**ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE** **Session 2009**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS
DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

◆

***Epreuve commune obligatoire de MATHEMATIQUES***

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
1 page d'avertissement
15 pages de texte recto/verso

◆

**CALCULATRICE AUTORISEE**

# ÉPREUVE COMMUNE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

*A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve «commune obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

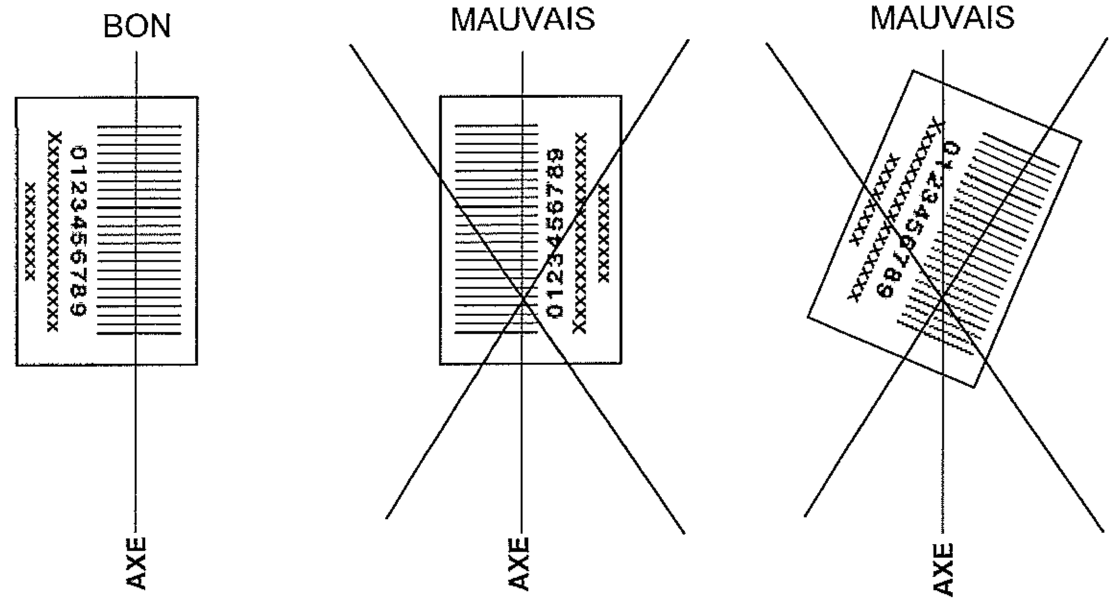
**ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM**

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve commune obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

**POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES**

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :




2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée avant l'énoncé du sujet lui-même.
**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
*la ligne correspondante doit rester vierge.*

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
*vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.*

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
*vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.*

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne :
*vous devez alors noircir la case e.*

**Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.**

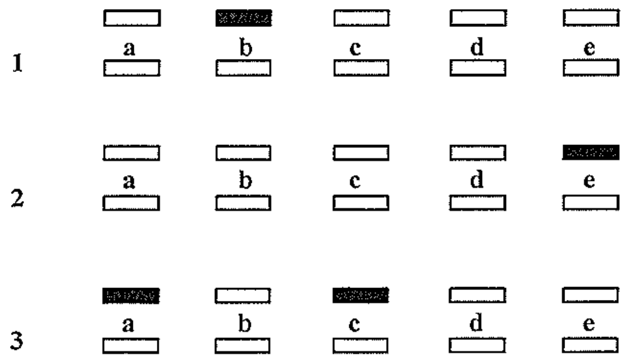
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**



# AVERTISSEMENT

# QUESTIONS LIEES

**Problème 1 : 1 à 11**
**Problème 2 : 12 à 25**

## Problème 1 :Transformée de Laplace

On notera $\Re$ l'ensemble des réels et E l'ensemble des fonction f réelles, définies et continues sur $[0,+\infty[$ et telle que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ soit absolument convergente.

Question 1 : Lesquelles des assertions suivantes sont vraies :

a) E n'est pas un espace vectoriel car il existe des applications f réelles définies et continues sur $[0,+\infty[$ et telles que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ ne converge pas.

b) E est un sous espace vectoriel réel de l'espace vectoriel des fonctions réelles.

c) E contient toutes les fonctions réelles définies et continues sur $[0,+\infty[$ et bornées.

d) E contient toutes les fonctions réelles définies et continues sur $[0,+\infty[$ et majorées.

Question 2 : On défini l'application L par : L(f)(x)= $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt, \forall x > 0$.

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $x \to \cos x \in E$ car $|\cos x| \leq 1, \forall x \geq 0$ et $\forall x > 0$, L(cos)(x)=$\dfrac{-x}{1+x^2}$

b) $x \to \cos x \in E$ car $|\cos x| \leq 1, \forall x \geq 0$ et $\forall x > 0$ ,L(cos)(x)=$\dfrac{x}{1+x^2}$

c) $x \to \sin x \in E$ car $|\sin x| \leq 2, \forall x \geq 0$ et $\forall x > 0$ ,L(sin)(x)=$\dfrac{1}{1+x^2}$

d) $x \to \sin x \in E$ car $|\sin x| \leq 2, \forall x \geq 0$ et $\forall x > 0$ ,L(sin)(x)=$\dfrac{-1}{1+x^2}$

Question 3 : Pour $\lambda \in \Re$ ,on notera $f_\lambda : \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[ \to \Re \\ x \to e^{-\lambda x} \end{array} \right.$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $f_\lambda \in E$ si et seulement si $\lambda > 0$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x-\lambda}$

b) $f_\lambda \in E$ si et seulement si $\lambda \geq 0$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x-\lambda}$

c) $f_\lambda \in E$ si et seulement si $\lambda > 0$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$

d) $f_\lambda \in E$ si et seulement si $\lambda \geq 0$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$

Question 4 : Pour un entier naturel n, on notera $\varepsilon_n : \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[ \to \Re \\ x \to x^n \end{array} \right.$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) Si $\varepsilon_n \in E$ alors $\varepsilon_{n+1} \in E$ et $\forall x > 0$, $L(\varepsilon_{n+1}) = \dfrac{n+1}{x} L(\varepsilon_n)$, $\forall n \geq 0$

b) Si $\varepsilon_n \in E$ alors $\varepsilon_{n+1} \in E$ et $\forall x > 0$, $L(\varepsilon_{n+1}) = -\dfrac{n+1}{x} L(\varepsilon_n)$, $\forall n \geq 0$

c) $\forall n \geq 0$, $\varepsilon_n \in E$ et $\forall x > 0$, $L(\varepsilon_n) = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+1}}$

d) $\forall n \geq 0$, $\varepsilon_n \in E$ et $\forall x > 0$, $L(\varepsilon_n) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Question 5 : Dans cette question f est un élément de E. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\forall \lambda \in \Re$, $f_\lambda f \in E$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda f)(x) = L(f)(x-\lambda)$
b) $\forall \lambda \geq 0$, $f_\lambda f \in E$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda f)(x) = L(f)(x-\lambda)$
c) $\forall \lambda \in \Re$, $f_\lambda f \in E$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda f)(x) = L(f)(x+\lambda)$
d) $\forall \lambda \geq 0$, $f_\lambda f \in E$ et $\forall x > 0$, $L(f_\lambda f)(x) = L(f)(x+\lambda)$

Question 6 : Dans cette question f est un élément de E. parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) La définition de l'ensemble E nous permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{xt}{2}} f(t)dt$ converge absolument vers $L(f)\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x > 0$.

b) Le changement de variable $\tau = \frac{t}{2}$ nous permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{xt}{2}} f(t)dt$ converge absolument vers $L(f)\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x > 0$.

c) Pour tout x réel, pour tout entier naturel n, les théorèmes de croissances comparées permettent de dire que $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{xt}{2}} t^n = 0$, soit encore qu'il existe un réel M tel que $\forall t \geq 0, e^{\frac{-xt}{2}} t^n \leq M$

d) Si n est un entier naturel alors $\varepsilon_n f \in E$

Question 7 : Soient I et J deux intervalles de $\Re$ et g une fonction réelle définie sur IxJ. On vous demande de choisir les hypothèses du théorème de continuité sous le signe $\int$ qui permettra de conclure que $x \to \int_J g(x,t)dt$ est une fonction continue sur I

a) g est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t. Pour tout t dans J, $\int_I g(x,t)dx$ converge. Il existe une fonction $\varphi$, positive, continue par morceaux sur J et telle que $\int_J \varphi(t)dt$ converge et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x,t) \in IxJ$.

b) g est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t. Pour tout x dans I, $\int_J g(x,t)dt$ converge. Il existe une fonction $\varphi$, positive, continue par morceaux sur J et telle que $\int_J \varphi(t)dt$ converge et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x,t) \in IxJ$.

c) g est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t. Pour tout t dans J, $\int_I |g(x,t)|dx$ converge. Il existe une fonction $\varphi$, positive, continue par morceaux sur J et telle que $\int_J \varphi(t)dt$ converge et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x,t) \in IxJ$.

d) g est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t. Pour tout x dans I, $\int_J |g(x,t)|dt$ converge. Il existe une fonction $\varphi$, positive, continue par morceaux sur J et telle que $\int_J \varphi(t)dt$ converge et $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x,t) \in IxJ$.

Question 8 : Dans cette question $f \in E$. $g : (x,t) \to e^{-xt} f(t)$ est alors continue sur $]0,+\infty[ \times [0,+\infty[$ . Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies

a) $|g(x,t)| \le |f(t)|$ $\forall t \ge 0, \forall x \ge 0$ et comme $f \in E$, $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente et donc par application du théorème de continuité sous le signe $\int$ on peut conclure que L(f) est continue sur $]0,+\infty[$.

b) $\forall x_0 > 0, |g(x,t)| \le |e^{-x_0 t} f(t)|$ $\forall t \ge 0, \forall x \ge x_0$ et comme $f \in E$, $\int_0^{+\infty} |e^{-x_0 t} f(t)| dt$ est convergente et donc par application du théorème de continuité sous le signe $\int$ on peut conclure que L(f) est continue sur $]0,+\infty[$.

c) $\forall x_0 > 0, |g(x,t)| \le |e^{-x_0 t} f(t)|$ $\forall t \ge 0, \forall x \ge x_0$ et comme $f \in E$, $\int_0^{+\infty} |e^{-x_0 t} f(t)| dt$ est convergente et donc par application du théorème de continuité sous le signe $\int$ on peut conclure que L(f) est continue sur $[0,+\infty[$.

d) L est une application linéaire de E dans l'espace des fonctions continues de $]0,+\infty[$ sur $\Re$.

Question 9 : Dans cette question $f \in E$. On note encore $g : (x,t) \to e^{-xt} f(t)$ et g est continue sur $]0,+\infty[ \times [0,+\infty[$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) g admet une dérivée partielle par rapport à x et $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $]0,+\infty[ \times [0,+\infty[$.
De plus, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le t e^{-x_0 t} f(t)$ $\forall t \ge 0, \forall x \ge x_0$ et comme $\varepsilon_1 f \in E$, $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} t f(t) dt$ est absolument convergente. On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

b) g n'admet pas nécessairement de dérivée partielle par rapport à t et on ne peut donc pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

c) L(f) est $C^\infty(]0,+\infty[, \Re)$ et pour tout entier naturel n, $[L(f)]^{(n)} = L(\varepsilon_n f)$

d) L(f) est $C^\infty(]0,+\infty[, \Re)$ et pour tout entier naturel n non nul, $[L(f)]^{(n)} = (-1)^{n-1} L(\varepsilon_n f)$

**NB : Les questions 10 et 11 proposent une autre voie pour l'étude de la dérivabilité de L(f)**

Question 10 : Si f est une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $[a,b]$ (a et b deux réels $a<b$) la formule de Taylor avec reste de Lagrange s'écrit :

a) Pour tout entier naturel n, $\exists c \in ]a,b[, f(b)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}$

b) Pour tout entier naturel n, $\exists c \in ]a,b[, f(b)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Ce qui permet d'obtenir l'inégalité suivante:

c) $\forall u \in \Re, \left|e^u-1-u\right| \leq \frac{u^2}{2}e^u$

d) $\forall u \in \Re, \left|e^u-1-u\right| \leq \frac{u^2}{2}e^{|u|}$

Question 11 : On peut déduire de la question précédente que :

a) $\forall x>0, \forall h \in \left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[, \left|e^{-(x+h)t}-e^{-xt}+hte^{-xt}\right| \leq \frac{h^2t^2}{2}e^{-\frac{xt}{2}}$

b) $\forall x>0,\ \forall h \in \left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[, \left|\frac{L(f)(x+h)-L(f)(x)}{h}-L(\varepsilon_1 f)(x)\right| \leq \frac{h}{2}L(\varepsilon_2 f)\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $\forall x>0,\ \forall h \in \left]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right[, \left|\frac{L(f)(x+h)-L(f)(x)}{h}+L(\varepsilon_1 f)(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}L(\varepsilon_2 f)\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $\forall x>0$, L(f) est dérivable en x et $[L(f)]'(x) = -L(\varepsilon_1 f)(x)$

## Problème 2 : Polynômes de Bernoulli

Question 12 : On considère une suite de polynômes $(B_n)_{n\in IN}$ à coefficients réels vérifiant

$$B_0=1\ ,\ \ \forall n\geq 1, B'_n=nB_{n-1}\ \text{ et }\ \int_0^1 B_n(t)dt=0$$

On peut alors affirmer :

a) Chaque $B_n$ est défini à une constante additive près

b) On peut démontrer, par récurrence, que la suite $(B_n)_{n\in IN}$ est bien définie de façon unique

c) $B_5=X^5-\frac{5}{2}X^4+\frac{5}{3}X^3-\frac{1}{6}X$

d) Chaque $B_n$ est de degré n et de coefficient dominant $n!$

Question 13 Pour tout entier naturel n, on note $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies :

a) $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C'_{n+1}(X) = (-1)^n (n+1) B_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)dt$

b) $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C'_{n+1}(X) = (-1)^n n B_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 B_n(t)dt$

c) $C_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, C'_{n+1}(X) = (-1)^n n B_n(1-X)$ et $\int_0^1 C_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)dt$

d) Par unicité de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$

Question 14 Les nombres de Bernoulli, sont le termes de la suite $(B_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$. On notera pour tout entier naturel n, $b_n = B_n(0)$ Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) Si f est une fonction continue sur [0,1], $\int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{t+1}{2}\right) dt = \int_0^1 f(t)dt$

b) En s'inspirant de la question 13, on peut montrer que $B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$

c) $\forall n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_{2n+1} = B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

d) $\forall n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$ et $b_{2n} = B_{2n}(1) = B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$

Question 15 : On s'intéresse à la fonction u définie sur $\Re$ par $u(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $u(0) = \ell$ où $\ell$ est un réel fixé. Parmi les assertion suivantes lesquelles sont vraies :

a) Il existe une valeur de $\ell$ pour laquelle u est de classe $C^1$ sur $\Re$, mais elle n'est alors pas deux fois dérivable en 0.

b) Pour toute valeur de $\ell$, $\frac{1}{u}$ admet $\ell + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n+1)!}$ comme développement en série entière avec un rayon de convergence infini.

c) Il existe une unique valeur de $\ell$ pour laquelle $\frac{1}{u}$ admet $\ell + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n+1)!}$ comme développement en série entière avec un rayon de convergence infini.

d) $\frac{1}{u}$ est nécessairement $C^\infty$ sur $\Re$, puisque, toute fonction $C^\infty$ au voisinage d'un point est développable en série entière au voisinage de ce point.

Question 16 : On choisi dès lors et pour la suite de ce problème $\ell = 1$ et on peut affirmer :

a) $u(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

b) $u(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$

c) $u(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^4)$

d) $u(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^4)$

Question 17 : On défini $\forall(x,t) \in \Re x \Re, \phi(x,t) = \begin{cases} u(x)e^{tx} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. A t fixé, on peut donc dire que le développement limité à l'ordre 3 de $x \to \phi(x,t)$ :

a) n'existe pas car $x \to \phi(x,t)$ n'est pas continue en 0

b) existe car $x \to \phi(x,t)$ est continue en 0 et vaut
$1 + \frac{2t-1}{2}x + \frac{6t^2 - 6t + 1}{12}x^2 + \frac{4t^3 - 6t^2 + 2t + 3}{24}x^3 + o(x^3)$

c) existe car $x \to \phi(x,t)$ est continue en 0 et vaut
$1 + \frac{2t+1}{2}x + \frac{6t^2 + 6t + 1}{12}x^2 + \frac{4t^3 - 6t^2 + 2t + 3}{24}x^3 + o(x^3)$

d) existe et vaut $1 + \frac{2t-1}{2}x + \frac{6t^2 - 6t + 1}{12}x^2 + \frac{4t^3 - 6t^2 + 2t + 3}{24}x^3 + o(x^3)$

Question 18 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\phi$ est $C^\infty$ sur $\Re x \Re$ car c'est le produit de $(x,t) \to u(x)$ et de $(x,t) \to e^{xt}$ qui sont toutes deux $C^\infty$ sur $\Re x \Re$.

b) $\frac{\phi(h,t) - \phi(0,t)}{h} = \frac{\frac{h}{e^h - 1}e^{th} - 1}{h} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{h}$ et donc $\phi$ n'est pas $C^\infty$ sur $\Re x \Re$

c) $\frac{\phi(h,t) - \phi(0,t)}{h} = \frac{he^{th} - (e^h - 1)}{h(e^h - 1)} = \frac{th^2 + o(h^2)}{h(e^h - 1)}$ et donc $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = t$

d) $\frac{\phi(h,t) - \phi(0,t)}{h} = \frac{he^{th} - (e^h - 1)}{h(e^h - 1)} = \frac{th^2 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h(e^h - 1)}$ et donc $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,t) = t - \frac{1}{2}$

Question 19 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\forall(x,t)\in\Re^{*}x\Re, \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)=x\phi(x,t)$, mais cette propriété n'est pas vraie pour x=0.

b) $\forall(x,t)\in\Re x\Re, \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)=x\phi(x,t)$

c) $\forall(x,t)\in\Re x\Re, \forall n>0, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{n}\phi}{\partial x^{n}}(x,t)=x\frac{\partial^{n}\phi}{\partial x^{n}}(x,t)+n\frac{\partial^{n-1}\phi}{\partial x^{n-1}}(x,t)$

d) $\forall(x,t)\in\Re x\Re, \forall n>0, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{n}\phi}{\partial x^{n}}(x,t)=x^{n}\frac{\partial^{n}\phi}{\partial x^{n}}(x,t)$

Question 20 : On pose pour tout n entier naturel $A_n(t)=\frac{\partial^{n}\phi}{\partial x^{n}}(0,t)$ . Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies

a) Si a et b sont deux réels (a<b) et que h : $\left|\begin{array}{l}[a,b]x\Re\rightarrow\Re\\(t,x)\rightarrow h(t,x)\end{array}\right.$ est continue par rapport à t sur [a,b] pour tout x réel et dérivable par rapport à x pour tout t réel alors $x\rightarrow\int_a^b h(t,x)dt$ est dérivable sur $\Re$.

b) Pour que la conclusion de a) soit juste il est nécessaire de rajouter $t\rightarrow\frac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ est continue sur [a,b].

c) Pour que la conclusion de a) soit juste il est suffisant de rajouter $t\rightarrow\frac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ est continue sur [a,b].

d) $A_0=1$, $\forall n\in IN, A'_{n+1}=(n+1)A_n$ et $\forall n\in IN, n\geq 1, \int_0^1 A_n(t)dt=0$ et donc $\forall n\in IN, A_n=B_n$

Question 21 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) Pour tout entier naturel N, $\forall(x,t)\in\Re x\Re, xe^{tx}=\left(e^{x}-1\right)\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(t)}{n!}x^{n}$

b) Pour tout entier naturel N,
$\forall(x,t)\in\Re x\Re, \sum_{k=0}^{N}\frac{t^{k}x^{k+1}}{k!}=\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{B_n(t)}{n!}x^{n}\right)+o\left(x^{N}\right)$

c) Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k=0$

d) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}b_k=0$

Question 22 : Dans cette question p est un entier supérieur à1 et $f\in C^{2p}([0,1],\Re)$. On pose pour tout entier k, vérifiant $0\leq k\leq p$, $R_k=\int_0^1\frac{f^{(2k)}(t)B_{2k}(t)}{(2k)!}dt$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\int_0^1 f(t)dt=\frac{f(1)+f(0)}{2}-\frac{f'(1)-f'(0)}{2}b_2+R_1$

b) $\int_0^1 f(t)dt=\frac{f'(1)-f'(0)}{2}b_2+R_1$

c) $\int_0^1 f(t)dt=\frac{f(1)+f(0)}{2}-\sum_{j=1}^{p}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(1)-f^{(2j-1)}(0)\right]+R_p$

d) $\int_0^1 f(t)dt=\sum_{j=1}^{p}\frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(1)-f^{(2j-1)}(0)\right]+R_p$

Question 23 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\forall x\in[0,2\pi[$,

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=2\int_0^1 B_{2k}(t)dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt\cos(nx)+\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2n\pi t)dt\sin(nx)\right]$$

La convergence de la série étant assurée par la continuité de $B_{2k}$ sur $[0,2\pi[$

b) $\forall x\in\Re$,

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=2\int_0^1 B_{2k}(t)dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt\cos(nx)+\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2n\pi t)dt\sin(nx)\right]$$

La convergence de la série étant assurée par la continuité de $B_{2k}$ sur $\Re$

c) $\forall x\in[0,2\pi[$,

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=\int_0^1 B_{2k}(t)dt+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt\cos(nx)+\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2n\pi t)dt\sin(nx)\right]$$

La convergence de la série étant assurée par la continuité de $B_{2k}$ sur $[0,2\pi[$

d) $\forall x\in\Re$,

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)=\int_0^1 B_{2k}(t)dt+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt\cos(nx)+\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2n\pi t)dt\sin(nx)\right]$$

La convergence de la série étant assurée par la continuité de $B_{2k}$ sur $\Re$

Question 24 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

:

a) $\int_0^1 B_{2k}(t)dt = 0$ pour tout k entier naturel

b) $\int_0^1 B_2(t)\cos(2n\pi t)dt = \frac{1}{(2\pi n)^2}$

et pour tout $k \geq 2$ $\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt = \frac{-1}{(2\pi n)^2}\int_0^1 B_{2(k-1)}(t)\cos(2n\pi t)dt$

c) Pour tout $k \geq 2$ $\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt = \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}}$

d) Pour tout $k \geq 2$ $\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2n\pi t)dt = (2k)!\frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}}$

Question 25 : On s'intéresse à la $\xi$ définie par pour tout x réel $\xi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont exactes :

a) L'ensemble de définition de $\xi$ est $[1,+\infty[$

b) L'ensemble de définition de $\xi$ est $]1,+\infty[$

c) Pour tout k entier naturel $b_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2(k-1)}\pi^{2k}}\xi(2k)$

d) $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

## Problème 3 : Des triangles rectangles

Dans ce problème on considère des triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des entiers a, a+1 et c, c étant la longueur de l'hypoténuse.
On note H={ $(a,c) \in \mathbb{N}^2, a \leq c$ et un triangle dont les côtés sont a,a+1 et c est rectangle}.

Question 26 : Pour $T_1 = (a_{T_1}, c_{T_1})$ et $T_2 = (a_{T_2}, c_{T_2})$ deux éléments de H, on défini la relation binaire R par $T_1 R T_2$ si et seulement si $a_{T_1} \leq a_{T_2}$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) T=(a,c) $\in$ H si et seulement si (a,b) $\in (\mathbb{N}^*)^2$ et $2a^2-c^2+2a+1=0$

b) R est une relation d'ordre sur H mais elle est non totale.

c) R est une relation d'ordre totale sur H dont le plus petit élément est (3,5)

d) R n'est pas une relation d'ordre sur H

Question 27 : On cherche à déterminer l'ensemble H en construisant deux suites $(a_n)$ et $(c_n)$ où $(a_n)$ est croissante et $(a_n, c_n) \in H$ décrivant tous les éléments de H. On initialise $a_1 = 3$, $c_1 = 5$ et par convention on posera $a_0 = 0$ et $c_0 = 1$ (notez que $(a_0, c_0) \notin H$) . Parmi les algorithmes suivantes lesquels permettent de donner $(a_n, c_n)$ où n est une entier supérieur à 1 donné?

a)
```
a=3
c=5
Pour i variant de 1 à n
    Si 2i²+2i+1 ≥ 0
        c=√(2i²+2i+1)
        a=a+1
    fin
fin
```

b)
```
a=3
c=5
admissible=1
i=1
tant que admissible=1 et i ≤ n
    Si √(2(a+1)²+2a+3) est un entier
        a=a+1
        c=√(2(a+1)²+2a+3)
    sinon
        admissible=0
    fin
fin
```

c)
```
a=3
c=5
i=1
Pour i variant de 1 à n-1
    admissible=0
    tant que admissible=0
        a=a+1
        Si √(2(a+1)²+2a+3) est un entier
            c=√(2(a+1)²+2a+3)
            admissible=1
        fin
    fin
fin
```

d) Aucun de ces algorithmes ne fonctionne

Question 28 : Les premiers termes de cette suites ainsi définis sont $a_2 = 20$, $a_3 = 119$ et $a_4 = 696$. On veut montrer que pour $n \in \{1,2,3\}$, $\exists(\alpha, \beta) \in \Re x \Re, c_{n+1} + \alpha c_n + \beta c_{n-1} = 0$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\alpha = 6$ et $\beta = -1$
b) $\alpha = -6$ et $\beta = 1$
c) $\alpha = 6$ et $\beta = 1$
d) $\alpha = -6$ et $\beta = -1$

Question 29 : On veut montrer que pour $n \in \{1,2,3\}$ , $\exists(\lambda,\delta) \in \Re x \Re, a_{n+1} + \lambda a_n + \beta a_{n-1} = \delta$ .
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\lambda = -6$ et $\delta = 2$
b) $\lambda = 6$ et $\delta = 2$
c) $\lambda = 6$ et $\delta = -2$
d) $\lambda = -6$ et $\delta = -2$

Question 30 : Dès lors on défini deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par
$u_0 = a_0, u_1 = a_1, v_0 = c_0, v_1 = c_1$ et pour tout entier naturel non nul,
$u_{n+1} + \lambda u_n + \beta u_{n-1} = \delta$
et $v_{n+1} + \alpha v_n + \beta v_{n-1} = 0$ . Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) pour tout k entier naturel non nul $(u_{2k}, v_{2k}) \in H$ et $(u_{2k+1}, v_{2k+1}) \notin H$
b) pour tout k entier naturel non nul $(u_k, v_k) \in H$
c) Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$
d) Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n - 3v_n + 2 \end{cases}$

Question 31: On pose A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On note $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\Re^2$.
Parmi assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) A est diagonalisable car elle est de rang 2.
b) A possède deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
c) Il existe une base de $\Re^2$ constituée de vecteurs propres de A et si P note la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres $PAP^{-1}$ est diagonale
d) Il existe une base de $\Re^2$ constituée de vecteurs propres de A et si P note la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres $P^{-1}AP$ est diagonale

Question 32 : On pose $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ on peut alors affirmer :

a) P est inversible car $\dfrac{P}{\det(P)}$ est orthogonale

b) P est inversible et $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) P est inversible et $PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) P est inversible et $PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Question 33 : Le système $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$ est équivalent à :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} y_{n+1} = (3-2\sqrt{2})y_n + 1 \\ z_{n+1} = (3+2\sqrt{2})z_n + 2 \end{cases}$ en posant $\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} y_{n+1} = (3+2\sqrt{2})y_n + 3 \\ z_{n+1} = (3-2\sqrt{2})z_n - \sqrt{2} \end{cases}$ en posant $\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} y_{n+1} = (3+2\sqrt{2})y_n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ z_{n+1} = (3-2\sqrt{2})z_n + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ en posant $\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} y_{n+1} = (3-2\sqrt{2})y_n + 3 \\ z_{n+1} = (3+2\sqrt{2})z_n - \sqrt{2} \end{cases}$ en posant $\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

## Problème 4 : Endomorphismes <u(x),x>=0

E note un espace euclidien. Son produit scalaire sera noté <.,.>. L'objet de l'étude est de donner quelques propriétés des endomorphismes u vérifiant la propriété

$$(P) \quad \forall x \in E, < u(x), x >= 0$$

Question 34 : Un exemple.
Ici E est l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. On considère l'application $\varphi : \begin{vmatrix} ExE \to \Re \\ (P,Q) \to P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1) \end{vmatrix}$ ainsi que l'endomorphisme u de E défini par $\forall P \in E, u(P) = 2P'(0)X^2 + (P(1) + P(-1))X$

a) $\varphi$ est un produit scalaire sur E et $\forall P \in E, \varphi(u(P), P) = 0$
b) $\varphi$ n'est pas un produit scalaire car notamment $\varphi(X(X^2-1)) = 0$ et $X(X^2-1) \neq 0$
c) u vérifie la propriété (P) pour $\varphi$ .
d) $\left(\frac{X^2+X}{2}, \frac{X^2-X}{2}, 1-X^2\right)$ est une base orthonormée dans laquelle u a pour matrice représentative $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 35 : On retourne ici sur le cas général. On suppose que dimE>0 et on muni E d'une base orthonormée $(e_1,...,e_{\dim E})$ et u est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (P). On note A la matrice représentative de u dans la base $(e_1,...,e_{\dim E})$
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\forall x \in E, <u(x),x>=0 \Rightarrow \forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >=< x, u(y) >$
b) $\forall x \in E, <u(x),x>=0 \Rightarrow \forall (x,y) \in E^2, < u(x), y >= - < x, u(y) >$
c) $\forall (i,j) \in [\![1, \dim E]\!]^2, A(i,j) =< e_i, u(e_j) >$ et $A={}^tA$
d) $\forall (i,j) \in [\![1, \dim E]\!]^2, A(i,j) =< u(e_i), e_j >$ et $-A = {}^tA$

Question 36 : Avec les mêmes notations que dans la question 35 . Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) u vérifie (P) $\Leftrightarrow$ $A={}^tA$
b) u vérifie (P) $\Leftrightarrow$ ${}^tA = -A$
c) u vérifie (P) $\Rightarrow$ $A={}^tA$ et la réciproque est fausse
d) u vérifie (P) $\Rightarrow$ ${}^tA = -A$ et la réciproque est fausse

Question 37 : u est un endomorphisme de E vérifiant (P). $u^2$ note uou et pour F un sous espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ son orthogonal.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\operatorname{Im} u = (\ker u)^{\perp}$ et pour tous sous espaces vectoriels F et G de E
$G = (F)^{\perp} \Rightarrow F \oplus G = E$ donc $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans E
b) $\operatorname{Im} u = (\ker u)^{\perp}$ et pour tous sous espaces vectoriels F et G de E
$G = (F)^{\perp} \Leftrightarrow F \oplus G = E$ donc $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans E
c) u est un projecteur
d) $\ker u = \ker u^2$

Question 38 : u est un endomorphisme de E vérifiant (P). Sp(u) note le spectre de u.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $\mathrm{Sp}(u)=\{0\}$ et u diagonalisable $\Leftrightarrow$ u est l'endomorphisme nul
b) $\forall x \in E, < u^2(x), x >=< u(x), u(x) >$ et $\mathrm{Sp}(u^2) \subset \Re^+$
c) $\forall x \in E, < u^2(x), x >= -< u(x), u(x) >$ et $\mathrm{Sp}(u^2) \subset \Re^-$
d) $u^2$ vérifie la propriété (P)

Question 39 : u est un endomorphisme de E vérifiant (P).
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) $u^2$ est symétrique, et tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel ou complexe étant diagonalisable, u est donc un endomorphisme diagonalisable de E.
b) Si u est non nul alors nécessairement il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$ et $\lambda < 0$
c) Si u est non nul alors nécessairement il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$ et $\lambda > 0$
d) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$, $\lambda \neq 0$ et si x est un vecteur propre de $u^2$ associé à $\lambda$, alors l'espace vectoriel engendré par (x,u(x)) est une droite vectorielle.

Question 40 : u est un endomorphisme de E vérifiant (P). u est non nul et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u^2)$ est une valeur propre non nulle de $u^2$ dont un vecteur propre associé est x. On note F l'espace vectoriel engendré par (x,u(x))
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies :

a) F et $F^{\perp}$ sont tous les deux stables par u.
b) F est stable par u mais pas nécessairement $F^{\perp}$
c) Le rang de u est pair.
d) Le rang de u est impair.