PARTIE I

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.

On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$$

On désigne par $\inf\limits_{n \geq p} x_n$ (resp. $\sup\limits_{n \geq p} x_n$) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{x_n / n \geq p\}$

Question 1

La suite de terme général $\inf\limits_{p \geq n} x_p$, $n \in \mathbb{N}$, est

a) convergente car décroissante et minorée
b) croissante et majorée mais divergente car elle n'est pas de signe constant
c) croissante, minorée et convergente
d) convergente car toute suite bornée converge.

Question 2

La suite $(\inf\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$ est

a) décroissante et minorée car elle a les mêmes propriétés que la suite $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$
b) croissante et majorée donc convergente
c) divergente car la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge
d) minorée et convergente

Question 3

Les limites des suites $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\inf\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient, si elles existent

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p)$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p)$

et celles des suites $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} -y_p) \geq -\lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) \geq -\lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

Question 4

On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = (-1)^n$. On a alors

a) $y_n = 0$ si n est impair et $y_n = \frac{1}{n+1}$ si n est pair

b) $y_n = -\frac{1}{n+1}$ si n est impair et $y_n = 0$ si n est pair

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) < \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p) = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) < \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

Question 5

On peut avoir pour certaines suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente et $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente et $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente

et pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a l'équivalence

c) $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow [(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes$]$

d) $[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow [(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite$]$

Soit A un nombre réel non nul, α un élément de l'intervalle $]1, +\infty[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0 et vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n = A$ où $\theta_n = u_n^{1-\alpha} - u_{n+1}\, u_n^{-\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Question 6

On a nécessairement

a) $A < 0$

b) $A > 0$

et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) est convergente et a pour limite $(1-\alpha)\, A$

d) est divergente car $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = [(1 - \theta_n u_n^{\alpha - 1})^{1-\alpha} - 1]u_n^{1-\alpha}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{1-\alpha} = +\infty$

Question 7

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ et $y_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) a pour limite $(\alpha - 1)A$ car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\alpha - 1)A$

b) a pour limite $(1 - \alpha)A$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite

c) $n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

d) $[(1-\alpha)A]^{\frac{1}{1-\alpha}}\, n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Question 8

La série numérique de terme général $n^{\frac{1}{1-\beta}}$, $\beta \in \mathbb{R}$, converge si et seulement si

a) $\beta < 2$
b) $\beta < 0$

et la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

c) converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$ car $u_n \sim [(\alpha - 1)A]^{\frac{1}{1-\alpha}} \; n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

d) diverge car $u_n \sim [(\alpha - 1)A]^{\frac{1}{1-\alpha}} \; n^{\frac{1}{1-\alpha}}$ avec $\alpha > 1$

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 > 0$ donné

Question 9

Considérant le cas général d'une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, la convergence vers 0 de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

a) une condition nécessaire de convergence de la série
b) une condition suffisante de convergence de la série

Pour que la fonction f s'annule en 0

c) il est nécessaire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
d) il suffit que la série de terme général v_n converge

On suppose désormais que $f(0) = 0$

Question 10

Si la fonction f est telle que $|f'(0)| < 1$ alors pour tout $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'(0)| < k < 1$ on a

a) $f(x) \leq k|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge absolument pour tout $v_o > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n| \leq k^n v_o$

c) il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $v_o \in]0,\eta[\quad |v_n| \leq k^n v_o \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge

d) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge pour tout $v_o > 0$

Question 11

Si la fonction f est telle que $|f'(0)| > 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

a) est divergente
b) est convergente
c) est convergente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $v_p = 0$
d) est convergente si et seulement si elle est absolument convergente

Question 12

On suppose dans cette question que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie de plus les conditions suivantes : i) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |v_{n+1}| \leq |v_n|$

ii) $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

et que la fonction f vérifie $f'(0) = -1$. On a alors

a) $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in]-\eta,\eta[- \{0\} \quad \frac{f(x)}{x} < 0$

et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

b) est convergente d'après le critère des séries alternées
c) ne peut être absolument convergente
d) est divergente

On suppose dans les questions 13 à 15 et 17 à 19 que $f'(0) = 1$ et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et converge vers 0.

Question 13

Soit p et q 2 réels tels que $p > q > 0$. On a

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < v_n^p < v_n^q$

b) $0 < v_n^q < v_n^p$ à partir d'un certain rang n_o

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^q$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^p$ converge

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^q$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^p$ diverge

Question 14

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0. On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n = 1 - \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. On a alors pour tout n entier naturel

a) $\gamma_n < 0$

b) $\gamma_n \geq 0$

c) $x_{n+1} = x_o(1-\gamma_o)(1-\gamma_1)......(1-\gamma_{n+1})$

d) $\ell n|x_{n+1}| = \ell n|x_o| + \sum_{k=0}^{n} \ell n|1-\gamma_k|$

Question 15

La série de terme général $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - 1$

a) est de même nature que la suite $(\ell n|x_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$

b) est convergente

c) est divergente car $1 - \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ est équivalent à $\ell n|1-\gamma_n|$

d) est divergente car la suite des sommes partielles n'est pas minorée

Question 16

On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $v_o > 0$ donné et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{ch\ v_n}$.

Cette suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) est convergente car croissante et majorée
b) est décroissante et minorée donc convergente et de limite non nulle

et la série de terme général v_n

c) diverge puisque v_n^2 est équivalent à $2\left(1 - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ terme général d'une série divergente
d) diverge car la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0

Question 17

α étant un réel strictement supérieur à 1 et a un réel strictement positif, on suppose que la fonction $(x - f(x))x^{-\alpha}$ tend vers a lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Alors la série de terme général v_n^p où $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n)$

a) converge si et seulement si $1 < \alpha < p + 1$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^p$ est de même nature que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\frac{p}{1-\alpha}}$

b) diverge pour tout $\alpha > 1$ car v_n^p est équivalent à $[(\alpha - 1)a]^{\frac{p}{1-\alpha}} \ n^{\frac{p}{1-\alpha}}$
c) converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$
d) diverge pour $\alpha \geq p + 1$ car v_n^p est équivalent à $[(\alpha - 1)a]^{\frac{p}{1-\alpha}} \ n^{\frac{p}{1-\alpha}}$

Question 18

Si f est la fonction Arctan et si $\alpha = 3$ alors la fonction $(x - f(x))x^{-\alpha}$ a pour limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures

a) $\frac{1}{6}$ car Arctan $x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

b) $\frac{1}{3}$ car Arctan $x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

et la série de terme général v_n^2 où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $\left| \begin{array}{l} v_o > 0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f(v_n) \end{array} \right.$

c) diverge car la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0

d) diverge car v_n^2 et $\frac{3}{2n}$ sont équivalentes

Question 19

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est k fois dérivable en 0 et vérifie $\forall p \in \{2, 3, ..., k-1\} \quad f^{(p)}(o) = 0$ et $f^{(k)}(o) < 0$

On a alors

a) $\lim\limits_{x \to 0} (x - f(x))x^{-k} = -\frac{1}{k} f^{(k)}(o) > 0$

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge car $\alpha = k \geq 2$

et dans le cas particulier où $f(x) = \frac{x}{chx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, on a

c) $k = 3$ car $f''(o) = 0$ et $f^{(3)}(o) = -1$

d) $k = 3$ car $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

On considère l'équation différentielle

$$(E)\quad x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$$

Question 20

Si l'on note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de *(E)* développable en série entière de rayon de convergence R, les coefficients du développement vérifient

a) $(n(n-1) - 2n + 2 - x^2)a_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

b) $(n-1)(n-2)a_n = a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$ et a_0, a_1 arbitraires

c) $(n-1)(n-2)a_n = a_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0$

d) $(n-1)(n-2)a_n = a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$ et $a_0 = 0$; a_1, a_2 arbitraires

Question 21

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients du développement est définie par :

a) $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}$

b) $a_{2p} = \dfrac{a_2}{(2p)!}$ et $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p+1)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ et $a_o = 0$

c) $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}$ et $a_{2p} = \dfrac{a_2}{(2p-1)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ et $a_o = 0$

d) $a_n = \dfrac{a_1}{(n-1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $a_o = 0$

Question 22

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence R

a) $R = 0$

b) $R = +\infty$ car $\lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$

et a pour somme pour tout $x \in \left]-R, R\right[$

c) $a_2 x\,ch x + a_1 x\,sh x$

d) $a_1 ch x + a_2 sh x$

PARTIE II

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui au triplet (x, y, z) associe le triplet $(y\sin\varphi + z\sin 2\varphi, x\sin\varphi + z\sin 2\varphi, x\sin 2\varphi + y\sin\varphi)$ où φ est un nombre réel fixé.

Question 26

La matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$

et l'endomorphisme f

c) est bijectif pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$ car $\det A \neq 0$

d) ne peut être bijectif car $\det A = 0$ puisque les coefficients diagonaux sont tous nuls

Question 27

Le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de A peut s'écrire

a) $\chi_A(\lambda) = (-\lambda - \sin 2\varphi) \begin{bmatrix} -\lambda & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & -\lambda & \sin 2\varphi \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\chi_A(\lambda) = (-\lambda - \sin 2\varphi) \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ 0 & -\lambda & \sin\varphi \\ -1 & \sin 2\varphi & -\lambda \end{bmatrix}$

c) $\chi_A(\lambda) = (\lambda + \sin 2\varphi)(\lambda + \sin\varphi) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & \sin\varphi + \sin 2\varphi \end{bmatrix}$

d) $\chi_A(\lambda) = (\lambda + \sin\varphi)(\lambda + \sin 2\varphi)(\sin\varphi + \sin 2\varphi - \lambda)$

Question 28

Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont, pour tout φ réel

a) $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$ et $\sin\varphi + \sin 2\varphi$

b) 0 valeur propre triple

c) distinctes 2 à 2

d) nécessairement non nulles car f est bijectif

Question 23

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle *(E)* définies sur $\mathbb{R}$

a) est vide

b) est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par xe^x

c) est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $xchx$ et shx

d) est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par chx et shx

Soit $(\lambda\ ,\ \mu)$ un couple de réels et φ la solution de *(E)* vérifiant, si elle existe, $\varphi'(o) = \lambda$ et $\varphi''(o) = 2\mu$ On définit alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $x_o > 0$ donné et $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Question 24

On a alors pour tout x réel

a) $\varphi(x) = \lambda xshx + \mu xchx$

b) $\varphi(x) = \lambda xchx + \mu xshx$

et on peut avoir simultanément $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite non stationnaire à termes positifs convergeant vers 0 et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ série convergente

c) pour tout λ réel

d) uniquement lorsque $0 \leq \lambda \leq 1$

Question 25

On suppose dans cette question que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non stationnaire, à termes positifs, convergente vers 0, que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est convergente et que $\lambda = 0$

On doit avoir

a) $\mu < 0$

b) $\mu > 0$

c) $x_o \in]0, \alpha[$ où α est tel que $\mu sh\alpha = 1$

d) $x_o \in \mathbb{R}_+$

Question 29

L'ensemble I des réels φ tels que A soit une matrice symétrique est

a) $I = \pi\mathbb{Z}$

b) vide

c) $I = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \pi\mathbb{Z}$

d) $I = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \pi\mathbb{Z}$

Question 30

Dans le cas particulier où $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ les valeurs propres de f sont

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ double et $\sqrt{3}$ simple

b) 0 triple

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 0 valeurs propres simples

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ double et $-\sqrt{3}$ simple

Question 31

Toujours dans le cas particulier où $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ on a

a) $\dim \operatorname{Ker}\left(f + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{id}\right) = 2$ car A étant symétrique f est diagonalisable

b) $\operatorname{rg}\left(f + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{id}\right) = 1$

c) $\operatorname{rg}\left(f - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{id}\right) = 2$ car $A - \frac{\sqrt{3}}{2} I = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) f non diagonalisable

Question 32

On suppose dans cette question que φ est un réel vérifiant la relation
$\sin 2\varphi = -\sin\varphi - \sin 2\varphi$ (1). On a alors

a) $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ ou $\varphi = Arc\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$ car (1) $\Leftrightarrow \sin\varphi(1+4\cos\varphi) = 0$

b) Pour $\varphi = Arc\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$ les valeurs propres de f sont $\frac{\sqrt{15}}{4}$ simple et $\frac{\sqrt{15}}{8}$ double

c) f est diagonalisable uniquement pour $\varphi = 0$

d) f n'est pas diagonalisable pour $\varphi = Arc\cos\left(-\frac{1}{4}\right)$ tel que $\varphi \in [0, \pi]$ car

$$rg\left(A - \frac{\sqrt{15}}{8}I\right) = 2$$

Question 33

On suppose dans cette question que φ est un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que A soit une matrice non nulle et symétrique. Alors le système différentiel (S) $X' = AX$ est équivalent au système différentiel

a) $\begin{cases} u' = \sqrt{3}u \\ v' = -\frac{\sqrt{3}}{2}v \\ w' = -\frac{\sqrt{3}}{2}w \end{cases}$

b) $U' = PAP^{-1}U$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres choisie

et (S) a pour solution générale ; C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires

c) $C_1 e^{\sqrt{3}t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + C_3 e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

d) $C_1 e^{-\sqrt{3}t}\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + C_3 e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

PARTIE III

x étant un nombre réel fixé, on considère la fonction f qui à t associe $\dfrac{1}{1+t^x}$

Question 34
La fonction f est

a) définie et continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
b) définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout x réel
c) définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout x réel
d) intégrable sur tout segment de l'intervalle $[0, +\infty[$ pour tout x réel

Question 35
Dans cette question on suppose que $x \in \,]-\infty, 0]$, alors la fonction f

a) est minorée par $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$
b) est majorée par $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$

c) est absolument convergente car f est positive, continue sur $[1, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$
d) est divergente

Question 36
On suppose dans cette question $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est alors

a) absolument convergente car $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$
b) divergente
c) absolument convergente uniquement pour $x \in [1, +\infty[$
d) absolument convergente pour $x \in \,]1, +\infty[$ et divergente pour $x \leq 1$

On définit, lorsqu'elle existe, la fonction F par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$

On note I l'ensemble sur lequel F est définie.

Question 37

Soit g la fonction qui au couple (x, t) associe $\dfrac{1}{1+t^x}$.

La continuité des applications $x \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto g(x, t)$ sur les intervalles I_1 et I_2 respectivement

a) est une condition nécessaire et suffisante de continuité de g sur $I_1 \times I_2$

b) est une condition suffisante mais non nécessaire de continuité de g sur $I_1 \times I_2$

c) est une condition nécessaire mais non suffisante de continuité de g sur $I_1 \times I_2$

d) n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de continuité de g sur $I_1 \times I_2$

Question 38

La fonction g définie à la question précédente est

a) continue sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

b) continue uniquement sur $]1, +\infty[\times [0, +\infty[$

et la fonction F est continue

c) sur $[1, +\infty[$ puisque g est continue sur $[1, +\infty[\times [0, +\infty[$ et vérifie $|g(x, t)| \le \dfrac{1}{1+t}$ $\quad \forall (x, t) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty[$

d) sur $]0, +\infty[$ puisque g est continue sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Question 39

On a pour les limites de F aux bornes de son intervalle de définition

a) $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1} F(x) = F(1)$ car F est continue en 1

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ car $\left| \begin{array}{l} 0 \le \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} \le \frac{1}{x-1} \\ \text{et} \\ 0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^x} \le \frac{1}{x+1} \end{array} \right.$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+t^x} = 0$

Question 40

Pour $x \in I$ on a

a) $\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kx}$ car $\frac{1}{1+t^x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{kx} + (-1)^n \frac{t^{nx}}{1+t^x} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 \frac{u^{x-2}}{1+u^x} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kx-1}$

c) $F(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2x^2-1}$

d) $F(x) = 2x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(-1)^k}{k^2x^2-1}$