ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2011**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve optionnelle obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions/QCM
13 pages d'avertissements et de texte recto/verso

◆

CALCULATRICE NON AUTORISÉE

ÉPREUVE OPTIONNELLLE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve «optionnelle obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

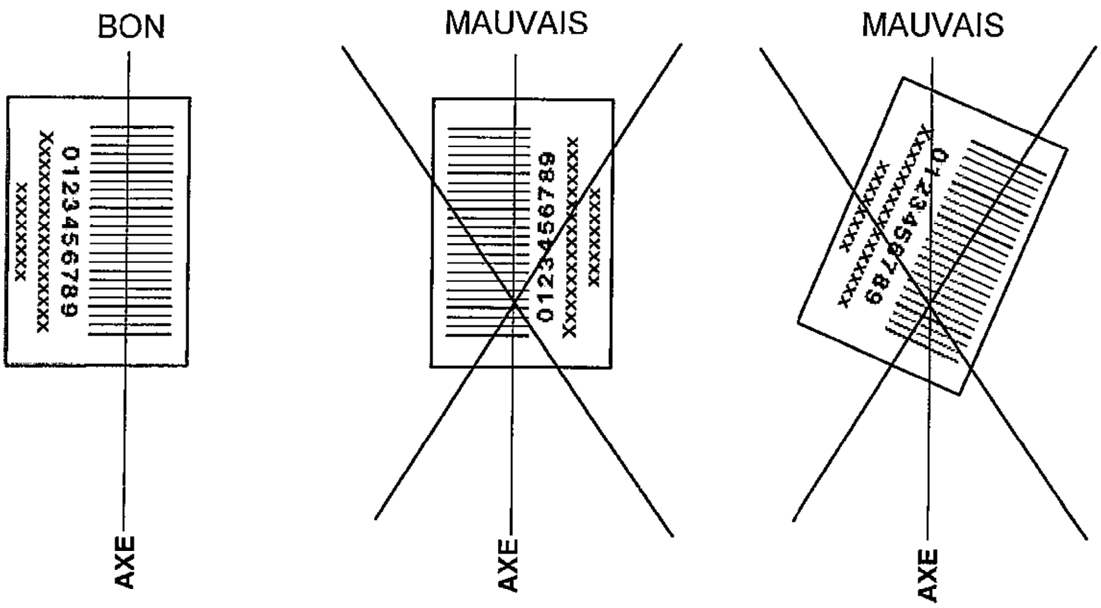
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur **NOIRE**.

3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les brouillons qui vous sont fournis à la demande par le surveillant qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.
Chaque question comporte, au plus, deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D ***et deux seulement.***

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

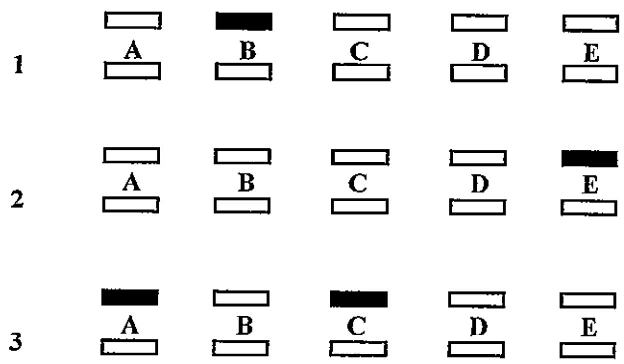
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

<u>Question 3</u> : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENTS

L'usage de calculatrices, téléphones portables ou de documents personnels n'est pas autorisé.

QUESTIONS LIÉES

1 à 13
14 à 23
24 à 40

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le sujet | | désigne le module ou la valeur absolue

PARTIE I

IR[X] désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X. Si n est un entier naturel, on note $\mathrm{IR}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels à une indéterminée X de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application F qui à tout polynôme P de $\mathrm{IR}_n[X]$ associe le polynôme

$$F(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$$

où P' et P'' désignent les polynômes dérivés respectivement d'ordre 1 et 2.
On note F_n la restriction de la fonction F à $\mathrm{IR}_n[X]$.
deg(P) désigne le degré du polynôme P et id_n l'application identité de $\mathrm{IR}_n[X]$.

1) On établit que, pour tout n entier naturel,
   A) F_n est un endomorphisme de $\mathrm{IR}_n[X]$
   B) F_n est une application linéaire mais n'est pas nécessairement un endomorphisme de $\mathrm{IR}_n[X]$ car il existe au moins un polynôme P de $\mathrm{IR}_n[X]$ tel que $\deg(P) = n$ et $\deg(F_n(P)) < n$
   C) la matrice de l'application F_n dans la base canonique de $\mathrm{IR}_n[X]$ est une matrice triangulaire inférieure
   D) la matrice de l'application F_n dans la base canonique de $\mathrm{IR}_n[X]$ n'est pas une matrice triangulaire

2) On montre que, pour tout n entier naturel,
   A) l'application F_n est bijective car toute application linéaire dont la représentation matricielle par rapport à une base est triangulaire est un isomorphisme
   B) 0 appartient au spectre de l'application F_n donc F_n n'est pas injective mais peut être surjective
   C) le rang de l'application F_n vaut $n - 1$
   D) 0 appartient au spectre de l'application F_n donc F_n n'est ni surjective, ni injective car F_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n

3) Pour tout n entier naturel
   A) le polynôme caractéristique de F_n est $\chi_n = \det(F_n - X\,\mathrm{id}_n) = (-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n}(X - k(k+1))$
   B) le polynôme caractéristique de F_n est $\chi_n = \det(F_n - X\,\mathrm{id}_n) = \prod_{k=0}^{n}(X - k(k+1))$
   C) F_n est diagonalisable car F_n est un endomorphisme symétrique réel
   D) F_n est diagonalisable car cet endomorphisme possède $(n+1)$ sous-espaces propres chacun de dimension 1

4) On établit que, pour tout n entier naturel,

A) la matrice de l'application linéaire F_n dans la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant triangulaire inférieure, il n'existe pas de base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de F_n

B) il existe une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de F_n

C) il existe une infinité de familles $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telles que pour tout entier k compris entre 0 et n $\deg(P_k)=k$ et $F_k(P_k)=k(k+1)P_k$

D) il existe une unique famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout entier k compris entre 0 et n $\deg(P_k)=k$ et $F_k(P_k)=k(k+1)P_k$

5) On considère, si elle existe, la famille $(J_k)_{0\leq k\leq n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $F_k(J_k)=k(k+1)J_k$ et, tous, de coefficients dominants égaux à 1. On a

A) $J_3=X^2+(1/2)X-(1/4)$

B) $J_3=X^3+(1/2)X^2+(1/2)X-(1/8)$

C) la famille $(J_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout entier k compris entre 2 et n, il existe au moins un polynôme R_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$J_k=X^k+(1/2)X^{k-1}-((k-1)/4)X^{k-2}+R_k$ et $R_2=0$ et pour tout entier k compris entre 3 et n, $\deg(R_k)=k-3$

D) la famille $(J_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout entier k compris entre 2 et n, il existe au moins un polynôme R_k de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$J_k=X^k+(1/2)X^{k-1}-(1/4)X^{k-2}+R_k$ et $R_2=0$ et pour tout entier k compris entre 3 et n, $\deg(R_k)=k-3$

6) On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles continues par morceaux sur l'intervalle $[-1,1]$ et l'application $(./.)$ qui au couple (f,g) de fonctions de E associe le réel

$$(f/g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sqrt{(1-t)/(1+t)}\,dt.$$ On établit que

A) pour tout couple (f,g) de ExE, la fonction $f(t)g(t)\sqrt{(1-t)/(1+t)}$ est intégrable sur l'intervalle $]-1,1]$ car cette fonction est continue par morceaux sur $]-1,1]$ et que toute fonction continue par morceaux sur un intervalle I est intégrable sur cet intervalle

B) pour tout couple (f,g) de ExE, la fonction $f(t)g(t)\sqrt{(1-t)/(1+t)}$ est intégrable sur l'intervalle $]-1,1]$ car cette fonction est continue par morceaux sur $]-1,1]$ et vérifie $|t\, f(t)g(t)\sqrt{(1-t)/(1+t)}|\leq 1/\sqrt{(1+t)}$ qui est une fonction positive intégrable sur $]-1,+\infty]$

C) l'application qui au couple (f,g) associe (f/g) est un produit scalaire sur E

D) pour que l'application qui au couple (f,g) associe (f/g) soit un produit scalaire, il faut la restreindre à l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$, car sur l'ensemble E la forme n'est pas définie positive.

7) On montre que, pour tout entier naturel n,

A) pour tout couple (P,Q) de polynômes de $\mathrm{IR}_n[X]$, $(F_n(P)/Q) = 2(P/F_n(Q))$

B) pour tout couple (P,Q) de polynômes de $\mathrm{IR}_n[X]$, $(F_n(P)/Q) = (P/ F_n (Q))$

C) pour tout couple (p,q) d'entiers compris entre 0 et n, $(J_p/J_q) =0$

D) la famille $(J_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathrm{IR}_n[X]$ muni du produit scalaire (./.) défini à la question 6)

On note ||.|| la norme associée au produit scalaire défini dans la question 6, si cela est possible.

8) La norme $||J_0||$ du polynôme J_0 défini dans la question 5 est égale à

A) π

B) 2π

C) 1

D) $\sqrt{2\pi}$

Pour tout n, entier naturel, on pose

$$I_n = \int_{-1}^{1} t^n \sqrt{(1-t)/(1+t)}\, dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{\pi/2} (\cos 2\theta)^n d\theta.$$

9) On montre que

A) l'application qui à t associe $\mathrm{Arctan}(\sqrt{(1-t)/(1+t)})$ est un C^∞-difféomorphisme de l'ouvert $]-1,1[$ sur l'ouvert $]0,\pi/2[$ et définit donc un changement de variable qui conserve la propriété d'intégrabilité

B) pour tout entier naturel n, $I_n = K_n - K_{n+1}$

C) pour tout entier naturel n, $I_n = (K_n - K_{n+1})/2$

D) pour tout entier naturel n, $I_n = 2(K_n - K_{n+1})$

10) Pour tout entier naturel p, on a

A) $K_{2p}= 0$, $K_{2p+1}= (2p)!\pi/(2^{2p+1}(p!)^2)$

B) $K_{2p+1}= 0$, $K_{2p}= (2p)!\pi/(2^{2p+1}(p!)^2)$

C) $I_{2p}=(2p)!\pi/(4^{p+1}(p!)^2)$, $I_{2p+1}= (2p+2)!\pi/(4^{p+2}((p+1)!)^2)$

D) $I_{2p}=(2p)!\pi/(4^p(p!)^2)$, $I_{2p+1}= (2p+2)!\pi/(4^{p+1}((p+1)!)^2)$

11) On établit que, pour tout entier naturel n,

A) $(X^i/X^j) = I_{i+j}$ pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 0 et n

B) $\|J_1\|^2 = I_2 + (\|J_0\|^2/4)$

C) $\|J_1\| = \sqrt{\pi}/2$

D) $\|J_2\| = \sqrt{\pi}/2$

12) Pour tout n, entier naturel non nul, on a

A) $(J_n/X^n) = (J_n/J_n)$

B) $(J_n/X^{n+1}) = (J_n/J_n)$

C) $(J_n/X^{n+1}) = -(J_n/J_n)$

D) $(J_n/X^{n+2}) = (n+2)(J_n/J_n)/4$

13) Pour tout n, entier naturel, on pose, si le produit scalaire existe, $x_n = (J_n/J_n)$. On montre que

A) pour tout n, entier naturel non nul, $x_{n+2} = x_{n+1} + (x_n/16)$

B) pour tout n, entier naturel non nul, $x_{n+1} = x_n/16$

C) pour tout n, entier naturel, $\|J_n\| = (\sqrt{\pi})/2^n$

D) pour tout n, entier naturel non nul, $\|J_n\| = (\sqrt{\pi})/2^{n-1}$

PARTIE II

On note $\mathbf{C}$ l'espace vectoriel des nombres complexes. N étant un entier naturel non nul, on note E, l'espace vectoriel $\mathbf{C}^N$ et $\mathbf{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E.
Soit f un élément de l'ensemble $\mathbf{L}(E)$. On suppose qu'il existe un couple (a,b) de nombres complexes et un couple (p,q) d'éléments de $\mathbf{L}(E)$ tels que

$$\begin{cases} \text{p et q non nuls} \\ \text{et } p + q = id_E \\ \text{et } f = ap + bq \\ \text{et } f^2 = a^2 p + b^2 q \end{cases}$$

où id_E désigne l'identité de E et où, pour tout n, entier naturel, on note $f^n = fof\ldots..of$, la composée, par la loi o, de l'application f par elle-même n fois.

14) On montre que

A) $(f - a\,id_E)o(f - b\,id_E) = 0$ uniquement si a et b sont distincts

B) $(f + a\,id_E)o(f + b\,id_E) = = 0$

C) f est diagonalisable car pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable il suffit qu'il admette un polynôme annulateur scindé

D) si a est différent de b, alors f est diagonalisable car l'existence, pour un endomorphisme, d'un polynôme annulateur scindé à racines simples est une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme soit diagonalisable

15) On a

A) pour tout couple (s,r) d'éléments de **L**(E), la condition s+r $=\mathrm{id}_E$ implique s o r=r o s
B) pour tout couple (s,r) d'éléments de **L**(E), la condition s+r $=\mathrm{id}_E$ implique s o r=r o s = 0
C) $(a-b)^2$ (poq) = 0
D) poq = 0

16) On a

A) pour tout couple (s,r) d'éléments de **L**(E), la condition s+r $=\mathrm{id}_E$ implique $s^2=s$
B) pour tout couple (s,r) d'éléments de **L**(E), la condition s o r=r o s= 0 implique $s^2=s$
C) pour tout couple (s,r) d'éléments de **L**(E), la condition (s+r $=\mathrm{id}_E$ et r o s= 0) implique $s^2=-s$
D) si a est différent de b, alors p et q sont des projecteurs de E tels que poq est distinct de l'endomorphisme nul

17) On suppose dorénavant que a et b sont distincts. On note Sp(f) le spectre de l'endomorphisme f. On montre que

A) Sp(f) est inclus dans l'ensemble $\{a,b\}$ mais l'égalité n'est pas assurée car l'un des complexes a ou b n'est pas nécessairement valeur propre de f
B) Sp(f) = $\{a,b\}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre a contient le sous-espace vectoriel Im p mais n'est pas nécessairement égal à Im p
C) p est le projecteur sur $\ker(f-b\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(f-a\mathrm{id}_E)$
D) q est le projecteur sur $\ker(f-a\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(f-b\mathrm{id}_E)$

18) On établit que

A) f est un isomorphisme
B) ab différent de 0 est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E
C) ab =0 est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E
D) si ab est différent de 0, alors pour tout entier relatif m, $f^m = a^m\mathrm{p} + b^m\mathrm{q}$ où pour tout k, entier naturel non nul, $f^{-k} = (f^{-1})^k$

19) On note F l'ensemble $\{x\text{p} + y\text{q}$ où x et y parcourent $\mathbf{C}\}$. F est

A) un anneau pour les lois + et o

B) un corps pour les lois + et o

C) un sous-espace vectoriel de **L**(E) de dimension infini

D) un sous-espace vectoriel de **L**(E) de dimension 4

20) On a

A) tout élément de F est un projecteur de E car poq = qop =0

B) pour que $x^2\text{p} + y^2\text{q} = x\text{p} + y\text{q}$ entraine $x^2=x$ et $y^2=y$, il suffit que (p,q) soit une famille génératrice de F

C) $x^2\text{p} + y^2\text{q} = x\text{p} + y\text{q}$ cntraine $x^2=x$ et $y^2=y$ car (p,q) est une famille libre de E

D) $x^2\text{p} + y^2\text{q} = x\text{p} + y\text{q}$ entraine $x^2=x$ et $y^2=y$ car (p,q) est une base de F

21) On considère l'équation (S) : $g^2 = f$ et on étudie l'existence de solutions g. On montre que l'équation (S)

A) admet au moins une solution dans F uniquement si a et b sont des réels positifs ou nuls

B) admet au moins deux solutions distinctes dans F

C) admet exactement quatre solutions distinctes dans F car les équations $x^2=a$ et $y^2=b$ ont chacune exactement deux solutions

D) admet exactement quatre solutions distinctes dans F pour a et b fixés non nuls

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

22) Pour tout entier naturel n, on a

A) $U^{n+2} = 3\,U^n$

B) $U^n = (3^{n-1})U$

C) $A^n = (4^{n-1})U + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour n non nul

D) $A^n = ((4^n)/3)U + \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ -1 & 2/3 & -1 \\ -1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$

23) Une matrice B dont le carré est égal à la matrice A peut s'écrire sous la forme

A) $B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ -1 & 2/3 & -1 \\ -1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} - (2/3)U$

B) $B = i \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ -1 & 2/3 & -1 \\ -1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} - (2/3)U$

C) $B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ -1 & 2/3 & -1 \\ -1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} - (2i/3)U$

D) $B = -\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ -1 & 2/3 & -1 \\ -1 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} - (2/3)U$

PARTIE III

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : pour tout entier naturel n, pout tout t appartenant à l'intervalle $I = [0,+\infty[$, $f_n(t) = e^t/(1+t^n)$ où e désigne la fonction exponentielle.
Pour tout n, entier naturel, on note φ_n la fonction qui à x réel positif ou nul associe

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$$

24) On montre que, pour tout n entier naturel,

A) f_n est une fonction continue positive et intégrable sur I

B) f_n est une fonction continue positive sur I mais non intégrable sur I comme fonction dominant la fonction constante 1 pour tout t appartenant à I

C) φ_n est une fonction croissante de classe C^1 sur I mais n'est pas de classe C^∞ sur I

D) φ_n est un C^∞-difféomorphisme de I sur I car φ_n est une fonction de classe C^∞ strictement croissante, de dérivée ne s'annulant pas sur I et de limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

25) Pour tout n entier supérieur ou égal à 3, on note, s'ils existent, α_n et β_n les deux premiers points de I en lesquels la dérivée f_n' de f_n s'annule et tels que $\alpha_n \leq \beta_n$. On note N la fonction définie par $N(t)=1+t^n-nt^{n-1}$ pour tout t appartenant à I. On établit que

A) f_n' ne s'annule au plus qu'en un point de I

B) $0 \leq \alpha_n \leq n \leq \beta_n$

C) $0 \leq \alpha_n \leq 1 < n-1 \leq \beta_n < n$ car N décroit de 1 à $1-(n-1)^{n-1}$, croit de $1-(n-1)^{n-1}$ à $+\infty$ et vérifie $N(1) < 0$ et $N(n) = 1$

D) la fonction f_n décroissante sur $[0,\alpha_n]$, croisssante sur $[\alpha_n,\beta_n]$, et décroissante sur $[\beta_n,+\infty[$

Tournez la page S.V.P.

26) On suppose toujours n, entier supérieur ou égal à 3 et on désigne par ln la fonction logarithme népérien. On a

A) α_n^{n-1} est équivalent à $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$

B) α_n^{n-1} est équivalent à $-1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$ car α_n est borné

C) $\ln(\alpha_n)$ est équivalent à $-\ln(n)/(n-1)$ lorsque n tend vers $+\infty$ car $(n-1)\ln(\alpha_n)= -\ln(n) + o(1)$

D) si u_n et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$ alors les suites de termes généraux $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ sont équivalentes

27) Lorsque n tend vers $+\infty$

A) $f_n(\beta_n)$ tend vers 0

B) $f_n(\beta_n)$ tend vers $+\infty$

C) $f_n(\alpha_n)$ tend vers 0

D) $f_n(\alpha_n)$ tend vers e car la suite (α_n) converge vers 1

28) La suite de fonctions (f_n)

A) diverge sur I

B) converge simplement sur I vers la fonction g définie sur I par $g(t)= e^t$ pour tout t appartenant à $[0,1]$ et $g(t)= 0$ pour tout t appartenant à $]1,+\infty[$

C) converge simplement sur I vers une fonction nécessairement continue sur I puisque f_n est, pour tout entier naturel n, continue sur I

D) converge simplement sur I vers la fonction g définie sur I par $g(t)= e^t$ pour tout t appartenant à $[0,1[$ et $g(t)= 0$ pour tout t appartenant à $[1,+\infty[$

29) On note g la limite, si elle existe, de la suite (f_n). Pour tout n entier naturel, on montre que, dans un repère orthonormé,

A) le graphe de la fonction f_n est au-dessus du graphe de la fonction f_{n+1} pour tout t appartenant à I

B) le graphe de la fonction f_n est au-dessous du graphe de la fonction f_{n+1} pour t appartenant à $[0,1[$ et au-dessus pour $t>1$

C) le graphe de la fonction f_n est au-dessous du graphe de la fonction g pour t appartenant à $]0,1[$, au-dessus pour $t>1$ et les deux graphes se coupent uniquement au point $(0,1)$

D) le graphe de la fonction f_n est au-dessus du graphe de la fonction g pour t appartenant à $]0,1[$, au-dessous pour $t>1$ et les deux graphes se coupent en deux points

30) On montre que la suite de fonctions (f_n)

A) converge uniformément sur I
B) converge absolument et normalement sur I
C) ne converge pas uniformément sur I car (f_n) est une suite de fonctions continues sur I dont la limite simple g n'est pas continue sur I
D) converge uniformément sur l'intervalle $[0,a]$ pour tout a appartenant à $]0,1[$

31) Soit A un réel de l'intervalle I. On désigne par g la limite, si elle existe, de la suite de fonctions (f_n). La suite $(\varphi_n(A))$

A) diverge par conséquent la suite de fonctions (φ_n) diverge sur I
B) converge par conséquent la suite de fonctions (φ_n) converge sur I
C) a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, $\int_0^A g(t)dt$ car la suite (f_n) converge uniformément sur I
D) a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, e^A-1 si $A\leq 1$ et $e-1$ si $A>1$ par application du théorème de convergence dominée à l'intégrale sur le segment $[0,A]$ de la suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I vérifiant l'hypothèse de domination $|f_n(t)| \leq e^t$ pour tout t appartenant à I

32) Soit n un entier naturel fixé et α un réel donné de l'intervalle I. On considère, dans I, l'équation (E) $\varphi_n(x) = \alpha$. On montre que l'équation (E)

A) admet une et une seule solution $x_n(\alpha)$ dans I car φ_n est un C^∞-difféomorphisme de I sur I
B) n'admet pas de solution dans I
C) admet deux solutions dans I
D) admet une infinité de solutions dans I

33) On note, pour tout n entier naturel, x_n, la fonction, si elle existe, qui à α, réel donné de l'intervalle I, associe la solution de l'équation (E) dans I.

A) la fonction x_n n'est pas définie sur I
B) la fonction x_n est strictement croissante sur I
C) la fonction x_n est croissante sur I mais n'est pas strictement croissante sur I
D) la fonction x_n est strictement décroissante sur I

34) Pour tout n entier naturel, la fonction x_n définie à la question 33 est

A) continue sur I mais n'est pas dérivable sur cet intervalle
B) de classe C^1 sur I mais n'est pas deux fois dérivable sur cet intervalle
C) de classe C^∞ sur I à valeurs dans I
D) de classe C^∞ et bornée sur I

35) Pour tout n entier naturel, la fonction x_n définie à la question 33 est

A) solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' = -1/(f_n(y))$
B) solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' = 1/(f_n(y))$
C) solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' = -f_n(y)$
D) solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' = f_n(y)$

36) Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 3, la fonction x_n définie à la question 33

A) vérifie $x_n''(\alpha) = -f_n'(x_n(\alpha))x_n'(\alpha)/(f_n(x_n(\alpha)))^2$ pour tout α appartenant à I
B) vérifie $x_n''(\alpha) = f_n'(x_n(\alpha))x_n'(\alpha)/(f_n(x_n(\alpha)))^2$ pour tout α appartenant à I
C) a un graphe qui possède deux points d'inflexion d'abscisses les réels $\varphi_n(\alpha_n)$ et $\varphi_n(\beta_n)$, α_n et β_n étant les réels définis à la question 25
D) a un graphe qui possède deux points d'inflexion d'abscisses les réels α_n et β_n définis à la question 25

37) En utilisant le résultat $\sum_{k=1}^{+\infty}(1/k^2) = \pi^2/6$ on établit que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}((-1)^{n+1}/k^2)$ a pour somme S

A) $S = \pi^2/4$
B) $S = \pi^2/12$
C) $S = -\pi^2/12$
D) $S = -\pi^2/6$

Soit α un réel de l'intervalle]0,1[. On pose pour tout x réel strictement positif :

$$u(x) = x\int_{\alpha}^{1} \ln(1+t^x)dt$$

38) La série de fonctions de terme général $((-1)^{k+1}t^{kx})/k$, k entier supérieur ou égal à 1

A) est divergente sur l'intervalle]0,1[

B) est uniformément convergente sur l'intervalle]0,1[pour tout x réel strictement positif car pour tout k entier supérieur ou égal à 1, pour tout x réel strictement positif et pour tout t appartenant à]0,1[on a $|R_k(t)| \leq 1/(k+1)$ où $R_k(t)$ désigne le reste associé à la somme partielle d'ordre k de la série

C) est une série alternée absolument convergente sur]0,1[

D) est une série alternée convergente sur I

39) On établit, par une intégration terme à terme de la série de la question 38, que, pour tout x réel strictement positif, $u(x)$ est la somme de la série de terme général $v_k(x)$, k entier supérieur ou égal à 1 telle que

A) $v_k(x)= ((-1)^{k+1}(1-\alpha^{kx+1})x/(k(kx+1))$ pour tout k entier supérieur ou égal à 1

B) $v_k(x)= ((-1)^{k}(1-\alpha^{kx+1})x/(k(kx+1))$ pour tout k entier supérieur ou égal à 1

C) la série de terme général $v_k(x)$ est normalement donc uniformément convergente sur l'intervalle $[1,+\infty[$ car pour tout k entier supérieur ou égal à 1 et pour tout x réel supérieur ou égal à 1, $|v_k(x)| \leq 1/k^2$ terme général d'une série convergente

D) la série de terme général $v_k(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $[1,+\infty[$ mais ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$

40) On montre que

A) la fonction $u(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

B) la fonction $u(x)$ tend vers $\pi^2/12$ lorsque x tend vers $+\infty$

C) la suite de fonctions (x_n), définie à la question 33, est divergente sur $]e-1,+\infty[$ et a, sur cet intervalle, pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

D) la suite de fonctions (x_n), définie à la question 33, est convergente sur $]e-1,+\infty[$

IMPRIMERIE NATIONALE - D'après documents fournis

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2011**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS
DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve facultative de CONNAISSANCES AÉRONAUTIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : bonus

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
4 pages de texte recto/verso

◆

CALCULATRICE NON AUTORISÉE