PARTIE I

Pour n entier relatif, on considère la fonction U_n définie sur IR par
$U_n(x) = (-1)^n e^{-|x-n\pi|}$. On désigne par $|\ |$ la valeur absolue et le module.

Question 1. Pour tout n entier relatif, la fonction U_n ainsi définie sur IR

a) est de classe C^1 sur IR
b) vérifie $U_n(x+\pi) = U_{n-1}(x)$ pour tout x réel
c) vérifie $U_n(-x) = U_{-n}(x)$ pour tout x réel
d) vérifie $U_n(x+2\pi) = U_{n-2}(x)$ pour tout x réel

Question 2. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

a) est absolument convergente sur IR
b) ne converge simplement que sur l'intervalle $]-\infty,0]$
c) est simplement convergente sur $[0,\pi]$ mais n'est pas absolument convergente sur $[0,\pi]$
d) est divergente pour certains x de la forme $k\pi$ où k est un entier assez grand

Question 3. La série de fonctions considérée dans la question précédente a pour somme, si elle existe, la fonction, que l'on notera par la suite S_1, définie par

a) $-(e^x)/(e^{\pi}+1)$ pour $x \le \pi$
b) $(e^x)/(e^{-\pi}+1)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$
c) $(e^{-|x|})/(e^{-\pi}+1)$ sur l'intervalle $[-\pi,0]$
d) $(e^{-x})/(-e^{-\pi}+1)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$

Question 4. Cette série de fonctions définie à la question 2

a) ne peut être normalement convergente sur IR puisqu'elle ne converge pas absolument sur IR
b) peut être normalement convergente sur IR bien qu'elle ne soit pas absolument convergente sur cet intervalle
c) est normalement convergente sur l'intervalle $J=]-\infty,A]$ où A est un réel strictement positif car, à partir d'un certain rang $n_0>0$, pour tout x appartenant à cet intervalle J, $|U_n(x)| \le e^A e^{-n\pi}$ terme général d'une série numérique convergente
d) est normalement convergente sur IR car pour tout n entier strictement positif et pour tout x réel $|U_n(x)| \le e^{-n\pi}$ terme général d'une série géométrique convergente

Question 5. Cette même série de fonctions introduite à la question 2

a) est uniformément convergente sur IR car elle converge normalement sur IR
b) est uniformément convergente sur tout intervalle $]-\infty,A]$ avec A réel strictement positif car elle converge normalement sur un tel intervalle
c) n'est pas uniformément convergente sur $I=[0,\pi]$ car une condition nécessaire de convergence uniforme sur I est la convergence absolue sur I de la série
d) n'est uniformément convergente que sur l'intervalle $]-\infty,0]$

Question 6. Le reste de cette série de fonctions défini par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ pour tout n entier strictement positif

a) est le terme général d'une suite de fonctions convergeant uniformément vers la fonction $-e^x/(e^\pi+1)$ sur $[0,\pi]$
b) est le terme général d'une suite de fonctions convergeant normalement vers 0 sur tout intervalle $]-\infty,A]$ avec A réel strictement positif
c) vérifie à partir d'un certain rang $n_0>0$, $|R_n(x)| \leq e^{x-(n+1)\pi}$ pour tout x réel, comme reste d'une série alternée convergente sur IR
d) vérifie à partir d'un certain rang $n_0>0$, $|R_n(x)| \leq e^{A-(n+1)\pi}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty,A]$ avec A réel strictement positif

On pose $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(x) = U_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (e^{-|x-n\pi|} + e^{-|x+n\pi|})$ lorsque cette série converge.

On note D l'ensemble des points où cette série converge simplement.

Question 7. On a

a) $D=\{0\}$
b) $D=\text{IR}$
c) $D=[-\pi,\pi]$
d) $D=\text{IR}-\{k\pi,\ k$ entier relatif non nul$\}$

Question 8. La fonction S, si elle existe, vérifie pour tout x appartenant à D

a) $S(x+\pi)=S(x)$
b) $S(x+\pi)=-S(x)$
c) $S(x+2)=S(x)$
d) $S(x)=e^{-|x|}+S_1(x)+S_1(-x)$

Question 9. La fonction S, si elle existe, est une fonction

a) paire et 2-périodique
b) impaire et π-périodique
c) paire et 2π-périodique
d) impaire et 2π-périodique

Question 10. Pour x appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$, $S(x)$

a) est égale à $(e^{-x}+ e^{\pi-x})/(e^{-\pi}+1)$
b) est égale à $(e^{-x}+ e^{\pi-x})/(e^{\pi}+1)$
c) est égale à $(-e^{-x}+ e^{\pi-x})/(e^{-\pi}+1)$
d) n'est pas définie

Question 11. La fonction S, si elle existe, est

a) est de classe C^1 sur IR comme somme d'une série de fonctions de classe C^1 sur IR
b) est de classe C^1 sur IR*
c) est continue et de classe C^1 par morceaux sur IR
d) n'est continue et de classe C^1 par morceaux que sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$

Question 12. La série de fonctions $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(x) = U_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (e^{-|x-n\pi|} + e^{-|x+n\pi|})$.

a) est normalement convergente donc uniformément convergente sur IR
b) ne peut être normalement convergente sur IR puisqu'elle n'est pas absolument convergente sur IR
c) est uniformément convergente sur tout intervalle $]-\infty,A]$ avec A réel strictement positif car elle converge normalement sur un tel intervalle
d) est uniformément convergente sur tout intervalle $[-B,A]$ avec A et B réels strictement positifs car elle converge normalement sur un tel intervalle

Question 13. La série de fonctions définie à la question **12**

a) est intégrable terme à terme sur $[-\pi,\pi]$ car la série converge uniformément et les fonctions sont continues sur cet intervalle fermé
b) est intégrable terme à terme sur l'intervalle $[0,\pi]$ car la série converge uniformément et les fonctions sont continues sur cet intervalle fermé
c) n'est intégrable terme à terme sur aucun intervalle de la forme $[-a,a]$ avec a réel positif
d) n'est intégrable terme à terme sur aucun intervalle de la forme $[0,a]$ avec a réel positif

On désigne par a_k, b_k les coefficients de Fourier trigonométriques d'indice k, entier naturel, de la fonction S, avec $b_0 = 0$.

Question 14. D'après les propriétés de la fonction S, si elle existe, on a, pour tout k entier naturel,

a) $a_{2k}=0$ et $b_k=0$
b) $a_{2k+1}=0$ et $b_k=0$
c) $a_k=0$ et $b_{2k}=0$ pour k entier strictement positif
d) $a_k=0$ et $b_{2k+1}=0$

Question 15. Pour tout entier naturel k, on note f la fonction définie sur IR par $f(u) = e^{-|u|-iku}$, g la fonction définie sur IR par $g(u) = ue^{-u}\cos(ku)$. On a

a) f est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car $|f(u)| = e^{-|u|}$ fonction intégrable sur cet intervalle
b) f n'est pas intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car cette fonction n'est pas réelle
c) g est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car $|g(u)| \leq |u|e^{-u}$ fonction intégrable sur cet intervalle
d) g est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $|g(u)| \leq ue^{-u}$ fonction intégrable sur cet intervalle

Question 16. Les coefficients de Fourier trigonométriques a_k, b_k de la fonction S, sont définis, pour tout k entier strictement positif, par les intégrales suivantes

a) $a_k = (2/\pi)\int_0^{\pi} S(x)\cos(2kx)\,dx$ et $b_k=0$

b) $b_k = (2/\pi)\int_0^{\pi} S(x)\sin(2kx)\,dx$ et $a_k=0$

c) $a_k = \int_0^{2} S(x)\cos(k\pi x)\,dx$ et $b_k=0$

d) $a_k = (2/\pi)\int_0^{\pi} S(x)\cos(kx)\,dx$ et $b_k=0$

Question 17. Les coefficients de Fourier trigonométriques a_k, b_k de la fonction S, vérifient alors, pour tout k entier strictement positif,

a) $a_k + i\, b_k = (2/\pi) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u| - iku} du$

b) $a_k = (1/\pi) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} \cos(ku)\, du$ et $b_k = (1/\pi) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} \sin(ku)\, du$

c) $a_{2k} = (4/\pi) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} \cos(2ku)\, du$

d) $a_{2k+1} = (4/\pi) \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-u} \cos((2k+1)u)\, du$

Question 18. Pour tout entier naturel k, on obtient

a) $a_k = 4/(\pi(1+k^2))$
b) $a_{2k+1} = 2/(\pi(1+2k+2k^2))$
c) $a_{2k} = 1/(\pi(1+2k+2k^2))$
d) $b_{2k+1} = 2/(\pi(1+2k+2k^2))$

Question 19. Le développement en série de Fourier de la fonction S

a) n'existe pas car la fonction S n'est pas périodique
b) ne converge que sur IR $-\{k\pi$, k entier relatif$\}$
c) converge en moyenne quadratique sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$
d) converge en moyenne quadratique sur IR et a pour somme S car cette fonction est continue sur IR

Question 20. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1/(1+2k+2k^2))$

a) est convergente car son terme général est équivalent à $1/k^2$ terme général d'une série à termes positifs convergente
b) a pour somme $\pi(e^{\pi}-1)/(e^{\pi}+1)$
c) a pour somme $\pi(e^{\pi}-1)/(2(e^{\pi}+1))$
d) a pour somme $-1 + (\pi(e^{\pi}-1)/(e^{\pi}+1))$

Question 21. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} (1/(1+2k+2k^2)^2)$

a) est convergente car c'est une série à termes positifs dont le terme général est $o(1/k^2)$
b) est divergente
c) a pour somme $(\pi/(2(e^{\pi}+1)^2))(\mathrm{sh}(2\pi) - 2\mathrm{sh}(\pi))$
d) a pour somme $(\pi/(2(e^{-\pi}+1)^2))(\mathrm{sh}(2\pi) - 2\mathrm{sh}(\pi))$

PARTIE II

On désigne par E l'ensemble des fonctions h qui sont des C^1-difféomorphismes décroissants de l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même c'est-à-dire les fonctions qui vérifient

- h est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$
- h et h^{-1} sont de classe C^1 sur $[0,1]$
- h est décroissante.

On note enfin $|\ |$ la valeur absolue.

Question 22. La fonction h appartient à E

a) $h(x) = 2 - x - x^3$
b) $h(x) = 1 - ((x^2 + x^3)/2)$
c) $h(x) = (1 - 4x^3 + 3x^4)^{1/2}$
d) $h(x) = (1 - x)^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$

Soit h un élément de E. Pour tout n entier strictement positif, on définit une famille de réels $(t_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ par $h(t_{k,n}) = k/n$. Et on pose

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (|t_{k,n} - x|/(n+k)) \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

Question 23. Soit x un réel fixé strictement compris entre 0 et 1 ; pour chaque n, entier strictement positif, il existe un et un seul entier $p \leq n$ tel que $t_{p-1,n} < x < t_{p,n}$. On a alors

a) $t_{p,n} - t_{p-1,n}$ est équivalent à $h'(x)/n$ lorsque n tend vers $+\infty$
b) $t_{p,n} - t_{p-1,n}$ est équivalent à $1/(nh'(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$
c) $t_{p,n} - x$ est équivalent à $h'(x)/n$ lorsque n tend vers $+\infty$
d) $t_{p,n} - x$ est équivalent à $1/(nh'(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$

Question 24. Pour tout x réel, $J_n(x)$ a pour limite lorsque n tend vers $+\infty$

a) $\int_0^1 (|h^{-1}(u) - x|/(1+u))\, du$

b) $\int_0^1 |h^{-1}(u) - x|\, du$

c) $\int_0^1 (|t - x|/(1+h(t)))\, dt$

d) $\int_0^1 (|t - x|h'(t)/(1+h(t)))\, dt$

Soit h un élément de E, on lui associe la fonction H définie sur IR par

$$H(x) = \int_0^1 |h(u) - x|\, du \quad \text{pour tout } x \text{ réel}$$

On note h_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $h_0(x) = 1 - x$

Question 25. On a

a) $|H(x) - |x|| \leq \int_0^1 h(t)\, dt$ pour tout x réel

b) $H(x) - |x|$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$

c) Pour $h = h_0$ et pour x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ $H(x) = (1/2) - x$

d) Pour $h = h_0$ et pour x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ $H(x) = (x - 1/2)^2 + (1/4)$

Question 26. La fonction H vérifie aussi

a) En tout point x de l'intervalle $]0,1[$, $H'(x)$ existe et est égal à $(1-2x)\, h^{-1}(x)$

b) Pour tout x réel, il existe un unique réel $\theta(x)$ tel que

$$H(x) = (1-2\theta(x))x + 2\int_0^{\theta(x)} h(t)\,dt - \int_0^1 h(t)\,dt$$

c) Pour tout x appartenant à $[0,1]$, il existe un unique $\theta(x)$ appartenant à $[0,1]$ tel que

$$H(x) = 2x\theta(x)) - 2\int_0^{\theta(x)} h(t)\,dt + \int_0^1 h(t)\,dt$$

d) La restriction de la fonction H à l'intervalle $[0,1]$ est une primitive de $1-2\,h^{-1}(x)$

Question 27. La fonction H est

a) de classe C^2 sur IR
b) de classe C^1 sur IR
c) continue et de classe C^1 par morceaux sur IR, et admet des dérivées à droite et à gauche différentes en $x = 0$ et $x = 1$
d) de classe C^1 par morceaux sur IR, mais n'est pas continue en $x = 0$ et $x = 1$

Question 28. La fonction H

a) n'admet pas de minimum sur IR

b) admet un minimum égal à $\displaystyle\int_0^1 |h(t) - 1/2|\,dt$

c) admet un minimum égal à $\displaystyle\int_0^1 |h(t) - h(1/2)|\,dt$

d) admet un minimum égal à $\displaystyle\int_0^{1/2} h(t)\,dt - \int_{1/2}^1 h(t)\,dt$

PARTIE III

E(x) désigne la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'entier tel que E(x) $\leq x \leq$ E(x)+1.
Soit x un nombre réel positif ou nul et n un entier naturel, on pose
$u_n = x^n - \mathrm{E}(x^n)$ et v_n la distance de x^n à l'entier le plus proche.

Question 29. On a, pour tout entier naturel n

a) $-1 < u_n \leq 0$
b) $1 \leq u_n$
c) $v_n = 1 - u_n$
d) $v_n = u_n$ si $0 \leq u_n \leq 1/2$ et $v_n = 1 - u_n$ si $1/2 \leq u_n < 1$

On désigne par S l'ensemble des réels positifs ou nuls x tels que la série de terme général u_n converge, sa somme étant alors notée $U(x)$ et on désigne par F l'ensemble des réels positifs ou nuls x tels que la série de terme général v_n converge, sa somme étant notée $V(x)$. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $|\ |$ la valeur absolue.

Question 30. On a

a) S est inclus dans $\mathbf{N}$
b) $\mathbf{N}$ est inclus dans S
c) F est inclus dans S
d) $\mathbf{N}$ est inclus dans S car S est inclus dans F

Question 31. Soit $x = a + \sqrt{b}$ où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $\sqrt{b}$ ne soit pas un nombre rationnel et $|a + \sqrt{b}| < 1$

a) $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ est un entier négatif
b) $a - \sqrt{b}$ ne peut être nul
c) $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ est un entier strictement positif
d) $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ est un irrationnel car $\sqrt{b}$ n'est pas un nombre rationnel

Question 32. Si $a - \sqrt{b}$ est strictement positif, alors

a) $u_n = (a - \sqrt{b})^n$ car $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ est un entier
b) $u_n = 1 - (a - \sqrt{b})^n$
c) la série de terme général u_n converge et la série de terme général v_n converge car $|a - \sqrt{b}| < 1$
d) la série de terme général u_n diverge car la limite de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, n'est pas nulle et la série de terme général v_n diverge

Question 33. Si $a - \sqrt{b}$ est strictement négatif, alors

a) $u_n = 1 - (a - \sqrt{b})^n$ pour n pair et $u_n = -(a - \sqrt{b})^n$ pour n impair
b) $u_n = -(a - \sqrt{b})^n$ pour n entier strictement positif
c) la série de terme général u_n converge car u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$
d) les séries de termes généraux u_n et v_n divergent car la suite u_n n'admet pas de limite

Question 34. Soit le réel $x = a + \sqrt{b}$, où a et b sont des entiers strictement positifs tels que $\sqrt{b}$ ne soit pas un nombre rationnel et $|a + \sqrt{b}| < 1$, et $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. On a

a) x appartient à F et n'appartient pas à S
b) x n'appartient ni à F ni à S
c) $U(x_0)$ n'est pas définie et $V(x_0)$ n'est pas définie
d) $U(x_0)$ n'est pas définie et $V(x_0) = (\sqrt{2} - 1)/(2 - \sqrt{2})$

PARTIE IV

L'espace vectoriel IR^3 est rapporté à sa base canonique, notée B_1. On considère l'endomorphisme f de IR^3 qui à tout triplet (x,y,z) de IR^3 associe le triplet

$$(2x-y-z, x-z, -x+y+2z)$$

Question 35. On note A la matrice de f par rapport à la base canonique, B_1, de IR^3. On a

a) A est une matrice égale à l'opposé de sa transposée
b) A est une matrice symétrique
c) A est une matrice nilpotente d'ordre 3
d) A n'est pas inversible car un de ses coefficients diagonaux est nul

Question 36. La matrice A

a) a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$
b) est inversible car elle admet trois valeurs propres distinctes non nulles
c) ne peut être diagonalisable car une de ses valeurs propres est double
d) a deux valeurs propres distinctes, 2 valeur propre simple et 1 double

Question 37. Si l'on note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de l'endomorphisme f telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. On a

a) Tout vecteur x_i de IR^3 vérifiant $f(x_i) = \lambda_i x_i$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i pour tout entier i compris entre 1 et 3

b) Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_3 est de dimension 2, donc f est diagonalisable car $\lambda_3 = \lambda_2$ est valeur propre double

c) Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = \lambda_2$ a pour base le vecteur propre de composantes (1,0,1)

d) Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_3 a pour base le vecteur propre de composantes (1,1,–1)

Question 38. La matrice de passage P de la base B_1 à la base B définit une base constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme f

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 39. D étant la représentation matricielle de l'endomorphisme f par rapport à la base B définie dans la question **38**, la matrice A^n s'écrit, pour tout entier n strictement positif,

a) $A^n = P D^n$

b) $A^n = P^{-1} D^n P$

c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n+1 & -2^n+1 \\ 2^n-1 & -2^n+2 & -2^n+1 \\ -2^n+1 & 2^n-1 & 2^n \end{pmatrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & -2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 40. On considère le système différentiel

$$(E)\quad \begin{cases} x'(t) - 2x(t) + y(t) + z(t) = e^{t} \\ y'(t) - x(t) + z(t) = t \\ z'(t) + x(t) - y(t) - 2z(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Soit $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ la représentation matricielle dans la base B_1, de la solution générale de l'équation vectorielle associée à (E) et $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ sa représentation matricielle dans la base B définie à la question **38**. C_1, C_2, C_3 désignant des constantes arbitraires, on a

a) $U(t) = P\,X(t)$

b) $\begin{cases} u'(t) = u(t) + e^{t} - e^{-t} - t \\ v'(t) = v(t) + e^{-t} + t \\ w'(t) = 2w(t) - e^{t} + e^{-t} + 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{2t} - e^{t} + ((e^{-t})/3) - (t/2) - (1/4) \\ y(t) = C_2\, e^{t} - ((e^{-t})/2) - t - 1 \\ z(t) = C_3\, e^{t} - te^{t} - ((e^{-t})/2) - 2t - 2 \end{cases}$

d) $X(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\, e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{t} - ((e^{-t})/6) - (3t/2) - (5/4) \\ -(t+1)e^{t} - ((e^{-t})/6) - (5t/2) - (9/4) \\ (t+1)e^{t} - ((e^{-t})/3) + (3t/2) + (5/4) \end{pmatrix}$