/21)^n + 9 & 7(-(5/21)^n + 1) & 0 \\ 9(-(5/21)^n + 1) & 9(5/21)^n + 7 & 0 \\ 7(5/21)^n + 9 - 16(4/9)^n & 7((5/21)^n + 1) & 16(4/9)^n \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel non nul

C) converge vers une matrice de $\mathbb{S}_3^*$ car les suites géométriques $(5/21)^n$ et $(4/9)^n$ convergent vers 0

D) est une suite d'éléments de $\mathbb{S}_3$, convergente et de limite la matrice $(1/16) \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

On considère les matrices C et J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) La matrice C

- A) est triangulaire inférieure et inversible car ses coefficients diagonaux sont tous non nuls
- B) admet une valeur propre double $1/2$ et une valeur propre simple 1 donc n'est pas diagonalisable car pour qu'une matrice soit diagonalisable il est nécessaire que toutes ses valeurs soient de multiplicité 1
- C) est diagonalisable car toute matrice dont le spectre ne contient pas la valeur 0 est diagonalisable
- D) est diagonalisable car le polynôme $(X-1)(X-1/2)$, à racines simples, est un polynôme annulateur de la matrice C

12) On établit que

- A) la matrice J est nilpotente
- B) la suite de terme général J^n est stationnaire car $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel non nul n
- C) $C^n = (1/2^n)(I_3 + nJ + 2^n J^2 - J^2 - nJ^2)$ pour tout entier naturel non nul n
- D) $C^n = (1/2^n)(I_3 + nJ + n(n-1)J^2)$ pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1

13) La suite de terme général C^n

- A) est une suite convergente de limite n'appartenant pas à $\mathfrak{S}_3$
- B) est une suite d'éléments de $\mathfrak{S}_3$, convergente et de limite la matrice de $\mathfrak{S}_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- C) est définie par $C^n = (1/2^n) \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel non nul
- D) ne converge pas car la suite de terme général $n/(2^n)$ diverge

- 14) On a
- A) $\mathfrak{S}_r$ est un sous-espace vectoriel de l'espace réel $\mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$
 - B) $\mathfrak{S}_r$ n'est pas un sous-espace vectoriel mais est stable pour le produit matriciel
 - C) $\mathfrak{S}_r$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$
 - D) $\mathfrak{S}_r$ n'est pas un sous anneau de $\mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ car $\mathfrak{S}_r$ n'est pas un sous-groupe pour l'addition puisqu'il ne contient pas la matrice nulle
- 15) Soit A une matrice de l'ensemble $\mathfrak{S}_r$
- A) le spectre de A contient 1 car le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 est un vecteur propre associé à 1
 - B) 1 n'est pas valeur propre de A car le polynôme caractéristique de A n'est pas divisible par le polynôme $(X-1)$
 - C) pour tout n entier naturel la matrice A^n appartient à l'ensemble $\mathfrak{S}_r^*$
 - D) la matrice A^n , n étant un entier naturel, n'appartient pas nécessairement à l'ensemble $\mathfrak{S}_r$
- 16) Soit A une matrice de l'ensemble $\mathfrak{S}_r$, si l'on suppose que la suite de terme général A^n converge, sa limite A^∞
- A) n'appartient pas nécessairement à $\mathfrak{S}_r$
 - B) est une matrice stochastique
 - C) commute avec la matrice A pour le produit matriciel et vérifie $A A^\infty = A^\infty$
 - D) ne commute pas avec la matrice A pour le produit matriciel
- 17) Soit M une matrice de $\mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$, de coefficients m_{ij} , à diagonale strictement dominante. La matrice M
- A) est inversible car sinon il existerait une matrice X non nulle de l'ensemble $\mathfrak{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ des matrices à r lignes et 1 colonne à coefficients réels solution du système homogène de matrice M, ce qui contredirait l'hypothèse sur M.
 - B) n'est pas inversible
 - C) est diagonalisable
 - D) n'est ni diagonalisable ni inversible

- 18) Soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$. On note B la matrice $B = A - I_r$ et C_1 la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de B . On établit que
- A) la matrice C_1 est une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante
 - B) la matrice C_1 appartient à $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ mais n'est pas à diagonale strictement dominante
 - C) le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est une droite car le rang de la matrice B vaut $r-1$
 - D) le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est un plan car le rang de la matrice B vaut $r-2$
- 19) On considère toujours une matrice A de l'ensemble $\mathcal{S}_r^*$ de coefficients a_{ij} et on note λ une valeur propre de A . On a
- A) le point d'affixe λ est à l'intérieur du cercle de rayon $(1 - a_{ii})$ et de centre le point d'affixe a_{ii} appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ car la matrice $(A - \lambda I_r)$ n'est pas à diagonale strictement dominante puisqu'elle n'est pas inversible
 - B) la matrice $(A - \lambda I_r)$ est à diagonale strictement dominante
 - C) les valeurs propres de A sont de module strictement supérieur à 1
 - D) les valeurs propres de A distinctes de 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1 car $|\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$ pour tout i appartenant à $\mathbb{N}_r$ où $||$ désigne le module.
- 20) On considère dans cette question une matrice A de l'ensemble $\mathcal{S}_r$ de coefficients a_{ij} et on note λ une valeur propre de A . On a
- A) les valeurs propres de A sont de module supérieur ou égal à 1
 - B) les valeurs propres de A sont toutes de module strictement inférieur à 1
 - C) le déterminant de A est inférieur ou égal à 1 car le déterminant est le produit des valeurs propres de A
 - D) le déterminant de A est supérieur ou égal à 1

- 21) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, de coefficients m_{ij} tels que :
- pour tout couple (i,j) d'entiers de $\mathbb{N}_r$, m_{ij} appartient à l'intervalle $]0,1[$
 - et pour tout entier naturel i de $\mathbb{N}_r$, la somme de tous les coefficients de la ligne i est inférieure ou égale à 1.
- Désignant par $\det M$ le déterminant de la matrice M , on établit
- A) par récurrence, que $|\det M|$ est supérieur ou égal à 1
 - B) par récurrence, que $|\det M| < 1$ car $|\det M|$ est strictement inférieur à la somme de tous les coefficients m_{ij} de la première ligne de la matrice M
 - C) la valeur absolue du déterminant de toute matrice stochastique stricte est strictement inférieure à 1
 - D) la valeur absolue du déterminant de toute matrice stochastique stricte est supérieure ou égal à 1

PARTIE II

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,t) = (\exp(-x^2(1+t^2)))/(1+t^2)$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \exp(-t^2)$ où $\exp$ désigne la fonction exponentielle

- 22) On établit que
- A) la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ dont la fonction dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^2$
 - B) pour tout x réel, la fonction qui à t associe $g(x,t)$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, car continue et positive sur ce segment mais n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$
 - C) la fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}$ car toute fonction positive et continue sur un intervalle ouvert I est intégrable sur cet intervalle
 - D) la fonction h est intégrable sur $[0,+\infty[$ car toute fonction positive, continue sur $[0,+\infty[$ ayant une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

On note G et H les fonctions, si elles existent, définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$G(x) = \int_0^1 g(x,t)dt \text{ et } H(x) = \left(\int_0^x h(t)dt\right)^2$$

23) On montre que

- A) la fonction G est continue mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$
- B) la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée

$$G'(x) = \int_0^1 2x \exp((-x^2(1+t^2)))dt$$

car la fonction qui à (x,t) associe $2x \exp((-x^2(1+t^2)))$ est bornée sur $\mathbb{R} \times [0,1]$

- C) la fonction H est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$
- D) la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $H'(x) = h(x)$ pour tout x réel

24) On établit que les fonctions G et H vérifient

- A) pour tout x réel, $H'(x) = G'(x)$, en introduisant le changement de variable bijectif de classe C^1 $t=ux$, et par conséquent la fonction $G-H$ est constante sur $\mathbb{R}$
- B) la fonction $G+H$ est constante sur $\mathbb{R}$ car pour tout x réel $H'(x) = -G'(x)$,
- C) pour tout x réel $G(x)+H(x) = G(0) = \arctan 1 = \pi/4$ car $\arctan t$ est une primitive de la fonction $1/(1+t^2)$
- D) pour tout x réel $G(x)-H(x) = G(0) = \arctan 1 = \pi/4$ car $\arctan t$ est une primitive de la fonction $1/(1+t^2)$

25) On montre que

- A) la fonction G tend vers $\pi/4$ quand x tend vers $+\infty$
- B) la fonction G tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car pour tout x réel $G(x) \leq \exp(-x^2)$
- C) la fonction H tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et par conséquent la fonction positive h est intégrable sur $[0, +\infty[$
- D) la fonction H tend vers $\pi/4$ quand x tend vers $+\infty$ et par conséquent la fonction positive h est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale de h sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vaut $\sqrt{\pi}/2$

On désigne par f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et on note l la fonction qui au couple (x, t) de réels associe le complexe

$$l(x, t) = f(t) \exp(-2i\pi xt)$$

26) On montre que la fonction

- A) qui à x associe $l(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout t réel
- B) qui à t associe $l(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout x réel car cette fonction est, pour tout x réel, continue et de module borné sur $\mathbb{R}$
- C) qui à t associe $l(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout x réel car cette fonction est, pour tout x réel, le produit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$
- D) qui à t associe $l(x, t)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ pour au moins un réel x

On note F la fonction à valeurs complexes qui à x réel associe, lorsqu'elle existe, l'intégrale

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(x, t) dt$$

27) La fonction F

- A) n'est définie que sur l'intervalle $[0, +\infty[$
- B) est définie, bornée et continue sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction l est continue sur $\mathbb{R}^2$ et dominée sur $\mathbb{R}^2$ par la fonction, indépendante de x , $|f(t)|$ positive, continue par morceau et intégrable sur $\mathbb{R}$

C) est définie mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

D) est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque F est bornée par $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ sur $\mathbb{R}$ et que

toute fonction bornée sur un intervalle I est continue sur cet intervalle

- 28) On suppose dans cette question et les suivantes et dans ces cinq questions seulement, que $f(t) = 1/(1+t^2)$. On a donc, si elle existe,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-2i\pi xt))/(1+t^2) dt$$

On établit

- A) par une intégration par parties que $\pi x F(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} t(\exp(-2i\pi xt))/(1+t^2)^2 dt$ pour tout x réel
- B) par une intégration par parties que $\pi x F(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t(\exp(-2i\pi xt))/(1+t^2)^2 dt$ pour tout x réel
- C) que $|F(x)| \leq 1/(\pi|x|)$ pour tout x réel
- D) que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

- 29) On note F_1 la fonction qui à x réel associe, lorsqu'elle existe, l'intégrale

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\exp(-2i\pi xt))(f(t))^2 dt. \text{ On montre que la fonction } F_1$$

- A) n'est définie que sur l'intervalle $[0, +\infty[$
- B) est définie et bornée par 1 mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$
- C) est définie, bornée par 1 et continue sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $t(f(t))^2 \exp(-2i\pi xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et dominée sur $\mathbb{R}^2$ par la fonction, indépendante de x , $|t|(f(t))^2$ positive, continue par morceau et intégrable sur $\mathbb{R}$
- D) est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas continue en 0

- 30) On établit que

- A) la fonction F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0
- B) la fonction F_1 n'est de classe C^1 que sur $]0, +\infty[$
- C) la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation

$$F(x) - x F'(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 \exp(-2i\pi xt) dt \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

- D) la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation

$$F(x) + x F'(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 \exp(-2i\pi xt) dt \text{ pour tout } x \text{ réel non nul}$$

31) On en déduit que la fonction F

- A) est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$
- B) est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$
- C) vérifie sur $\mathbb{R}^*$ l'équation différentielle $F'' - 4\pi^2 F = 0$
- D) vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $F'' + 4\pi^2 F = 0$

32) e désignant la fonction exponentielle, on établit que

A) la solution générale de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par F est définie par $F(x) = A e^{-2\pi x} + B e^{2\pi x}$ pour tout x réel où A et B sont deux constantes

B) la solution générale de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par F est définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = A_1 e^{-2i\pi x} + B_1 e^{2i\pi x}$

et sur $]-\infty, 0[$ par $F(x) = A_2 e^{-2i\pi x} + B_2 e^{2i\pi x}$

où A_1, A_2, B_1, B_2 sont des constantes

C) la fonction F est définie par $F(x) = \pi e^{-2\pi x}$ pour tout x réel

D) la fonction F est définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \pi e^{-2\pi x}$

et sur $]-\infty, 0[$ par $F(x) = \pi e^{2\pi x}$

car la fonction F est de limite nulle à l'infini, continue et de valeur π en 0

PARTIE III

n désigne un entier naturel, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et e désigne la fonction exponentielle.

On considère la suite (u_n) définie par

pour tout n entier naturel non nul

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

Pour x réel strictement positif, on considère l'application g_x définie par $g_x(t) = (\ln(t))/(t^x)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $I =]0, +\infty[$

33) On établit, en utilisant les notations de Landau, que

A) $u_{n+1} - u_n = (1/(2n^2)) + o(1/n^2)$

B) $u_{n+1} - u_n = (-1/(2n^2)) + o(1/n^2)$

C) la suite (u_n) converge car elle est de même nature que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ dont on montre la convergence, par application du critère des équivalents, comme série à termes positifs à partir d'un certain rang

D) la suite (u_n) diverge

34) La fonction g_x

- A) est dérivable sur I et sa dérivée est définie par $g_x'(t) = 1/t^{x+1}$ pour tout t appartenant à I
- B) est dérivable sur I et sa dérivée est définie par $g_x'(t) = (1-x\ln(t))/t^{x+1}$ pour tout t appartenant à I
- C) est croissante sur I
- D) est croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$

35) On pose, pour tout n entier naturel non nul $r_n = (\ln n)/n$. On déduit de la question précédente que

- A) pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $\int_n^{n+1} g_1(t) dt \leq r_n \leq \int_{n-1}^n g_1(t) dt$
- B) pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $\int_{n-1}^n g_1(t) dt \leq r_n \leq \int_n^{n+1} g_1(t) dt$
- C) pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a $r_n \leq ((\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2)/2$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 on a $((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)/2 \leq r_n$
- D) pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a $((\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2)/2 \leq r_n \leq ((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)/2$

36) La série de terme général $(-1)^n r_n$, n entier naturel non nul

- A) est divergente
- B) est une série alternée absolument convergente
- C) est, d'après le critère spécial des séries alternées, convergente car la suite (r_n) est à termes positifs, décroissante à partir du rang 3 et de limite nulle
- D) n'est pas absolument convergente car pour tout n entier supérieur ou égal à 3, r_n est minoré par $1/n$, terme général d'une série positive divergente

37) Pour n , entier naturel non nul, on considère les fonctions v_n et w_n définies sur

l'intervalle $J = [1, +\infty[$ respectivement par

$$v_n(x) = (1/n^x) - (1/(n+1)^x) \quad \text{et} \quad w_n(x) = (1/n^x) - \int_n^{n+1} (1/t^x) dt. \quad \text{On a}$$

- A) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la dérivée v_n' de v_n est négative sur J car la fonction g_x décroît sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ puisque x est supérieur ou égal à 1
- B) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la dérivée v_n' de v_n est positive sur J car la fonction g_x croît sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ puisque x est supérieur ou égal à 1
- C) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la fonction v_n est croissante sur J
- D) pour tout entier n supérieur ou égal 3, la fonction v_n est croissante sur $[1, 3[$ et décroissante sur $[3, +\infty[$

38) La série de fonctions de terme général v_n , n entier naturel non nul,

- A) est divergente sur l'intervalle J
- B) est convergente sur J mais n'est pas absolument convergente sur cet intervalle J
- C) est normalement convergente sur J car pour tout n entier supérieur ou égal à 3 et pour tout x appartenant à J on a $0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = 1/(n(n+1))$ terme général d'une série numérique convergente
- D) ne converge pas normalement sur J

39) Pour tout n entier naturel non nul, la fonction w_n

- A) est continue sur $]1, +\infty[$ mais n'est pas continue sur J
- B) est continue sur J car la fonction $((n+1)^u - n^u)/u$ tend vers $\ln(n+1) - \ln n$ quand u tend vers 0
- C) vérifie, pour tout x appartenant à J , $0 \leq v_n(x) \leq w_n(x)$
- D) vérifie, pour tout x appartenant à J , $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$ car, pour x supérieur ou égal à 1, la fonction $1/t^x$ décroît sur l'intervalle $[n, n+1]$

40) La série de fonctions de terme général w_n , n entier naturel non nul

- A) est divergente sur l'intervalle J
- B) est normalement convergente sur $]1, +\infty[$ car pour tout n entier supérieur ou égal à 3 et pour tout x appartenant à $]1, +\infty[$ on a $0 \leq w_n(x) \leq 1/(n(n+1))$, mais elle ne converge pas au point $x=1$
- C) a pour somme une fonction W continue sur J comme somme d'une série de fonctions continues et normalement convergente sur J
- D) a pour somme une fonction W continue sur $]1, +\infty[$ mais qui n'est pas continue sur J

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

Session 2011

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



Épreuve commune obligatoire de PHYSIQUE

Durée : 4 heures

Coefficient : 2



Ce sujet comporte :

- 1 page de garde
- 2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
- 1 page d'avertissements
- 13 pages de texte recto/verso



CALCULATRICE NON AUTORISÉE