J. 15 1232

**ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE** **Session 2015**

# CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

***Épreuve obligatoire de***

***MATHÉMATIQUES***

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Cette épreuve comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
11 pages de texte recto/verso

**L'USAGE DE CALCULATRICES, DE TELEPHONES PORTABLES OU DE DOCUMENTS PERSONNELS N'EST PAS AUTORISE**

**ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE** **ICNA 2015**

# ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

## A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve obligatoire de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

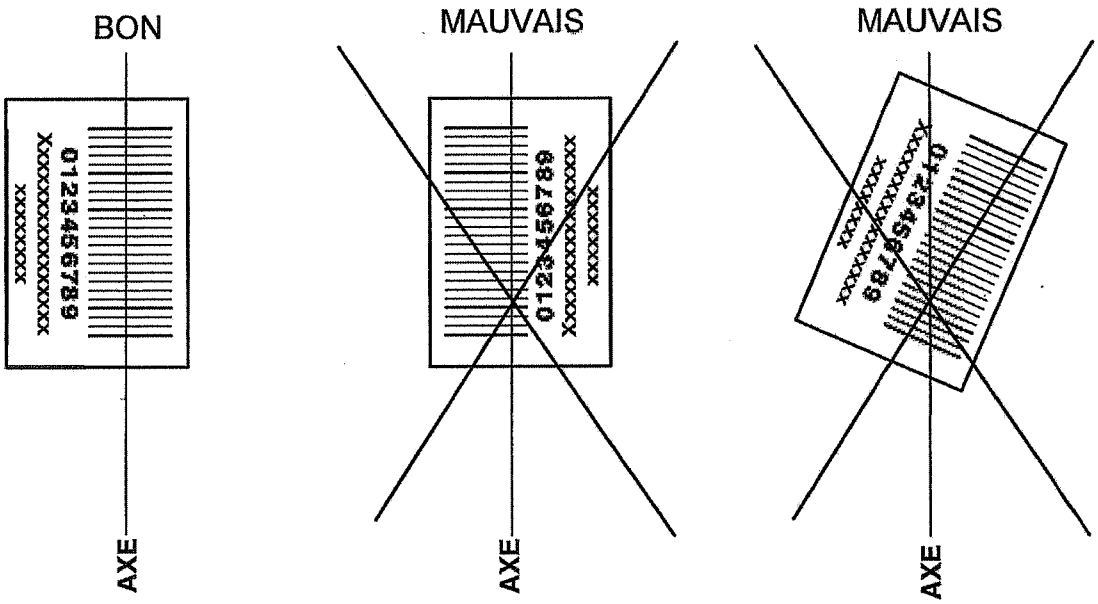
### ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire « épreuve obligatoire de mathématiques ».

### POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification **à gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

**EXEMPLES :**




2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

**Tournez la page S.V.P.**

5) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
*la ligne correspondante doit rester vierge.*

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
*vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
*vous devez noircir deux des cases A, B, C, D* ***et deux seulement.***

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :

*vous devez alors noircir la case E.*

**Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes**

**Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note**

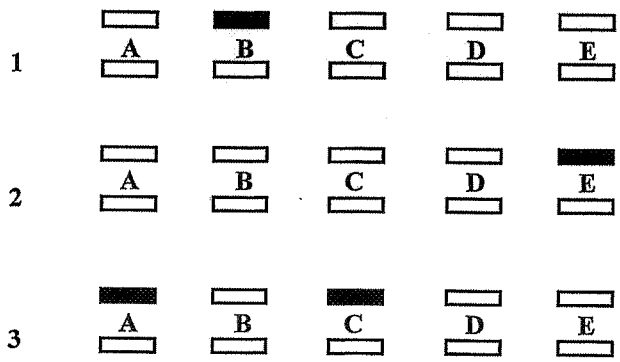
**EXEMPLES DE RÉPONSES :**

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**



**Problème I.**

Soit S l'ensemble des suites $(a_n)$ dont le terme général $a_n$ est un nombre complexe.

Soient : I l'ensemble des suites $(a_n)$ telles que la série $\sum|a_n|$ de terme général $|a_n|$ converge et J l'ensemble des suites $(a_n)$ telles que la série $\sum|a_n|^2$ de terme général $|a_n|^2$ converge

**Question 1** - Soit $(a_n)$ un élément de I , on a alors :

A) I est un sous espace vectoriel de S

B) I n'est pas un sous espace vectoriel de S

C) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

D) $\lim_{n\to\infty}|a_n| > 0$

**Question 2** - L'ensemble I vérifie :

A) I n'est pas inclus dans l'ensemble des suites convergeant vers 0

B) I est inclus dans l'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{C}$

C) I n'est pas inclus dans l'ensemble des suites bornées

D) J est inclus dans I

**Question 3** - Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On a

A) si R>1 alors (an) appartient à I

B) si R<1 alors (an) appartient à I

C) si R>1 alors (an) n'appartient pas à I

D) si R<1 alors (an) n'appartient pas à I

**Question 4** - Soit la série $\sum\frac{1}{n^2}z^n,\ n>0$

A) son rayon de convergence est $\infty$

B) son rayon de convergence vaut 1

C) la suite $(a_n)$ de terme général $\frac{1}{n^2} \in I$

D) la suite $(a_n)$ de terme général $\frac{1}{n^2} \notin I$



**Tournez la page S.V.P.**

**Question 5** - Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{b^n}$ où b est un entier > 1, alors

A) son rayon de convergence est R = b

B) son rayon de convergence est R = 1/b

C) la somme de la série est $\frac{1}{b-x}$

D) la somme de la série est $\frac{1}{x-b}$

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\frac{1}{(2-x)(3-x)}$

**Question 6** – On a :

A) f est développable en série entière autour de x=0 et son rayon de convergence vaut 1

B) f est développable en série entière autour de x=0 et son rayon de convergence vaut 2

C) f est développable en série entière autour de x=0, son rayon de convergence vaut 3

D) f n'est pas développable en série entière autour de x=0

**Question 7** - La dérivée $f^{(n)}(x)$ d'ordre n de la fonction f(x) est :

A) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{(2-x)^n-(3-x)^n}{(x^2+5x-6)^n}$

B) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{(2-x)^n-(3-x)^n}{(x^2-5x+6)^n}$

C) $f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{(3-x)^{n+1}-(2-x)^{n+1}}{(x^2-5x+6)^{n+1}}$

D) $f^{(n)}(x) = \frac{(3-x)^{n+1}-(2-x)^{n+1}}{(x^2-5x+6)^{n+1}}$

**Question 8** - Considérons la suite $(a_n)$ définie par $a_n = f^{(n)}(0)$

A) Cette suite n'appartient pas à l

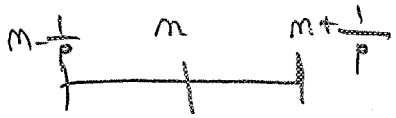
B) Cette suite appartient à l

C) L'expression de son terme général est $\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}$

D) L'expression de son terme général est $\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}$

Dans toute la suite on suppose que n est un entier tel que $n \geq 2$ et p et q deux entiers $\geq 1$. On note $I_n$ l'intervalle $\left[n-\frac{1}{n^p},n+\frac{1}{n^p}\right]$. On définit alors une application g de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$g(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \notin I_n \\ n^q(n^p x+1-n^{p+1}) \text{ si } x \in \left[n-\frac{1}{n^p},n\right] \\ n^q(-n^p x+1+n^{p+1}) \text{ si } x \in \left[n,n+\frac{1}{n^p}\right] \end{cases}$$




et on note : $A_n=\int_{n-\frac{1}{p}}^{n+\frac{1}{p}} g(x)dx$ et $B_n=\int_{n-\frac{1}{p}}^{n+\frac{1}{p}} (g(x))^2dx$

**Question 9** – L'application g(x)

A) est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

B) n'est pas $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

C) est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

D) **n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$**

$$n^q\left(\frac{n^p}{2}x^2+(1-n^{p+1})x\right)$$

$$n^q\left(-\frac{n^p}{2}x^2+(1+n^{p+1})x\right)$$

**Question 10** – La valeur de $A_n$ est :

A) $\frac{1}{n^{p-q}}$

B) $\frac{1}{n^{q-p}}$

C) $(-1)^n\frac{1}{n^{p-q}}$

D) $(-1)^n\frac{1}{n^{q-p}}$

**Question 11** – La valeur de $B_n$ est :

A) $\frac{2}{3}\frac{1}{n^{p-2q}}$

B) $\frac{3}{2}\frac{1}{n^{2p-q}}$

C) $\frac{1}{n^{p-q}}$

D) $\frac{1}{n^{2q-p}}$



**Tournez la page S.V.P.**

**Question 12** - $A_n$ est le terme d'une série convergente sous la condition que:

A) $q-p>-1$
B) $q-p<-1$
C) $p-q\geq 1$
D) $p-q\leq 1$

**Question 13** - $B_n$ est le terme d'une série convergente sous la condition que:

A) $p-2q < 1$
B) $2q-p > 1$
C) $p-2q \geq -1$
D) $2q-p \leq -1$

**Question 14** – On veut que les séries associées à An et Bn soient convergentes en même temps:

A) cela n'est pas possible
B) cela est possible si : p = 2 et q = 3
C) cela est possible si : p = 4 et q = 2
D) cela est possible si : p = 3 et q = 2

## Problème II.

Soit f(x) une fonction définie sur l'intervalle I = [a, b] $\subset \mathbb{R}$, de classe $C^{n+1}$, avec n ≥ 1. On utilise dans le problème la norme: $N_{\infty,I}(f) = \sup_{x\in I}|f(x)|$

I – On veut trouver une expression de f(b) en fonction de f(a) et des dérivées de la fonction f(x) au point a. Pour cela on introduit la fonction :

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

La constante A sera calculée en imposant que la fonction F(x) soit nulle en a, F(a) = 0.

**Question 15** – On a :

A) $F(b) \neq 0$

B) $F'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n)}(x))$

C) il existe $c \in ]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$

D) il existe $c \in ]a, b[$ tel que $F(c) = 0$

**Question 16** – On peut alors écrire, $c \in ]a, b[$ :

A) $f(b) = f(a) + (b-a)f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$

B) $f(b) = f(a) + (b-a)f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (-1)^n\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$

C) $f(b) = f(a) + (b-a)f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(c)$

D) $f(b) = f(a) + (b-a)f(a) + \ldots + \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

**Question 17** – Si on pose $a = x$ et $b = x + \lambda$, on peut alors écrire :

A) $f(x+\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k f^{(k)}(x) + \frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta\lambda)\ \theta \in ]0, 1[$

B) $f(x+\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k f^{(k)}(x) + (-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(x-\theta\lambda)\ \theta \in ]0, 1[$

C) $f(x+\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k f^{(k)}(x) + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(x-\theta\lambda)\ \theta \in ]0, 1[$

D) $f(x+\lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^{n}\lambda^k f^{(k)}(x) + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta\lambda)\ \theta \in ]0, 1[$

$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} h^k$

**Question18** – On désire exprimer le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 4x + 1$, en fonction de $X = x+1$, en utilisant les résultats précédents on obtient comme expression:

A) $X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 8X + 2$

B) $X^4 + 12X^3 + 6X^2 - 2X - 2$

C) $X^4 - 5X^3 + 8X^2 - X - 2$

D) $X^4 - 12X^3 - 6X^2 + X - 2$

$= X^4 - 5X^3 + 14X^2 - 24X + 19$

$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \ldots$

$X^4 - X^3 - X^2 + 4X + 1 \quad k=0$

$+ 3X^2 + 2X - 4 \quad k=1$

$+ 12X^2 - 6X - 2 \quad k=2$

$- 24X + 6 + 24 \quad k=3$

$P''(x) = 12X^2 - 6X - 2$

$P'''(X) = 24X - 6$

$P''''(X) = 24$



**Tournez la page S.V.P.**

II – On suppose maintenant que f(x) est une fonction positive de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que sa dérivée seconde f''(x) soit bornée.

**Question 19** - Pour tous x et λ éléments de $\mathbb{R}$ on peut alors écrire :

A) $f(x+\lambda)=f(x)+\lambda f'(x)+\frac{\lambda^2}{2}f''(x+\theta\lambda)\ \theta \in ]0,1[$

B) $f(x+\lambda)=f(x)-\lambda f'(x)+\frac{\lambda^2}{2}f''(x-\theta\lambda)\ \theta \in ]0,1[$

C) $f(x+\lambda)=f(x)+\lambda f'(x)-\frac{\lambda^2}{2}f''(x+\theta\lambda)\ \theta \in ]0,1[$

D) $f(x+\lambda)=f(x)+\lambda f'(x)+\frac{\lambda^2}{2}f''(x-\theta\lambda)\ \theta \in ]0,1[$

**Question 20** – Pour tous x et λ éléments de $\mathbb{R}$, on a :

A) $f(x+\lambda) \le f(x)+\lambda f'(x)+\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,R}(f'')$

B) $f(x+\lambda) \le f(x)+\lambda f'(x)-\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,R}(f')$

C) $f(x+\lambda) \le f(\lambda)+\lambda f'(x)-\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,R}(f'')$

D) $f(x+\lambda) \le f(x)-\lambda f'(x)+\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,R}(f')$

**Question 21** – On a:

A) $\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') + \lambda f'(x)+f(x) \ge 0$

B) $\frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') + \lambda f'(x)+f(x) \le 0$

C) si $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$ est non nulle alors $|f'(x)| \le (2 N_{\infty,R}(f'').f(x))^{1/2}$

D) si $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$ est non nulle alors $|f'(x)| \ge (2 N_{\infty,R}(f'').f(x))^{1/2}$

$\frac{1}{2} N_\infty(f'') + f'(a) + f(a) \ge 0$

$-f'(a) \le \frac{N_\infty(f'')}{2} + f(a)$

**Question 22** – Si $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$ est nulle, alors :

A) f(x) est une fonction affine
B) f(x) est la fonction nulle
C) f'(x) = 0
D) f'(x) > 0

**Question 23** – On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$

A) g(x) est continue sur $\mathbb{R}$
B) g(x) est dérivable en tout point x
C) g(x) est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$
D) g(x) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(a) \ge 0$

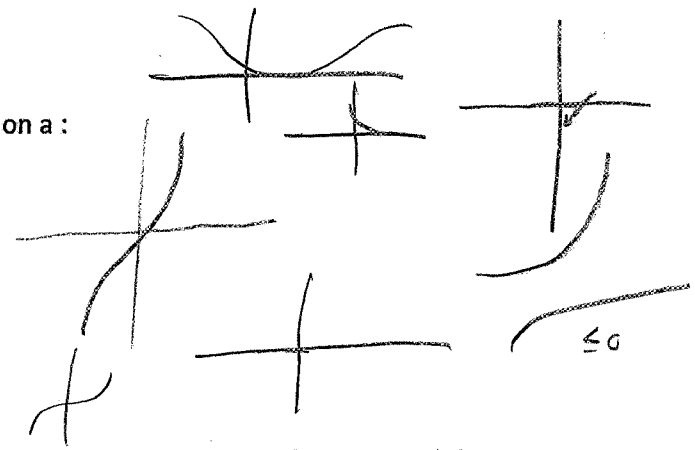
**Question 24** – Soit $x_0$ un élément de $\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$, on a :

A) $f'(x_0) > 0$

B) $f'(x_0) > 1$

C) $f'(x_0) = 0$

D) $f'(x_0)$ n'est pas définie



**Question 25** – On peut alors en déduire que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $x \neq x_0$, il existe un réel c, compris entre $x_0$ et x tel que :

A) $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f'(c)$

B) $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$

C) $f(x-c) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2$

D) $f''(c) < 0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

**Question 26** – On a :

A) En étudiant la variation de f(x) au voisinage de $x_0$ on montre que $f''(x_0) \geq 0$

B) En étudiant la variation de f(x) au voisinage de $x_0$ on montre que $f''(x_0) \leq 0$

C) si $f''(x_0) > 0$ alors g(x) n'est pas dérivable en $x_0$

D) si $f''(x_0) > 0$ alors g(x) est dérivable en $x_0$

## Problème III.

I – Le but de cette première partie est de déterminer les coefficients d'un polynôme P(x) de degré n à partir de ses racines $x_i \in \mathbb{C}$. On écrit le polynôme sous la forme :

$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$ où $x \in \mathbb{C}$ et $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in [1, n]$

On note $S_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^k$, $k \in [1, n]$

**Question 27** – Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on effectue la division euclidienne de P(x) par $(x-\lambda)$ et on note :

$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots\ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ le polynôme quotient et par $b_n$ le reste. On a alors :

A) $b_n$ est un polynôme en x de degré 1

B) $b_n = 0$ si $\lambda = x_i$

C) pour tout $k \in [1, n-1]$, $b_k \in \mathbb{R}$

D) $b_n = a_n - \lambda b_{n-1}$

$$P = Q \times (X-\lambda) + b_n$$
$$- b_{n-1}\lambda$$
$$a_n = b_n - b_{n-1}\lambda$$



Tournez la page S.V.P.

**Question 28** – On veut maintenant établir l'expression en fonction de $\lambda$ des différents $b_k$, $k \in [1, n]$. On obtient :

A) $b_k = \lambda^k - a_1\lambda^{k-1} + ..... + (-1)^i a_i \lambda^{k-i} + ..... + 1$

B) $b_k = a_k\lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} + ..... + (-1)^i a_{k-i} \lambda^{k-i} + ..... + 1$

C) $b_k = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ..... + a_i \lambda^{k-i} + ..... + a_k$

D) $b_k = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + ..... + a_{k-i} \lambda^{k-i} + ..... + 1$

**Question 29** – On utilise le résultat précédent pour exprimer la somme :

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x)}{x - x_i} = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + c_2 x^{n-3} + ..... + c_{n-2} x + c_{n-1}$. On obtient :

A) $c_0 = 1$

B) $c_k = S_k + a_1 S_{k-1} + ..... + a_{k-1}(S_1 + n a_k)$

C) $S_k + a_1 S_{k-1} + ..... + a_{k-1} S_1 = 0$

D) $S_k + a_1 S_{k-1} + ..... + a_{k-1}(S_1 + a_k) = 0$

$S_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$

**Question 30** – En exprimant $P'(x) = \frac{dP(x)}{dx}$ à l'aide de E(x) on obtient : $P'(x) = \sum_{k=1}^{n}$

A) $S1 + a1 = 0$

B) $S_k + a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-2} ..... + (k-1)a_k = 0, k \in [2, n]$

C) $S_k + a_{k-1} S_{k-1} + a_{k-2} S_{k-2} ..... + k a_k = 0, k \in [2, n]$

D) $S_k + a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-2} ..... + k a_k = 0, k \in [1, n-1]$

En complétant les résultats précédents avec la relation obtenue en calculant $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)$ on obtient ainsi n relations permettant la détermination de tous les coefficients de P(x).

**Question 31** – On veut déterminer le polynôme P(x) pour lequel on aurait obtenu :

$S_1 = 2$, $S_2 = -4$, $S_3 = 8$ et $S_4 = 48$.

On obtient :

A) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x + 1$

B) $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

C) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$

D) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 1$

II – Dans cette deuxième partie les résultats précédents vont être utilisés pour déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$ i et j $\in [1, n]$, en calculant les puissances successives de A. On rappelle que la trace de A est définie par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ On note $X_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ le polynôme caractéristique de A et par $\lambda_i \in \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs propres de A. On définit cette fois les termes $S_k$ par $S_k = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k$, $k \in [1, n]$

**Question 32** – Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A, on a alors :

A) $X_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (t_{ii} - \lambda)$

B) $Tr(T^k) = (-1)^k Tr A^k$

C) $S_k = Tr(A^k)$

D) $X_T(\lambda)$ est toujours scindé dans $\mathbb{R}$

**Question 33** – Soit $P(\lambda)$ le polynôme défini par $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, on a :

A) $P(\lambda) = X_A(\lambda)$ $\forall n$

B) $P(\lambda) = (-1)^n X_A(\lambda)$ $\forall n$

C) $P(\lambda_i) = 0 \; \forall i \in [1,n]$

D) $P(\lambda_i) \neq 0 \; \forall i \in [1,n]$



**Tournez la page S.V.P.**

On veut maintenant déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**Question 34** -On obtient avec les notations précédentes :

A) $S_3 = 8$ $S_4 = -16$

B) $S_3 = -4$ $S_4 = 8$

C) $S_3 = 8$ $S_4 = 48$

D) $S_3 = -2$ $S_4 = 16$

**Question 35** – Le polynôme caractéristique $X_B(\lambda)$de B est alors :

A) $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1$

B) $\lambda^4 + \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda$

C) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda$

D) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 1$

III – On suppose maintenant que pour tout $i \neq j$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$, i et j $\in [1,n]$ et on se propose de déterminer un vecteur propre $X_i$ associé à un $\lambda_i$ donné.

Pour cela on se donne un vecteur non nul $u_0 \in \mathbb{R}^n$ a priori arbitraire et on génère la suite de vecteurs $u_k$ par la relation de récurrence $u_k = A.u_{k-1}$, $k \in [1,n-1]$.

A chaque $\lambda_i$ on associe (avec toujours $P(\lambda) = dét(\lambda I - A)$):

d'une part le polynôme $\phi_i(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} = \lambda^{n-1} + (d_i)_1\lambda^{n-2} + (d_i)_2\lambda^{n-3} + \ldots + (d_i)_{n-1}$ et d'autre part la somme vectorielle : $Y_i = u_{n-1} + (d_i)_1 u_{n-2} + (d_i)_2 u_{n-3} + \ldots + (d_i)_{n-1} u_0$

**Question 36** - On peut alors dire :

A) Les vecteurs $X_i$ ne forment pas une base

B) $\forall$ $j \neq i$ alors $X_j$ est orthogonal à $X_i$

C) il existe une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}AP$

D) La matrice D admet les mêmes vecteurs propres que A

**Question 37** – On peut remarquer que :

A) $\phi_i(\lambda_i) = P'(\lambda_i)$

B) $\phi_i(\lambda_j) \neq 0$ pour $i \neq j$

C) si $(d_i)_{n-1} = 0$ alors le coefficient $a_n$ de $P(\lambda)$ est également nul

D) si $(d_i)_{n-1} \neq 0$ alors le coefficient $a_n$ de $P(\lambda)$ est également toujours $\neq 0$

**Question 38** – On se propose d'écrire le vecteur $u_0$ sous la forme : $u_0 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots\ldots + \mu_n X_n$

A) cette décomposition n'est pas unique

B) cette décomposition peut ne pas exister

C) on peut exprimer $u_k$ en fonction des coefficients de $u_0$

D) on ne peut pas exprimer $u_k$ en fonction des coefficients de $u_0$

**Question 39** – En calculant la somme vectorielle $Y_i$ pour un $\lambda_i$ donné on remarque que :

A) $Y_i$ est aussi un vecteur propre associé à $\lambda_i$ si $\mu_i$ est non nul

B) $Y_i$ est un vecteur orthogonal à $X_i$

C) si $\mu_i = 0$ alors $u_0$ est orthogonal à $X_i$

D) si $\mu_i = 0$ alors $u_0$ n'est jamais orthogonal à $X_i$

**Question 40** – Soit une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X_C(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda - 8$ dont l'une des racines est $\lambda = 1$. En partant de $u_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ on obtient $u_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix}$ et $u_2 = \begin{vmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \end{vmatrix}$

Un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module est :

A) $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ ; B) $\begin{vmatrix} -1 \\ 10 \\ -4 \end{vmatrix}$ ; C) $\begin{vmatrix} 10 \\ -15 \\ 10 \end{vmatrix}$ ; D) $\begin{vmatrix} 1 \\ -8 \\ 8 \end{vmatrix}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis