PARTIE I

$a_0 b_1 + b_1 a_0$

Pour x et z réels, on pose : $\Phi(z,x) = z\, e^{zx}/(e^{z}-1)$ si z est différent de 0 et $\Phi(z,x) = 1$ si $z = 0$. Soit une série entière complexe de terme général $a_n Z^n$, pour n entier naturel, de rayon de convergence R, réel strictement positif et telle que $a_0 = 1$. On note $f(Z)$ la somme de cette série entière lorsque $\lvert Z\rvert < R$, Z appartenant à $\mathbf{C}$, $\lvert Z\rvert$ désignant le module de Z. On introduit la suite b_n définie par $b_0 = 1$ et $a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots\ldots + a_n\, b_0 = 0$ pour tout n entier strictement positif.

A B

bornée $f(r)$

Question 1 : On considère un réel r dans l'intervalle $]0, R[$, on établit que

a) la série numérique de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente

b) il existe une constante M strictement positive telle que $\lvert a_n\rvert \le M/r^n$ pour tout entier naturel n

c) pour tout réel K strictement positif on a, pour tout entier naturel n, $(K/r^n) \le \lvert a_n\rvert$

d) ~~la série numérique de terme général $a_n r^n$ converge mais n'est pas absolument convergente~~

D

Question 2 : r désignant toujours un réel de l'intervalle $]0, R[$, on a

a) pout tout M strictement positif et pour tout entier naturel n, $\cancel{\lvert b_n\rvert \le ((M+1)/r)^n}$

b) pour tout M strictement positif et pour tout entier naturel n, $\cancel{\lvert b_n\rvert > ((M+1)/r)^n}$ $n=0$

c) il existe M strictement positif tel que $0 < \cancel{\lvert b_n\rvert t^n} \le (t(M+1)/r)^n$ pour tout t réel strictement positif et inférieur ou égal à $r/(M+1)$, pour tout entier naturel n

d) la suite de terme général $b_n r^n$ est majorée par une suite géométrique

B

Question 3 : r étant toujours un réel fixé dans l'intervalle]0, R[, on obtient

a) le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est nul

b) le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est supérieur à $r/(M+1)$ pour tout M strictement positif

c) le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n Z^n$ est égal à 1

d) il n'existe pas de disque ouvert D(O, ρ), de centre O et de rayon strictement positif ρ dans lequel on ait $\boxed{f(Z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n = 1}$

D

Question 4 : On considère la fonction φ définie sur IR par :

$\varphi(z) = (e^z - 1)/z$ si z est différent de 0 et $\varphi(0) = 1$. On établit que

a) la ~~fonction φ n'est pas développable~~ en série entière sur IR

b) la fonction φ admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général $\cancel{z^n/n!}$ pour n entier strictement positif

c) la fonction φ admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général $\cancel{z^{n-1}/(n-1)}!$ pour n entier strictement positif

d) la fonction φ admet un développement en série entière au voisinage de 0 de terme général $z^{n-1}/n!$ pour n entier strictement positif

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{\cancel{1} + z - \cancel{1}}{z}$$

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$$

Question 5 : On suppose qu'il existe un réel strictement positif α tel que sur le disque ouvert D(O, α), de centre O et de rayon α, la série entière complexe de terme général $u_n Z^n$, pour n entier naturel, converge et a pour somme la fonction ψ définie par $\psi(Z)=Z/(e^Z-1)$ si Z est différent de 0 et $\psi(0)=1$ et l'on note Ψ la fonction définie par $\Psi(Z)=e^{Zx}\psi(Z)$ pour tout x réel,

B D

a) α est inférieur ou égal à 2π

b) α peut être strictement supérieur à 2π

c) pour tout x réel et tout Z complexe appartenant à D(O, α) on a

$$\Psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n x^n u_n Z^n/(n-1)!$$

d) pour tout x réel et tout Z complexe appartenant à D(O, α) on a

$$\Psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=n} Z^q x^q u_p Z^p/q! \Big)$$

Question 6 : Considérant la fonction Φ, on cherche à développer en série entière au voisinage de 0, la fonction, dépendant du paramètre réel x, qui à z réel associe $\Phi(z,x)$, si cela est possible, sous la forme

B C

(1) $$\Phi(z,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x)\, z^n/\, n!$$ On établit que

a) ~~il n'existe pas de suite de fonctions B_n, n entier strictement positif, telle que (1) soit vérifiée~~

b) il existe une suite de fonctions polynômes B_n, n entier strictement positif, à coefficients réels telle que (1) soit vérifiée

B => c

c) il existe une suite de fonctions polynômes B_n, n entier strictement positif, à coefficients complexes non réels telle que (1) soit vérifiée

d) une telle suite B_n est définie pour tout entier strictement positif n, par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (n!/k!)\, u_{n-k} x^k \text{ où } u_0=1 \text{ et } u_n+\ldots+u_0/((n+1)!)=0 \text{ pour tout } n \text{ strictement positif}$$

Tournez la page S.V.P.

Question 7 : La suite de terme général B_n définie dans la question précédente, si elle existe, vérifie pour tout x réel et pour tout entier strictement positif n

a) ~~$B_n(-x) = - B_n(x)$~~

b) $B_n(1-x) = - B_n(x)$

c) ~~$B_n(-x) = B_n(x)$~~

d) ~~$B_n(1-x) = (-1)^{n+1} B_n(x)$~~

~~B~~ E

Question 8 : Pour tout x réel et pour tout n entier strictement positif, on a, si la suite de terme général B_n, définie dans la question 6 par l'égalité (1), existe

a) $B_n(1+x) = B_n(x)$

b) $B_n(1+x) = (-1)^n B_n(x)$

c) $B_n(1+x) + B_n(x) = n\,x^{n-1}$

d) $B_n(1+x) - B_n(x) = n\,x^{n-1}$

Question 9 : On a, pour tout x réel, si la suite de fonctions B_n, définie dans la question 6 par l'égalité (1), existe,

~~A~~ B, D

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

a) ~~$B_1(x)= x-(1/2)$~~ et ~~$B_2(x)= (x^2- x)/2$~~

b) $B_4(x)= x^4-2x^3+ x^2-(1/30)$ et $B_5(x)= x^5-(5x^4/2)+(5x^3/3) -(x/6)$

c) $B_1(x)= x-(1/2)$ et ~~$B_3(x)= x^3+(3x^2/2) -(x/2)$~~

d) $B_2(x)= x^2-x+(1/6)$ et $B_3(x)= x^3-(3x^2/2)+(x/2)$

Question 10 : On considère toujours, si elles existent, les fonctions B_n définies dans la question 6 par l'égalité (1)

E

a) ~~pour tout n entier strictement positif on a $B_n(0) = 0$~~

b) pour tout q entier naturel on a $B_{2q+1}(0) = 0$ car pour tout x réel et pour tout n, entier strictement positif, $(-1)^n B_n(-x)= n\,x^{n-1} + B_n(x)$

c) pour tout q entier naturel non nul, $B_{2q+1}(0) = 0$ car pour tout n entier supérieur ou égal à 2 on a $B_n(0) = (-1)^n B_n(0)$

d) pour tout q entier strictement positif on a $B_{2q}(0) = 0$ car pour tout x réel et pour tout entier strictement positif n, $-B_n(-x)= n\,x^{n-1} + B_n(x)$

Question 11 : Reprenant la caractérisation des fonctions B_n donnée dans la question 6 par l'égalité (1), on obtient pour tout x réel, B'_n désignant la dérivée de la fonction B_n

a) B_n n'est dérivable pour aucun entier naturel n B

b) $B'_n(x) = n\, B_{n-1}(x)$ pour tout n entier supérieur ou égal à 2

c) $B'_n(x) = n\, B_{n+1}(x)$ pour tout n entier supérieur ou égal à 1

d) $B'_n(x) = (1/(n+1))\, B_{n+1}(x)$ pour tout n entier supérieur ou égal à 1

g1

On désigne par g_n, n étant un nombre entier supérieur ou égal à 2, la fonction de IR dans IR, périodique de période 1, coïncidant sur le segment [0,1] avec, lorsqu'elle existe, la fonction B_n définie dans la question 6 par la relation (1).

Bn

Question 12 : Les fonctions g_n, ainsi définies, sont telles que A

1 gn

a) g_n est continue et de classe C^1 par morceaux sur IR pour tout n entier supérieur ou égal à 2 et, pour tout entier p strictement positif, la suite $c_k(g_{2p+1})$, des coefficients de Fourier de g_{2p+1}, est négligeable devant $1/|k|$ à l'infini, car g_{2p+1} est de classe C^1 sur IR

b) g_n est de classe C^1 sur IR pour tout n entier supérieur ou égal à 2, car g_n est 1-périodique et $g_n(1) = B_n(1) = B_n(0) = g_n(0)$

c) pour tout entier p strictement positif, g_{2p} est de classe C^1 sur IR et g_{2p+1} est continue sur IR mais n'est pas de classe C^1 sur IR

d) pour tout entier p strictement positif, g_{2p} et g_{2p+1} sont continues sur IR mais seulement de classe C^1 par morceaux sur IR

Question 13 : Les fonctions g_n vérifient C

a) pour tout n entier supérieur ou égal à 2, g_n est une fonction paire

b) pour tout n entier supérieur ou égal à 2, g_n est une fonction impaire

c) pour tout entier p strictement positif et pour tout x élément du segment [0,1]

$$g_{2p}(x) = g_{2p}(1-x) = g_{2p}(-x) \quad \text{et} \quad g_{2p+1}(x) = -\,g_{2p+1}(1-x) = -\,g_{2p+1}(-x)$$

d) pour tout entier p strictement positif et pour tout x élément du segment [0,1]

$$g_{2p}(x) = -g_{2p}(1-x) = -g_{2p}(-x) \quad \text{et} \quad g_{2p+1}(x) = g_{2p+1}(1-x) = g_{2p+1}(-x)$$

Question 14 : Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, la suite $(S_p(g_n))$, p entier naturel, des sommes partielles associée à la série de Fourier de la fonction g_n B

a) converge en moyenne quadratique vers la fonction g_n sur le segment [0,1]

b) converge en moyenne quadratique vers la fonction g_n sur IR

c) converge normalement donc uniformément vers la fonction g_n sur IR car g_n est continue et de classe C^1 par morceaux sur IR ?

d) converge uniformément vers la fonction g_n sur IR, mais ne converge pas normalement sur IR car g_n n'est pas de classe C^1 sur IR

Question 15 : Le développement en série de Fourier, suivant les fonctions sinus et cosinus, de la fonction g_n, pour n entier supérieur ou égal à 2, est définie pour tout x réel par : B D ?

a) $g_n(x) = (a_0/2) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos(2\pi kx) + b_k\sin(2\pi kx)\right)$ avec $a_0=0$, $a_k=(-1)^{n+1}2n!/(2\pi k)^n= b_k$ pour tout $k>0$

b) $g_{2p}(x)=(a_0/2)+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(2\pi kx)$ avec $a_k=(-1)^{p+1}(2p)!/(2\pi k)^{2p}$ pour tout $k>0$ et $a_0=0$ pour $p>0$

c) $g_{2p}(x)=(a_0/2)+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(kx)$ avec $a_k=(-1)^{p+1}(2p)!/(\pi k^{2p})$ pour tout $k>0$ et $a_0=0$ pour $p>0$

d) $g_{2p+1}(x)= \sum_{k=0}^{\infty} b_k\sin(2\pi kx)$ avec $b_k=(-1)^{p+1}2(2p+1)!/(2\pi k)^{2p+1}$ pour tout $k>0$, pour $p> 0$

On pose, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, $\beta_p = (-1)^{p+1}\, B_{2p}(0)$ où B_{2p} est un terme de la suite de fonctions définie, si elle existe, dans la question 6 par la relation (1).

On considère la fonction ζ, somme, lorsqu'elle existe, de la série de fonctions réelles de la variable réelle t, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)$ où $v_n(t) = 1/n^t$ pour tout n entier strictement positif.

Question 16 : La fonction ζ B C

a) ~~n'est définie en~~ aucun point t de IR

b) est définie sur l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$ car la série numérique de terme général $1/n^\gamma$ converge si et seulement si $\gamma>1$ Oui

c) est de classe C^1 sur l'intervalle $]1, +\infty[$ car la série de terme général v_n est une série de fonctions de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, convergeant simplement sur cet intervalle et telle que la série de terme général $v'_n(t) = (-\ln n)/n^t$ converge normalement donc uniformément sur l'intervalle $]1, +\infty[$ Oui

d) est de classe C^∞ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ car on établit, par application du théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, qu'elle est de classe C^∞ sur tout segment [a,b] de l'intervalle $]1, +\infty[$ Oui

Question 17 : La fonction ζ, si elle est définie, tend vers A D

a) $+\infty$ lorsque t tend vers 1 Oui

b) ~~0 lorsque~~ t tend vers 1

c) ~~0 lorsque~~ t tend vers $+\infty$

d) 1 lorsque t tend vers $+\infty$ car $0<\sum_{n=2}^{\infty} v_n(t) \le \{2/(t(t-1))\}\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n-1)^2$ fonction qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n(t) \le \frac{2}{t(t-1)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\frac{1}{n^t} \le \frac{2}{t(t-1)(n-1)^2} \qquad \frac{1}{n^3} \le \frac{2}{3}\frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{(n-1)^2}$$

Tournez la page S.V.P.

A

Question 18 : On obtient alors

a) pour tout entier p supérieur ou égal à 1, $\zeta(2p) = (2\pi)^{2p}\ \beta_p/(2(2p)!)$

b) pour tout entier p supérieur ou égal à 1, $\zeta(2p) = (2\pi)^{2p}\ \beta_p/((2p)!)$

c) lorsque p tend vers $+\infty$, β_p est équivalent à $4\sqrt{p\pi}\ (p/\pi e)^{2p}$ d'après la formule de Stirling

d) lorsque p tend vers $+\infty$, β_p est équivalent à $2\sqrt{p\pi}\ (p/\pi e)^{2p}$ d'après la formule de Stirling

$2\sqrt{2p\pi}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}$

On considère la fonction g_1 de IR dans IR, périodique de période 1, telle que $g_1(0) = g_1(1) = 0$ et coïncidant sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ avec la fonction polynôme $x-(1/2)$

B

Question 19 : La fonction g_1

a) est continue sur IR et de classe C^1 par morceaux sur IR

b) n'est pas continue sur IR mais est de classe C^1 par morceaux sur IR

c) est paire

d) est de classe C^1 sur $[0,1]$ car la fonction polynôme $x-(1/2)$ est de classe C^∞ sur IR

Question 20 : La suite $(S_p(g_1))$, p entier naturel, des sommes partielles associées à la série de Fourier de la fonction g_1

A D

a) converge en moyenne quadratique vers la fonction g_1 sur le segment $[0,1]$

b) converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$

c) ne converge simplement vers la fonction g_1 que sur les intervalles ouverts de la forme $]r, r+1[$ où r est un entier relatif quelconque

d) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car la fonction g_1, somme de la série de fonctions continues sur $[0,1]$ de terme général $-(\sin(2\pi kx))/(k\pi)$, n'est pas continue au point 0

c

a

Question 21 : Le développement en série de Fourier de la fonction g_1 s'écrit sous la forme

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(2\pi n x))/(n\pi)$

b) $-\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(nx))/(n\pi)$

c) $-\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n\pi x))/(n\pi)$

d) $-\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(2\pi n x))/(n\pi)$

$g_1 = -\sum \frac{\sin 2\pi n x}{n\pi}$

E

$G_N \xrightarrow[N]{} -g_1 \pi$ $\qquad \frac{G_N}{\pi} \to -g_1$

$h_N(x) = h(x)\frac{G_N(x)}{\pi} \to -h g_1$

$\sum \frac{\sin 2\pi n x}{n} \leq K$

Question 22 : On suppose dans cette question l'existence d'une constante K strictement positive telle que pour tout N entier supérieur ou égal à 1et pour tout x appartenant à [0,1]

D

$G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (\sin(2\pi n x))/n$ vérifie $|G_N(x)| \leq$ K. On considère une fonction h, continue de [0,1] dans l'ensemble **C** des nombres complexes et on introduit (h_N), N entier supérieur ou égal à 1, la suite de fonctions de terme général $h_N(x) = h(x)\ G_N(x)/\pi$ pour tout x appartenant à [0,1].

a) la suite (h_N) converge simplement sur le segment [0,1] vers la fonction $h(x)((1/2)-x)$

b) la suite (h_N) converge simplement sur l'intervalle]0,1[vers la fonction $h(x)(x-(1/2))$

c) pour tout x appartenant à [0,1] et pour tout N entier strictement positif $|h_N(x)| \leq$ K

d) d'aprés le théorème de convergence dominée, la série numérique de terme général

$$(1/\pi n)\int_0^1 h(x)\sin(2\pi n x)\,dx, \text{ pour } n>0, \text{ converge et a pour somme } \int_0^1 h(x)((1/2)-x)\,dx$$

$\sum \int_0^1 h \frac{\sin 2\pi n x}{n\pi}$

$\to \int h(x)\left(\frac{1}{2} - x\right)$

$|h_N(x)| = |h(x)||G_N(x)| \leq K|h(x)|$

$\int \sum f \to \int f$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On considère la matrice A appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 13 à coefficients réels a_{ij} définie par $a_{ij} = 1$ si $i = 7$ ou $j = 7$
et $a_{ij} = 0$ sinon
On note f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{13})$ canoniquement associé à la matrice A c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_i)_{i=1,13}$ de $\mathbb{R}^{13}$ est A
IR désigne le corps des réels

Question 23 : L'endomorphisme f

A C

a) est un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{13}$ autoadjoint car la matrice A est symétrique réelle
~~b) n'est~~ pas diagonalisable
c) est diagonalisable dans une base orthonormale formée de vecteurs propres de f
~~d) est un~~ automorphisme

Question 24 : On a

E

a) 0 n'appartient pas au spectre de f
b) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 inférieure ou égale à 10 car
$$m_0 < \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 11$$
c) 0 est valeur propre de f de multiplicité m_0 strictement supérieure à 11 car
$$m_0 > \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 11$$
d) 0 est valeur propre de f de multiplicité $m_0 = 12$ car, f étant diagonalisable,
$$m_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 13 - \operatorname{rg} f = 12 \text{ puisque } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_7)$$

Question 25 : On note g la restriction de l'endomorphisme f au sous-espace $\operatorname{Im} f$
~~a) g n'est~~ pas définie
b) g est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_7, u)$ avec $u = e_1 + e_2 + \ldots\ldots + e_{13}$ oui
c) dans la base (e_7, u) de $\operatorname{Im} f$, où $u = e_1 + e_2 + \ldots\ldots + e_{13}$, la matrice de g s'écrit
$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
d) dans la base (e_7, u) de $\operatorname{Im} f$, où $u = e_1 + e_2 + \ldots\ldots + e_{13}$, la matrice de g s'écrit
$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B D

Question 26 : On note χ_g (respectivement χ_f) le polynôme caractéristique de g (respectivement f). On a

A C

$$\begin{pmatrix} X & 12 \\ 1 & X-1 \end{pmatrix} \quad X(X-1) - 12 \quad X^2 - X - 12$$

a) $\cancel{\chi_g(X)} = X^2 - X - 12$
~~b) $\chi_g(X)$~~ $= X^2 - 13X + 12$
c) $\chi_f(X) = X^{11}(X^2 - X - 12)$
d) $\chi_f(X) = X^{11}(-X^2 + 13X - 12)$

$\Delta = 1 + 4 \cdot 12 = 49$ 4 or -3

$\frac{+1+7}{2}$ $\frac{1-7}{2}$

Question 27 : On en déduit

B ~~D~~ C

a) le spectre de la matrice A est l'ensemble {0, 1, 12}

b) le spectre de la matrice A est l'ensemble {-3, 0, 4}

c) la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & (0) \\ 0 & -3 & \\ & (0) & (0) \end{pmatrix}$

U désignant la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres, (0) désignant la matrice dont tous les coefficients sont nuls

d) la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (0) \\ 0 & 12 & \\ & (0) & (0) \end{pmatrix}$

U désignant la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres, (0) désignant la matrice dont tous les coefficients sont nuls

$A^n = UD^nU^{-1} = UP_1^nU^{-1} + 12^n UP_2^nU^{-1}$

$A_1^n + 12^n P_2$

Question 28 : Pour tout n entier strictement positif, on obtient, en posant P_i, i= 1 ou 2, la matrice de $\mathcal{M}_{13}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $i^{ème}$ colonne qui est égal à 1 et en désignant par U la matrice de passage de la base canonique à la base, choisie, de vecteurs propres

a) $A^n = 4^nA_1 + (-3)^nA_2$ avec $A_1 = UP_1U^{-1}$ et $A_2 = UP_2U^{-1}$

b) $A^n = A_1 + 12^nA_2$ avec $A_1 = U^{-1}P_1U$ et $A_2 = U^{-1}P_2U$

c) $A^n = [((3/7)4^{n-1}) + ((4/7)(-3)^{n-1})]A + [((1/7)4^{n-1}) - ((1/7)(-3)^{n-1})]A^2$

d) $A^n = 4^nP_1 + (-3)^nP_2$

D

PARTIE III

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels **IR** et f un endomorphisme de E pour lequel il existe un polynôme P appartenant à **IR**[X], ensemble des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X, tel que

0 est racine de P, 0 n'est pas racine de P', P est un polynôme annulateur de f

P' désignant le polynôme dérivé de P.

IR(respectivement **C**) désigne le corps des réels(respectivement le corps des complexes)

Question 29 : Le polynôme P s'écrit

C

a) $P(X) = \cancel{X^2}Q(X)$ avec Q appartenant à **IR**[X]

b) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à **IR**[X] tel que ~~$Q(0) = 0$~~

c) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à **IR**[X] tel que $Q(0)$ est différent de 0

d) $P(X) = XQ(X)$ avec Q appartenant à **IR**[X] tel que ~~$Q'(0)$ est~~ différent de 0

Question 30 : Dans la suite, on note Q un polynôme de **IR**[X], diviseur de P, n'admettant pas 0 pour racine, alors

a) les polynômes X et Q sont ~~premiers~~ entre eux car leur ~~PGCD~~ est 1 F B

b) les polynômes X et Q ne sont pas premiers entre eux car ~~leur~~ PGCD est X

c) les polynômes X et Q sont premiers en~~tre eux car~~ leur ~~PGCD est~~ X

d) les polynômes X^2 et Q sont premiers entre eux puisqu'ils vérifient l'égalité de Bezout

Question 31 : On a alors pour un polynôme Q vérifiant $P = XQ$ B D

a) $E = \text{Ker} f^2 \oplus \text{Ker}\, Q(f)$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

b) $E = \text{Ker} f \oplus \text{Ker}\, Q(f)$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

c) $E = \cancel{\text{Im} f \oplus \text{Im}\, Q(f)}$ d'après le théorème de décomposition des noyaux

d) $f\,Q(f) = 0$ car $P(f) = 0$

Question 32 : Dans cette question et la suivante, on suppose E de dimension finie n, on a alors

a) $\dim \text{Ker}\, Q(f) \cancel{= n - \dim} \text{Ker} f^2$ B D

b) $\dim \text{Im}\, Q(f) = n - \dim \text{Im} f$

c) $\dim \text{Ker}\, Q(f) \cancel{= \dim \text{Im} f^2}$ d'aprés le théorème du rang

d) $\dim \text{Im}\, Q(f) = \dim \text{Ker} f$ d'aprés le théorème du rang $= n - \dim \text{Ker}\, Q f$

$= \dim \text{Ker} f$

Question 33 : B X

a) $\cancel{E = \text{Im} f \oplus \text{Ker}} f$ propriété vraie pour tout endomorphisme f de E

b) le sous-espace $\text{Im} f$ est inclus dans $\text{Ker}\, Q(f)$ car $Q(f)\text{o}f = f\text{o}Q(f) = P(f) = 0$ B

c) ~~le sous-espace~~ $\cancel{\text{Im} f^2}$ ~~est inclus dans~~ $\cancel{\text{Ker}\, Q(f)}$ ~~car~~ $\cancel{Q(f)\text{o}f^2 = f^2\text{o}Q(f) = P(f) = 0}$

d) $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ car $\cancel{\text{Ker}\, Q(f) = \text{Im} f}$ $= f \circ P(f)$

Question 34 : On suppose, dans cette question et la suivante, l'espace vectoriel E de dimension quelconque

~~a) Im~~ $\cancel{f}$ est inclus dans $\text{Ker}\, Q(f)$ car $Q(f) f = f Q(f) = P(f) = 0$ vrai

b) $\text{Im} f^2$ est inclus dans $\text{Ker}\, Q(f)$ car $Q(f)\text{o}f^2 = f^2\text{o}Q(f) = 0$ où o désigne la composition des applications vrai

c) Q est tel que $Q(X) = a + XQ_1(X)$ avec Q_1 appartenant à **IR**[X] et $a = Q(0)$ vrai BC

d) Q est tel que $Q(X) = XQ_2(X)$ avec Q_2 appartenant à **IR**[X] faux

Question 35 : On en déduit A D

a) $\text{Ker}\, Q(f)$ est inclus dans $\text{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\text{Ker}\, Q(f)$, on a $x = f(-(1/a)\, Q_1(f)(x))$, a étant non nul vrai

b) $\text{Ker}\, Q(f)$ est inclus dans $\text{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\text{Ker}\, Q(f)$, on a $x = f(-(1/a)\, \cancel{Q_1(f(x)))}$, a étant non nul

c) $\text{Ker}\, Q(f)$ est inclus dans $\text{Im} f$ car pour tout x appartenant à $\text{Ker}\, Q(f)$, on a $x = -(1/a)\, \cancel{f(x)\, Q_1(f)}(x)$, a étant non nul

d) $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$ car $\text{Ker}\, Q(f) = \text{Im} f$

$\text{Im} f \subset \text{Ker}\, Q f$

Question 36 : On suppose dorénavant l'espace vectoriel E de dimension n et f un endomorphisme de E pour lequel le polynôme P de **IR**[X] défini par $P(X) = X(X-1)^2$ est annulateur de f. On montre que

a) le spectre, dans **C**, de l'endomorphisme f contient strictement l'ensemble $\{0,1\}$
b) le spectre, dans **C**, de l'endomorphisme f est inclus dans l'ensemble $\{0,1\}$ B
c) le spectre, dans **C**, de l'endomorphisme f ne peut contenir 0
d) le spectre d'un endomorphisme défini sur un **IR**-espace vectoriel est nécessairement inclus dans **IR**

Question 37 : La trace de l'endomorphisme f B

a) est un nombre entier strictement positif
b) n'appartient pas nécessairement à l'ensemble des entiers
c) est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1
d) est nulle si et seulement si $f = 0$ car, dans le cas où la trace de f est nulle, 0 étant l'unique valeur propre de f, l'endomorphisme $f - \mathrm{id}$ est bijectif

et $f(f-\mathrm{id})^2 = 0$ entraine $f = 0$

PARTIE IV

On considère la fonction f, de la variable réelle t, définie sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par
$f(t) = (\ln(1+xt^2))/(t(1+t^2))$, x étant un paramètre réel
IR désigne l'ensemble des nombres réels

E

Question 38 : La fonction f

a) n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif
b) est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel positif car toute fonction continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et ayant une limite nulle en $+\infty$, est intégrable sur $[0,+\infty[$
c) n'est intégrable sur $]0,+\infty[$ que pour x réel strictement positif $\ln 1 = 0$
d) est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout x réel positif car la fonction f est positive, continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et majorée en $+\infty$ par $1/t^2$, fonction intégrable sur $]0,+\infty[$

int comme $o\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$

B

Question 39 : On note F la fonction qui au couple (x,t) associe $(\ln(1+xt^2))/(t(1+t^2))$. On a

~~a)~~ $F(x,t) = \phi(xt^2).(xt/(1+t^2))$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ où $\phi(u)= (\ln(1+u))/u$ pour tout u appartenant à $]1,+\infty[$

b) $F(x,t) = \phi(xt^2).(xt/(1+t^2))$ pour tout couple (x,t) appartenant à $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ où $\phi(u)= (\ln(1+u))/u$ pour tout u appartenant à $]-1,+\infty[$

~~c)~~ la fonction ψ définie sur $]-1,+\infty[$ par $\psi(u)= (\ln(1+u))/u$ pour u non nul et $\psi(0)= 1$ est développable en série entière au voisinage de 0 donc C^∞ sur $]-1,1[$ VaN

~~d) F~~ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[x[0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions de classe ~~C^1~~

1 C' 1 bC

Question 40 : La fonction g définie, si elle existe, par $g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est A

a) g est dérivable uniquement sur $]0,+\infty[$ car la fonction $|D_1F|$, D_1F désignant la dérivée partielle de F par rapport à x définie par $D_1F(x,t) = t/((1+xt^2)(1+t^2))$, ne peut être dominée sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par une fonction positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ que pour x appartenant à un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$

~~b) g est dérivable sur $[0,+\infty[$~~

c) ~~$g'(x)$~~ $= (\ln x)/(2(1-x))$ pour tout ~~x appartenant à $]0,+\infty[$~~ différent de 1 et $g'(1)=$ ~~$-1/2$~~ $g'(x) > 0$

~~d)~~ $g'(x) = (\ln x)/(2(x-1))$ pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$ différent de 1 et $g'(1)= 1/2$

g'

$\ln 1 = 0$

$b = -ax$

$a - ax = 1$

$a(1-x) = 1$

$a = \frac{1}{1-x}$ $b = \frac{+x}{x-1}$

un cpment OK

x fac...-Jac... C^0 en x ok

$|u_n(x)(t)| \leq g(t)$ int OK

$\frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)} = \int_{x=0}^{x} \frac{xt^4\,dt}{1+t^2}$ $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_2(t)$ int

$x \in a, b$

$\int_0^\varepsilon \frac{t}{1+t^2}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{t}{(1+t^2)(1+xt^2)} \leq \frac{t}{(1+at^2)(1+t^2)}$

$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\,dt \Rightarrow +\infty$

$x = 1+h$

$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+xt^2)} \xrightarrow[x\to 0]{}$ $\frac{\ln x}{1-x}$ $\frac{\ln 1+h}{1-1-h}$ $\int_0^\infty \frac{t\,dt}{1+2t^2+t^4}$

$\frac{at+d}{1+t^2} + \frac{bt+c}{1+xt^2} = \frac{(at+d)(1+xt^2)+tb(1+t^2)+c+ct^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}$

$= at + axt^3 + d + xdt^2 + bt + bt^3 + c + ct^2$

$at + axt^3$
$+ bt + bt^3$

$(a+b)t$
$+ d + c = 0$
$+ d + ct^2 = 0$
$+ \cancel{b} + a\cancel{x}t^3 = 0$

$a+b = 1$ ~~$a+b=1$~~

$ax + b = 0$ ~~$a+b=0$~~

$ax + b = 0$