ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2006**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS
DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

◇

Epreuve commune obligatoire de MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◇

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM
1 page d'avertissement
16 pages de texte, numérotées de 1 à 16

◇

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE
DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve « commune obligatoire de mathématiques » de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

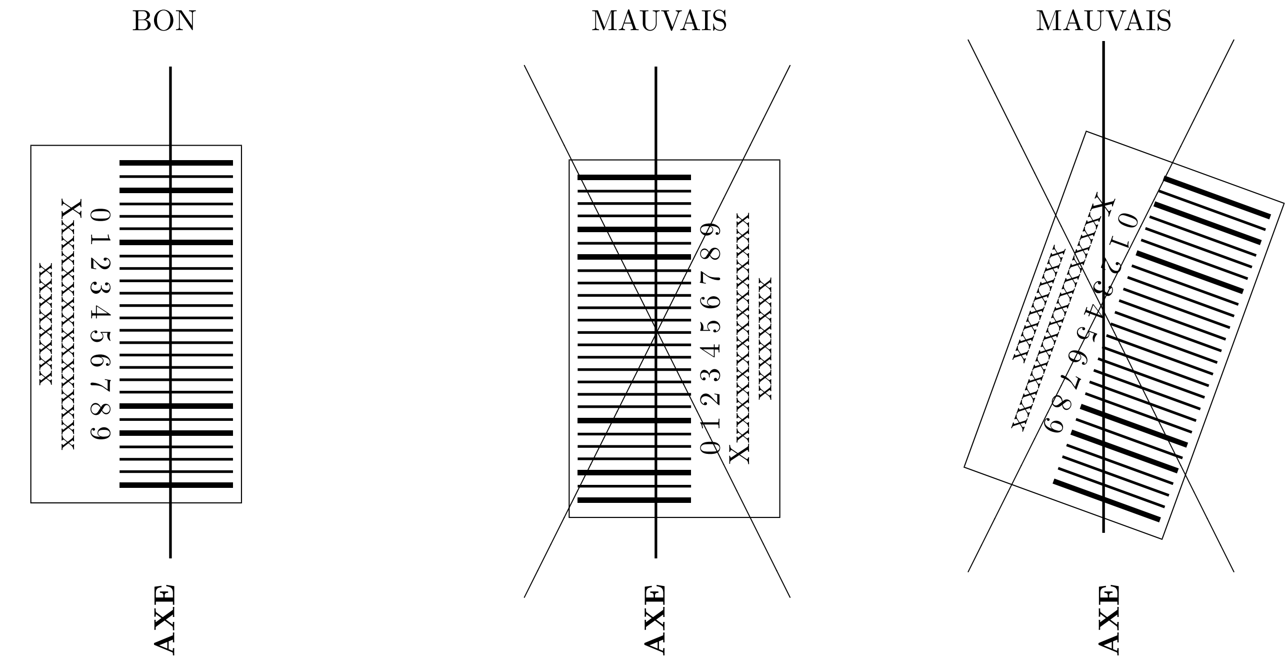
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve commune obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question ,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse
vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne,
vous devez alors noircir la case e.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

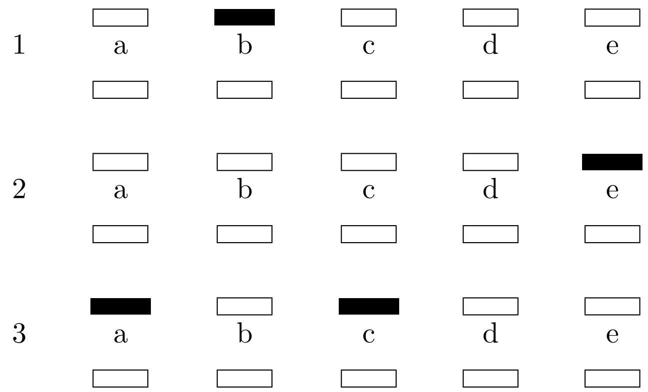
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIEES

1 à 17 et 26, 27 et 33
18 à 27
28 à 33
34 à 40

PARTIE I

Soit n un entier donné supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On note f_α l'application, associée à un nombre réel α quelconque, définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$f_\alpha(P)(X) = X(X-1)P''(X) + (1+\alpha X)P'(X)$ pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$,
où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.

Question 1. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$

a) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, de dimension n sur $\mathbb{R}$

b) est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$

c) n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$

d) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Question 2. L'application f_α

a) n'est pas linéaire

b) est linéaire mais ne peut être un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

c) peut être une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

d) est un endomorphisme de $R_n[X]$

De la question 3 à la question 8, on se place dans le cas particulier où $n = 3$.

Question 3. La matrice M_α associée à l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique

a) est une matrice carrée d'ordre 4, triangulaire inférieure

b) est une matrice symétrique réelle

c) n'existe pas car f_α n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

d) est une matrice carrée d'ordre 3, triangulaire supérieure

Question 4. Cette matrice M_α s'écrit

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha+1) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3(\alpha+2) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha+1) & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3(\alpha+2) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2(\alpha+1) \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2(\alpha+1) & -3 \\ 0 & 0 & 3(\alpha+2) \end{pmatrix}$

Question 5. Les valeurs propres de l'endomorphisme f_α sont

a) toutes distinctes pour tout α réel

b) α, $2(\alpha+1)$, $3(\alpha+2)$ pour tout α réel différent de 0, -1 et -2 car une valeur propre est toujours non nulle

c) α, $2(\alpha+1)$, $3(\alpha+2)$ pour tout α réel

d) 0, α, $2(\alpha+1)$, $3(\alpha+2)$ pour tout α réel

Question 6. De manière générale pour qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E soit diagonalisable il faut et il suffit que

a) son polynôme caractéristique soit scindé et ait toutes ses racines simples

b) l'endomorphisme u annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples

c) les sous-espaces propres de u soient de dimension 1

d) la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à $\dim E$

Question 7. L'endomorphisme f_α

a) n'est diagonalisable pour aucune valeur de α

b) est diagonalisable pour tout α réel, car les valeurs propres sont toutes distinctes

c) est diagonalisable car la matrice M_α est symétrique réelle

d) est diagonalisable au moins dans le cas où α est distinct de 0, -1 et -2

Question 8. Toujours dans le cas où $n = 3$, l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles l'endomorphisme f_α admet au moins une valeur propre double

a) est vide

b) est l'ensemble $\{-2, -1, 0\}$ et la seule valeur propre double possible est 0

c) est l'ensemble $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$ et les seules valeurs propres doubles possibles sont 0 pour $\alpha = -1$ ou 0 ; 0 et -2 pour $\alpha = -2$; -3 pour $\alpha = -3$ et -6 pour $\alpha = -4$

d) est l'ensemble $\{-4, -3\}$ puisqu'une valeur propre est nécessairement non nulle

Question 9. Revenant à partir de cette question au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2, la matrice M_α, associée à l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficients $(M_\alpha)_{i,j}$ est

a) carrée d'ordre n et triangulaire supérieure

b) carrée d'ordre $n+1$ et triangulaire inférieure

c) telle que pour tout couple d'entiers i et j compris entre 1 et $n+1$
$(M_\alpha)_{i,i} = i(\alpha+i-1)$; $(M_\alpha)_{i,i+1} = i^2 - 1$; $(M_\alpha)_{i,j} = 0$ pour $j > i+1$ ou $j < i$

d) telle que $(M_\alpha)_{i,i} = (i-1)(\alpha+i-2)$; $(M_\alpha)_{i,j} = 0$ pour $j > i+1$ ou $j < i$ pour tout couple d'entiers i et j compris entre 1 et $n+1$ et $(M_\alpha)_{i,i+1} = -i(i-2)$ pour tout i compris entre 1 et n

Question 10. a) les valeurs propres de f_α sont $\lambda_k = k(\alpha+k-1)$ pour k entier compris entre 0 et n

b) les valeurs propres de f_α sont $\lambda_k = (k-1)(\alpha+k-2)$ pour k entier compris entre 1 et n

c) pour que f_α admette au moins une valeur propre double, il faut que α soit entier compris entre $-2(n-1)$ et 0

d) il n'existe pas de réel α tel que f_α admette au moins une valeur propre double

Question 11. On suppose, dans cette question, que $\alpha = -(2q+1)$ où q est un entier tel que $0 < 2q+1 < 2n-2$ et on note λ_k les valeurs propres de l'endomorphisme f_α

a) les entiers k' et k'' tels que $k' < k''$ et $\lambda_{k'} = \lambda_{k''}$ vérifient $k' + k'' = 2q + 4$

b) les entiers k' et k'' tels que $k' < k''$ et $\lambda_{k'} = \lambda_{k''}$ vérifient $k' + k'' = 2q + 1$

c) si $2q + 2 > n$ alors on a

$$n - q - 1 \text{ valeurs propres doubles } \lambda_{2q+2-n} = \lambda_n,\ \ldots,\ \lambda_{2q+2-i} = \lambda_i,\ \ldots,\ \lambda_{q+2} = \lambda_q$$

et $2q + 3 - n$ valeurs propres simples $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{2q+1-n},\ \lambda_{q+1}$

d) si $2q + 2 \leqslant n$ alors on a

$$q \text{ valeurs propres doubles } \lambda_1 = \lambda_{2q+1},\ \ldots,\ \lambda_{q+2} = \lambda_q$$

et $n - 2q + 1$ valeurs propres simples $\lambda_0,\ \lambda_{q+1},\ \lambda_{2q+2},\ \ldots,\ \lambda_n$

Question 12. On désigne par $\operatorname{Ker} f_\alpha$ le noyau de f_α et par $\operatorname{Im} f_\alpha$ l'image de f_α

a) si α n'est pas un entier de $[1-n, 0]$ alors $\dim \operatorname{Ker} f_\alpha = 1$ car 0 est valeur propre simple de f_α

b) si α est un entier de $[1-n, 0]$ alors $\dim \operatorname{Ker} f_\alpha = 2$ car 0 est valeur propre double de f_α

c) si α est un entier de $[1-n, 0]$ alors $\dim \operatorname{Im} f_\alpha = n + 1 - \dim \operatorname{Ker} f_\alpha = n - 1$

d) si α n'est pas un entier de $[1-n, 0]$ alors $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'espace des polynômes constants

Question 13. On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$

a) la matrice M_α est de rang au plus égal à $n - 1$ car 0 est valeur propre double

b) la matrice M_α est de rang n et $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'ensemble des polynômes constants

c) l'endomorphisme f_α est diagonalisable

d) l'endomorphisme f_α n'est pas diagonalisable car $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'espace, de dimension 1, des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme aX

Question 14. On suppose, dans cette question, que $\alpha = -1$

a) toutes les valeurs propres non nulles de f_α sont simples

b) la matrice M_α est de rang n

c) l'endomorphisme f_α n'est pas diagonalisable car ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes

d) $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'espace, de dimension 2, des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme $a + bX^2$

Question 15. Dans cette question, on suppose que n est un entier strictement supérieur à 3 et $\alpha = 1 - p$ où p est un entier compris entre 3 et n

a) l'endomorphisme f_α est diagonalisable car toutes ses valeurs propres sont simples

b) l'endomorphisme f_α n'est pas diagonalisable car $\operatorname{Ker} f_\alpha$ se réduit à l'espace des polynômes constants

c) $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'espace, de dimension 2, des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$a + b\left\{(1/p)\,(X-1)^p + (1/(p-1))\,(X-1)^{p-1}\right\}$$

d) $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est l'espace des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$b\left\{(X-1)^{p-1} + (X-1)^{p-2}\right\}$$

Question 16. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où $n = 3$ et $\alpha = -4$

a) les vecteurs propres de f_α associés à la valeur propre -4 sont les polynômes

$$b(-4X + 1), \text{ pour tout } b \text{ réel}$$

b) l'ensemble des vecteurs propres de f_α associés à la valeur propre -6 est l'ensemble des multiples du polynôme X^2

c) l'endomorphisme f_α n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à la valeur propre double de -4 est de dimension 1

d) l'endomorphisme f_α est diagonalisable

Question 17. Soit λ_p, différent de 0, une valeur propre simple de f_α, p étant un entier compris entre 1 et n. On a, Π désignant le produit,

a) $\lambda_p = (p-1)(\alpha+p-2)$ et λ_p est distinct de λ_k pour tout entier k différent de p

b) l'espace $\mathbb{R}^p$ est stable par f_α

c) le polynôme $a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ est un vecteur propre de f_α si et seulement si
$$\lambda_p a_i = \lambda_i a_i - \left(i^2-1\right) a_{i+1} \text{ pour tout entier } i \text{ compris entre 1 et } p-1$$

d) le polynôme $a_0 + \cdots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$, avec, pour tout i, entier compris entre 0 et $p-1$,
$$a_i = \prod_{k=1}^{p-1} \left(k^2-1\right) / (\lambda_k - \lambda_p) \text{ est un vecteur propre de } f_\alpha \text{ associé à } \lambda_p$$

PARTIE II

On considère l'équation différentielle
$$(1) \qquad x(x-1)y''(x) + (1+\alpha x)y'(x) - \mu y(x) = 0$$
pù α est un réel donné différent de 0 et μ un réel.
On note $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ une solution de (1), si elle existe, développable en série entière de rayon de convergence R. Π désigne le produit et Σ désigne la somme.

Question 18.

a) il n'existe pas de solution de (1) développable en série entière de rayon de convergence non nul

b) les coefficients a_k de S vérifient $a_{k+1} = a_k\left[k(\alpha+k-1)-\mu\right] / \left(k^2+1\right)$ pour tout k entier naturel

c) les coefficients a_k de S vérifient $\left[k(k-1)(x-1)+k(1+\alpha x)\right] a_k = \mu a_{k-1}$ pour tout k entier supérieur ou égal à 1

d) les coefficients a_k de S vérifient $a_{k+1} = a_k\left[k(\alpha+k-1)-\mu\right] / \left(k^2-1\right)$ pour tout k entier supérieur ou égal à 2, a_0 et a_1 étant quelconques

Question 19. Pour tout μ réel, le rayon de convergence R d'une telle série entière S vérifie

a) $R = +\infty$

b) $R = 1$ car $a_{k+1}/a_k = \left[k\left(\alpha+k-1\right)-\mu\right] / \left(k^2-1\right)$ tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$

c) $R = 0$

d) $1 \leqslant R$

Dans les deux questions suivantes **20** et **21** on suppose
μ non nul et distinct de α

Question 20. La série entière S solution de (1), si elle existe, vérifie alors

a) $a_0 = a_1 = 0$ et $a_k = a_2 \prod_{p=2}^{k-1} \left[p\left(\alpha+p-1\right)-\mu\right] / \left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

b) $a_0 = a_1 = 0$ et $a_k = \prod_{p=2}^{k-1} \left[p\left(\alpha+p-1\right)-\mu\right] / \left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

c) $a_0 = a_1 = 0$ et $a_k = a_2 \sum_{p=2}^{k-1} \left[p\left(\alpha+p-1\right)-\mu\right] / \left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

d) a_0 et a_1 quelconques et $a_k = a_2\left[\left(k\left(\alpha+k-1\right)-\mu\right) / \left(k^2-1\right)\right]^{k-2}$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

Question 21.

a) l'espace des solutions de (1) développables en série entière est de dimension 2

b) il n'existe pas de solution polynomiale de (1)

c) il existe une solution polynomiale de (1) si et seulement si il existe p entier supérieur ou égal à 2 tel que $p\,(\alpha+p-1)=\mu$

d) l'ensemble des solutions de (1) développables en série entière de rayon de convergence non nul est vide

Dans les deux question suivantes **22** et **23** on suppose $\mu=\alpha$

Question 22. On a

a) $a_0=a_1=0$ et $a_k=a_2\prod_{p=2}^{k-1}[p\,(\alpha+p-1)-\mu]\,/\,\left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

b) $a_1=\mu a_0$ et $a_k=a_2\prod_{p=2}^{k-1}[p\,(\alpha+p-1)-\mu]\,/\,\left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_0 et a_2 quelconques

c) l'espace des solutions de (1) développables en série entière de rayon de convergence non nul est de dimension 2

d) l'espace des solutions de (1) développables en série entière de rayon de convergence non nul est de dimension 1

Question 23. On a

a) pour que toutes les solutions de (1) développables en série entière soient polynomiales il faut et il suffit que $\alpha=-1$

b) les solutions de (1) développables en série entière sont toutes polynomiales

c) pour α différent de -1, il n'existe pas de solution polynomiale de (1)

d) pour α différent de -1, les seules solutions polynomiales de (1) sont de la forme $S_1(x)=C\,(1+\mu x)$ avec C réel

Dans les deux questions suivantes **24** et **25** on suppose $\mu=0$

Question 24. On a alors

a) $a_0=a_1=0$ et $a_k=a_2\prod_{p=2}^{k-1}p\,(\alpha+p-1)\,/\,\left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3, avec a_2 quelconque

b) a_0 et a_2 quelconques, $a_1=0$ et $a_k=\prod_{p=2}^{k-1}p\,(\alpha+p-1)\,/\,\left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3

c) a_0 et a_2 quelconques, $a_1=0$ et $a_k=a_2\sum_{p=2}^{k-1}p\,(\alpha+p-1)\,/\,\left(p^2-1\right)$ pour tout k supérieur à 3

d) a_0 et a_2 quelconques, $a_1=0$ et $a_k=a_2\left[(k\,(\alpha+k-1)-\mu)\,/\,\left(k^2-1\right)\right]^{k-2}$ pour tout k supérieur à 3

Question 25.

a) l'espace des solutions de (1) développables en série entière de rayon de convergence non nul est de dimension 1

b) pour que toutes les solutions de (1) développables en série entière soient polynomiales il faut et il suffit que α soit un entier inférieur ou égal à -1

c) pour α différent de -1, les seules solutions polynomiales de (1) sont de la forme $S_1(x)=C\,(1+\mu x)$ avec C réel

d) dans le cas où α est un entier strictement positif ou un réel non entier, il n'existe pas de solution polynomiale de (1)

Soit E_1 l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans l'intervalle $]-1,1[$ qui sont sommes de séries entières convergentes dans cet intervalle.
On considère l'endomorphisme F_α de l'espace vectoriel E_1 défini par :
$$F_\alpha(u)(x)=x(x-1)u''(x)+(1+\alpha x)u'(x) \text{ pour tout } x \text{ appartenant à }]-1,1[$$
où α est un réel donné non nul.

Question 26. Comparant l'endomorphisme F_α de l'espace vectoriel E_1 et l'endomorphisme f_α étudié dans la **partie I**, on a

a) F_α et f_α coïncident sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc F_α et f_α ont les mêmes valeurs propres

b) les valeurs propres de f_α sont valeurs propres de F_α mais il peut exister des valeurs propres de F_α qui ne sont pas valeurs propres de f_α

c) toute valeur propre de F_α est valeur propre de f_α

d) les vecteurs propres de f_α sont vecteurs propres de F_α mais les vecteurs propres de F_α ne sont vecteurs propres de f_α que si ce sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Question 27. Soit λ une valeur propre double de f_α dont le sous-espace propre associé est de dimension 2, alors on a nécessairement

a) le sous-espace propre de F_α associé à λ contient un sous-espace de polynômes de dimension 2

b) $\lambda = \alpha$ pour tout α réel non nul

c) $\lambda = 0$ et α entier strictement positif

d) $(\lambda = \alpha = -1)$ ou ($\lambda = 0$ et α entier inférieur ou égal à -1)

PARTIE III

On considère l'équation différentielle

$$(2) \qquad x(x-1)z'(x) + (1+\alpha x)z(x) = 0$$

où z est une fonction réelle de classe C^1 sur $]0,1[$, α étant un nombre réel donné différent de 0

Question 28. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) sur l'intervalle $]0,1[$ est

a) un espace vectoriel de dimension 2

b) l'ensemble des fonctions de la forme $K_1 x + K_2(1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K_1 et K_2 réels

c) l'ensemble des fonctions de la forme $Kx(1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K réel

d) l'ensemble des fonctions de la forme $K\left[(1-x)^{(1+\alpha)}\right]/x$ avec K réel

On considère L_α l'application définie dans l'espace vectoriel $C^2(]0,1[)$ des fonctions réelles deux fois continuement dérivables dans $]0,1[$ à valeurs dans l'espace vectoriel $C^0(]0,1[)$ des fonctions réelles définies et continues dans $]0,1[$ telle que :

$$L_\alpha(h)(x) = x(x-1)h''(x) + (1+\alpha x)h'(x) \text{ pour tout } x \text{ appartenant à }]0,1[$$

où α est un réel donné non nul

Question 29. Pour tout α réel non nul, le noyau $\operatorname{Ker} L_\alpha$ de l'application L_α est l'ensemble des fonctions h de l'espace $C^2(]0,1[)$ telles que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$:

a) $h(x) = \left(K_1 x^2/2\right) + \left(K_2\left[(1-x)^{-\alpha}\right]/\alpha\right) + K_3$ avec K_1, K_2, K_3 réels

b) $h(x) = K_1\left\{\left[\left((1-x)^{-\alpha}\right)/\alpha\right] + \left[\left((1-x)^{(1-\alpha)}\right)(\alpha-1)\right]\right\} + K_2$ avec K_1 et K_2 réels

c) $h(x) = 0$ et l'application linéaire L_α est injective

d) $h'(x) = K\left[(1-x)^{(1+\alpha)}\right]/x$ avec K réel

Question 30. a) pour tout α réel non nul, le noyau $\operatorname{Ker} L_\alpha$ est de dimension 1

b) pour $\alpha = 1$, le noyau $\operatorname{Ker} L_\alpha$ contient des polynômes autres que les constantes

c) pour α réel non nul distinct de 1, le noyau $\operatorname{Ker} L_\alpha$ se réduit à des polynômes si et seulement si $(\alpha-1)(1-x)^{-\alpha} + \alpha(1-x)^{(1-\alpha)}$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

d) pour α réel non nul distinct de 1, le noyau $\operatorname{Ker} L_\alpha$ se réduit à des polynômes si et seulement si α est un entier strictement négatif

Soit λ_k une valeur propre non nulle de l'endomorphisme f_α défini dans la **partie I**, et P un vecteur propre associé de f_α associé à la valeur propre λ_k.
On considère alors l'équation : (3) $L_\alpha(v) = \lambda_k v$

Question 31. On suppose qu'une solution v de l'équation (3) est de la forme $v = Pu$ où u est une fonction inconnue de $C^2(]0,1[)$. On a alors :

a) $x(x-1)P''(x) + (1+\alpha x)P'(x) = \lambda_k P(x)$ pour tout x appartenant à $]0,1[$ car $L_\alpha(P) = \lambda_k P$

b) $P^2 u'$ ne peut vérifier l'équation différentielle (2)

c) Pu vérifie l'équation différentielle (2)

d) $x(x-1)\left[2P(x)P'(x)u'(x) + P^2(x)u''(x)\right] + (1+\alpha x)P^2(x)u'(x) = 0$

Question 32. On obtient, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$

a) $P(x)u(x) = Kx(1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K réel

b) $P^2(x)u'(x) = Kx(1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K réel

c) $P^2(x)u'(x) = K\left[(1-x)^{(1+\alpha)}\right]/x$ avec K réel

d) $P^2(x)u'(x) = K_1 x + K_2(1-x)^{-(1+\alpha)}$ avec K_1 et K_2 réels

Question 33. On suppose, dans cettte question, $\lambda_k = \alpha = 2$. On a dans ce cas, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$

a) $(1+2x)u'(x) = K\left[(1-x)^3\right]/x$ avec K réel

b) $(1+2x)^2 u'(x) = Kx/(1-x)^3$ avec K réel

c) $u(x) = K\left[x(1-x)^3\right]/(1+2x)^2$

d) $v(x) = \left\{K_1/(1-x)^2\right\} + K_2(1+2x)$ avec K_1 et K_2 réels, est solution de l'équation (3)

PARTIE IV

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(t) = e^{-t}/t$$

On désigne par x un réel.

Question 34. On suppose, dans cette question, x réel strictement positif, on a alors

a) f est continue sur l'intervalle $[x,+\infty[$ donc intégrable sur cet intervalle

b) pour que f soit intégrable sur $[x,+\infty[$ il suffit que f soit positive, continue par morceaux sur $[x,+\infty[$ et que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$

c) la fonction f n'est pas intégrable sur $[x,+\infty[$ car la fonction $1/t$ n'est pas intégrable sur cet intervalle

d) la fonction f est intégrable sur $[x,+\infty[$ car la fonction f est positive, continue sur $[x,+\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à la fonction e^{-t} intégrable sur $[x,+\infty[$

Question 35. On suppose, dans cette question, $x = 0$, on a alors, $|f|$ désignant la fonction module de f

a) f n'est pas intégrable sur $[x,+\infty[$ car une condition nécessaire d'intégrabilité est que la fonction f soit définie et continue sur $[x,+\infty[$

b) f n'est pas intégrable sur $]x,+\infty[$ car une condition nécessaire d'intégrabilité est que la fonction $|f|$ soit continue ou prolongeable par continuité sur $[x,+\infty[$

c) f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ mais est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque la fonction f est positive et continue sur $]0,+\infty[$

d) f n'est intégrable ni sur $[0,+\infty[$, ni sur $]0,+\infty[$ car la fonction positive f est équivalente, au voisinage de 0, à la fonction $1/t$ non intégrable sur $]0,1]$

Question 36. Dans cette question, on suppose x réel strictement négatif, on a alors

a) f est intégrable sur $[1,+\infty[$ car la fonction f est positive continue sur $[1,+\infty[$ et la fonction $t^2 f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$

b) f est intégrable sur $[x,+\infty[$ car f est intégrable sur $[x,0]$ et sur $]0,+\infty[$

c) f n'est intégrable ni sur $[x,0[$, ni sur $]0,+\infty[$

d) f est intégrable sur $[x,0[$ car f est continue et de signe constant sur cet intervalle

Question 37. On note F la fonction définie, lorsqu'elle existe, par

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ pour } x \text{ réel tel que l'intégrale converge}$$

a) F est définie sur $\mathbb{R}$

b) F n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$

c) F est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est de classe C^1 que sur $\mathbb{R}_+^*$

d) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F'(x) = -e^{-x}/x$ pour tout x strictement positif car
$$F(x) = \int_x^A f(t)\ \mathrm{d}t + K_A \text{ où } A \text{ est strictement positif et } K_A \text{ une constante}$$

Question 38. On pose $g(t) = e^{-t}/t^2$ pour tout réel t strictement positif

a) $F(x) = (e^{-x}/x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout x strictement positif

b) $F(x) - (e^{-x}/x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout x strictement positif

c) En $+\infty$ $F(x)$ est équivalente à $-e^{-x}/x$ car $e^{-x}/x^2 = o\left(e^{-x}/x\right)$

d) En $+\infty$ $F(x)$ est équivalente à e^{-x}/x car $0 < \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\ \mathrm{d}t \leqslant g(x)$ qui est négligeable devant e^{-x}/x

Question 39. On considère la suite $(I_n)_{n>0}$ définie, si elle existe, par

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left[e^{-t}/(t+n)\right]\ \mathrm{d}t \text{ pour tout } n \text{ entier strictement positif}$$

a) la fonction $e^{-t}/(t+n)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout entier naturel n

b) pour tout n entier strictement positif, on obtient en introduisant un changement de variable bijectif, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\quad I_n = e^n \displaystyle\int_n^{+\infty} f(u)\ \mathrm{d}u$

c) la suite I_n est équivalente, en $+\infty$, à $e^n e^{-n}/n = 1/n$

d) la suite I_n est équivalente, en $+\infty$, à e^{-2n}/n

Question 40. On considère, lorsqu'elle existe, la fonction G définie par :

$$G(x) = F(1) - F(x) - \ln|x|, \text{ où } |x| \text{ désigne la valeur absolue de } x,$$

et on pose $h(t) = \left(1 - e^{-t}\right)/t$ pour tout t strictement positif

a) la fonction h est intégrable sur $]0, 1]$ car h est positive, continue sur $]0, 1]$ et $h(t)$ a une limite finie -1 lorsque t tend vers 0

b) la fonction h n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car la fonction h n'est pas positive sur cet intervalle

c) $G(x) = \displaystyle\int_x^1 h(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout x réel non nul

d) $G(x)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers 0