Concours pour le recrutement d'ingénieurs du contrôle de navigation aérienne

Épreuve obligatoire à option Mathématiques

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

**Tout dispositif électronique est interdit
(en particulier l'usage de la calculatrice)**

Extrait du mode d'emploi

- 5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires ; certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

Questions liées :

Partie I

1 à 13

Partie II

14 à 28

Partie III

29 à 40

Partie I

On appelle lois algébriques usuelles l'addition des fonctions, notée « + », la multiplication des fonctions, notée « $\times$ », et la multiplication par un scalaire, notée « $\cdot$ ».

Pour n entier naturel, on note C_n l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$.

Si h est une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$, on note h'' sa dérivée seconde.

On note P_n l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et définies sur $[0, 1]$.

On pose $F_n = \{f \in C_n, f(0) = f(1) = 0\}$.

- 1) Muni des lois algébriques usuelles suivantes,
- A) $(C_n, +, \times)$ est un anneau commutatif
 - B) P_n est un sous-anneau de $(C_n, +, \times)$
 - C) P_n est un idéal de $(C_n, +, \times)$
 - D) $(C_n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension finie
- 2) Muni des lois $+$ et $\cdot$, l'ensemble $F_2 \cap P_2$
- A) est réduit à la fonction nulle
 - B) est un espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$
 - C) est un espace vectoriel de dimension 1
 - D) n'est pas un sous-espace vectoriel de C_2
- 3) L'application $h \mapsto h''$ définit
- A) un endomorphisme de l'espace vectoriel P_n
 - B) une bijection de C_n sur C_n
 - C) une injection de F_2 dans C_0
 - D) un isomorphisme d'espaces vectoriels de P_4 dans P_2

Pour tout réel x strictement positif, on note χ_x la fonction qui à tout réel t associe la valeur 1 si t est dans l'intervalle $[-x, x]$ et 0 sinon.

f étant un élément de C_0 , on pose $I(x) = \int_0^1 f(t)\chi_x(t) dt$ si $x > 0$ et $I(0) = 0$.

- 4) On suppose dans cette question que $f(t) = t$ pour tout t dans $[0, 1]$. Pour tout réel $x > 0$,
- A) $I(x) = \int_{-x}^x t dt$
 - B) $I(x) = \int_0^x t dt$
 - C) $I(x) = \frac{x^2}{2}$
 - D) $I(x)$ ne dépend pas de x
- 5) On retourne au cas général où f est un élément quelconque de C_0 . La restriction de la fonction I à $[0, 1]$
- A) appartient à C_0
 - B) est dérivable et a pour dérivée f
 - C) appartient à C_2
 - D) appartient à P_2 si f appartient à P_2

Soit f dans C_0 .

Dans toute la suite, on pose, pour tout x dans $[0, 1]$, $g(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t| f(t) dt$.

6) On suppose dans cette question que $f(t) = t$ pour tout t dans $[0, 1]$.

Alors $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

- A) $\frac{1}{24}$
- B) $\frac{1}{12}$
- C) $\frac{1}{16}$
- D) 0

7) Pour cette question et les suivantes (jusqu'à la question 10), on revient au cas général où f est un élément quelconque de C_0 . Pour tout x dans $[0, 1]$,

- A) $g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (t-x)f(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (x-t)f(t)dt$
- B) $g(x) = \frac{1}{2} \left[x \left(\int_0^x f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right) - \left(\int_0^x tf(t) dt + \int_1^x tf(t) dt \right) \right]$
- C) $g(x) = \frac{1}{2} \left(x \int_1^0 f(t) dt + \int_x^0 tf(t) dt + \int_1^x tf(t) dt \right)$
- D) $g(x) = \frac{1}{2} \left(x \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 tf(t) dt \right)$

8) La fonction g appartient à C_2 et, pour tout x dans $[0, 1]$,

- A) $g''(x) = 1$
- B) $g''(x) = f(x)$
- C) $g''(x) = 0$
- D) $g''(x) = -f(x)$

9) L'équation différentielle $y'' = f$, d'inconnue y dans F_2 , a pour ensemble de solutions

- A) $\{x \mapsto g(x) + (g(0) - g(1))x - g(0)\}$
- B) $\{x \mapsto -g(x)\}$
- C) $\{x \mapsto g(x) + a, a \in \mathbf{R}\}$
- D) $\{x \mapsto -g(x) + ax + b, (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$

10) On peut déduire des questions précédentes que

- A) l'application $h \mapsto h''$ définit une injection non surjective de F_2 dans C_0
- B) l'application $h \mapsto h''$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de F_2 sur C_0
- C) l'application $h \mapsto h''$ définit une surjection non injective de F_2 dans C_0
- D) les dimensions des espaces vectoriels F_2 et C_0 sont finies et égales

Dans toute la suite, on pose, pour tout entier naturel k , $G_k = F_k \cap P_k$ et $\varphi : h \mapsto h''$ définie de G_{n+2} dans P_n .

11) L'ensemble G_{n+2} , muni des lois $+$ et $\cdot$, est un espace vectoriel

- A) de dimension $n + 1$
- B) dont une base est $(x \mapsto x^k, k \in \{1, \dots, n + 2\})$
- C) dont une base est $(x \mapsto x^{k-1}, k \in \{2, \dots, n + 2\})$
- D) dont une base est $(x \mapsto x(x-1)^k, k \in \{0, \dots, n\})$

12) Pour tout entier naturel $k \leq n$ et pour tout réel x dans $[0, 1]$,

A) $\varphi(x^k) = k(k-1)x^{k-2}$

B) $\varphi(x^{k+2} - x^{k+1}) = x^k((k+2)x - (k+1))$

C) $\varphi^{-1}(x^k) = \frac{(x-1)}{(k+1)(k+2)} \sum_{i=1}^{k+1} x^i$

D) $\varphi^{-1}(x^k) = \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$

13) Soit M la matrice de φ dans les bases $(x \mapsto x^{k+1}(x-1), k \in \{0, \dots, n\})$ et $(x \mapsto x^k, k \in \{0, \dots, n\})$ de G_{n+2} et P_n respectivement. Alors

A) M n'est pas inversible

B) M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix}$

C) M et M^{-1} sont diagonalisables

D) φ et φ^{-1} sont diagonalisables

Partie II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note tM la matrice transposée de M . Enfin, I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

14) De manière générale, une matrice carrée à coefficients réels

A) est diagonalisable si et seulement si ses coefficients diagonaux sont distincts deux à deux

B) est diagonalisable si et seulement si les racines de son polynôme caractéristique sont toutes réelles et distinctes deux à deux

C) est inversible si et seulement si ses valeurs propres complexes sont toutes non nulles

D) est inversible si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls

Pour tout réel a , on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$.

15) La matrice $M(a)$ est équivalente à la matrice

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 0 & 0 & 3a-2 \end{pmatrix}$

16) Le nombre 0 est valeur propre de $M(a)$ si et seulement si

- A) $a = 2$
- B) $a \neq \frac{2}{3}$
- C) $a = 1$ ou $a = 2$
- D) $a \neq 0$

On pose $C_{M(a)}(X) = \det(XI_3 - M(a))$.

17) Si on écrit $C_{M(a)}(X)$ sous la forme $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, alors

- A) $a_0 = 6a - 4$
- B) $a_1 = 8 - 3a$
- C) $a_2 = 5 - a$
- D) $a_3 = -1$

18) L'écriture factorisée de $C_{M(a)}(X)$ est

- A) $(X - 1)^2(X - 2)$
- B) $(X - 1)(X - 2)^2$
- C) $(X - 1)(X - 2 + a)(X - 2)$
- D) $(X - a)(X - a + 2)(X - 2)$

19) La matrice $M(a)$ est diagonalisable si et seulement si

- A) $a \neq 0$ et $a \neq 1$
- B) $a \neq 0$
- C) $a \neq 2$
- D) $a \neq 1$

20) Plus généralement, une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, supposées réelles, sont les éléments diagonaux de la matrice

- A) est diagonalisable
- B) a pour déterminant le produit des n valeurs propres
- C) est inversible
- D) n'existe pas

21) On note A une matrice carrée d'ordre 3, de coefficient général complexe a_{ij} . On suppose que a_{11} , a_{22} et a_{33} sont les valeurs propres (éventuellement égales) de A . Alors

- A) $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}$
- B) la somme $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}$ est nulle
- C) A est diagonale
- D) A est diagonalisable

22) L'hypothèse de la question 21 est vérifiée par

A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2i & 1 & -2i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Dans tout ce qui suit, on note $\mathcal{D}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{R}$ et dont les termes diagonaux sont les racines du polynôme caractéristique, comptées avec le même ordre de multiplicité.

23) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et α et β deux réels quelconques. Alors

- A) λ est une valeur propre de M si et seulement si $\alpha\lambda + \beta$ est une valeur propre de $\alpha^t M + \beta I_n$
- B) $\alpha M + \beta I_n$ et $\alpha^t M + \beta I_n$ ont le même polynôme caractéristique, les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres
- C) si M appartient à $\mathcal{D}_n$, alors $\alpha M + \beta I_n$ et $\alpha^t M + \beta I_n$ appartiennent aussi à $\mathcal{D}_n$
- D) si M appartient à $\mathcal{D}_n$, et si $M^2 = M$, alors $(\alpha M + \beta I_n)^2$ appartient aussi à $\mathcal{D}_n$

24) On note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des matrices inversibles appartenant à $\mathcal{D}_n$. On peut affirmer que

- A) tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est la somme de deux éléments de $\mathcal{D}_n$
- B) $\mathcal{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
- C) $\mathcal{I}_n$ est vide
- D) $\mathcal{I}_n$ est dense dans $\mathcal{D}_n$

25) Soit $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. La trace de ${}^t M M$ est égale à

A) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ji}$

B) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2$

C) $\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right)^2$

D) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}$

26) Soit S un élément de $\mathcal{D}_n$. On suppose de plus que S est symétrique. Alors

- A) une telle matrice n'existe pas
- B) $S = I_n$
- C) S est diagonale
- D) S est la matrice nulle d'ordre n

- 27)** Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et antisymétrique. On peut affirmer que
- A) A^n est antisymétrique
 - B) ${}^t A A$ est diagonalisable
 - C) la trace de ${}^t A A$ est nulle
 - D) si A appartient aussi à $\mathcal{D}_n$, alors $({}^t A A)^n$ est la matrice nulle d'ordre n

- 28)** L'ensemble des matrices antisymétriques appartenant à $\mathcal{D}_n$
- A) est réduit à la matrice unité
 - B) est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$
 - C) contient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - D) est l'ensemble des matrices carrées diagonales à coefficients réels

Partie III

29) Soit une série de terme général strictement positif b_n , où n est un entier naturel quelconque. Pour que cette série converge,

- A) il est suffisant que la suite de terme général b_n converge vers 0
- B) il est nécessaire que la suite de terme général b_n converge vers 0
- C) il est nécessaire et suffisant que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n b_k$ converge vers 0
- D) il est suffisant que la suite de terme général $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ converge et que sa limite soit strictement inférieure à 1

30) On pose, pour tout entier naturel n différent de 0, $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Alors

- A) la suite (b_n) est croissante et majorée
- B) la suite (b_n) est convergente et sa limite est égale à 1
- C) (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{n}{n+1} < 1$
- D) la série de terme général b_n converge

Dans tout ce qui suit, on note I l'intervalle $[0, 1[$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose, pour tout x dans I , $f_n(x) = a_n x^n (1-x)$, où (a_n) est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$. Si elle existe, on note $\|f_n\|_\infty$ la borne supérieure des nombres $f_n(x)$ lorsque x décrit I . En cas de convergence de la série

$$\sum f_n(x), \text{ on pose } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

31) Dans le cas où (a_n) est la suite constante égale à 1,

- A) (f_n) est une suite décroissante
- B) (f_n) est une suite de fonctions décroissantes sur I
- C) pour tout entier $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty$ existe et est égale à 1
- D) pour tout entier $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty$ existe et est égale à $\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

32) Dans le cas où, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2^n}$,

- A) $S\left(\frac{1}{2}\right)$ n'existe pas
- B) $S\left(\frac{1}{2}\right)$ existe et $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$
- C) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I
- D) la série $\sum f_n(x)$ ne converge pour aucune valeur de x dans I

33) Dans le cas où, pour tout $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$,

- A) pour tout x dans I , $f_n(x)$ est la suite géométrique de premier terme $1 - x$ et de raison $-x$
- B) pour tout x dans I , $S(x)$ existe et $S(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$
- C) pour tout x dans I , la série $\sum f_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées
- D) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I

34) Dans le cas où (a_n) est une suite bornée, la série de fonctions $\sum f_n$

- A) converge simplement en tout point de I
- B) converge uniformément sur I
- C) ne converge pas absolument en au moins un point de I
- D) converge normalement sur I

35) Dans le cas où (a_n) est une suite de réels décroissante, la série de fonctions $\sum f_n$

- A) converge simplement en tout point de I
- B) converge uniformément sur I
- C) ne converge pas absolument en au moins un point de I
- D) converge normalement sur I

Dans tout ce qui suit, on suppose que (a_n) est une suite décroissante de réels positifs.

36) La série de fonctions $\sum f_n$

- A) converge simplement en tout point de I
- B) converge uniformément sur I
- C) est telle que, pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \frac{a_n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
- D) converge normalement sur I

37) Dans le cas où, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{n}$,

- A) la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I et converge uniformément sur I
- B) la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge simplement en aucun point de I
- C) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle
- D) la suite de fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle

- 38)** Dans le cas où, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n}$,
- A) $S(x)$ existe pour tout x dans I et $S(x) = (1 - x) \ln |x - 1|$
 - B) $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{en^2}$
 - C) il existe x dans I tel que $S(x)$ n'existe pas
 - D) $S(x)$ existe pour tout x dans I et $\lim_{x \rightarrow 1} S(x) = 0$
- 39)** Dans le cas où, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{\ln n}$, et $a_1 = 2$,
- A) $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ converge vers 0
 - B) la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge
 - C) la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I
 - D) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I
- 40)** En utilisant uniquement les trois cas précédents (questions 37 à 39), on a démontré en particulier
- A) que si une série converge normalement sur un intervalle, alors elle converge uniformément sur cet intervalle
 - B) qu'une série de fonctions peut converger normalement sur un intervalle sans converger uniformément sur cet intervalle
 - C) que la convergence uniforme d'une série de fonctions sur un intervalle n'entraîne pas sa convergence normale sur cet intervalle
 - D) que la convergence simple d'une série de fonctions en tout point d'un intervalle n'entraîne pas sa convergence uniforme sur cet intervalle