

APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions

Déf 1:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $u : E \rightarrow F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F .

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.

Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif.

On note :

$\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

$\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Rem: L'apparente simplicité de la définition masque une subtilité. En effet, pour des raisons de commodité, les lois dans E et dans F sont notées de la même façon.

Mais, par exemple, dans l'expression $u(x + y)$ le $+$ est l'addition dans E alors que dans l'expression $u(x) + u(y)$, le $+$ représente l'addition de F .

Exemples

1. L'application nulle $E \longrightarrow F$.

$$x \longmapsto 0_F$$
2. L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K} : h_\lambda : E \longrightarrow E$.

$$x \longmapsto \lambda.x$$
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application *évaluation en un point* : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E , avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ de $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \prod_{k=1}^n E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels), qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe x_i .

Démonstration:

Il faut savoir démontrer rapidement qu'une application est linéaire, même si dans la plupart des cas cela est presque évident. Par exemple, pour démontrer que l'application p_i (dernier exemple ci-dessus) est linéaire, on écrira :

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\prod_{k=1}^n E_k$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} p_i(\lambda x + y) &= p_i(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= p_i((\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)) \quad (\text{par définition des lois dans l'espace vectoriel produit}) \\ &= \lambda x_i + y_i = \lambda p_i(x) + p_i(y). \end{aligned}$$

Propriétés:

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u(0_E) = 0_F$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $x \in E$, $u(-x) = -u(x)$.
3. L'application identique de E , notée Id_E , est un automorphisme de E .

Déf 2:

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$ (c'est-à-dire : $\forall x \in F, u(x) \in F$).

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F , noté u_F et appelé endomorphisme induit par u sur F .

Rem : Ne pas confondre les notions d'endomorphisme induit et de restriction.

– La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est : 1°) un sous-espace vectoriel 2°) stable par u (pour pouvoir parler d'endomorphisme de F).

– La notion de restriction est beaucoup plus générale :

Si f est une application d'un ensemble A vers un ensemble B , et si A' est une partie non vide de A , on définit la restriction de f à A' comme étant l'application $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$.

$$x \longmapsto f(x)$$
II. Image. Noyau**Théorème 1:**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E , son image par u :

$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$

est un sous-espace vectoriel de F .

2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F , son image réciproque par u :

$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration: (4)

1. D'abord, puisque $u(0_E) = 0_F$ et que $0_E \in E'$, $0_F \in u(E')$ et $u(E') \neq \emptyset$. Ensuite, si $(y_1, y_2) \in u(E')^2$, il existe $(x_1, x_2) \in E'^2$ tq $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2 = u(\lambda x_1 + x_2)$ puisque u est linéaire. Or $\lambda x_1 + x_2 \in E'$ puisque E' est un sous-espace vectoriel, donc $\lambda y_1 + y_2 \in u(E')$.
2. Rappel : l'image réciproque $u^{-1}(F')$ par u est l'ensemble des antécédents des éléments de F' par u , c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in E, u(x) \in F'\}$. Puisque $0_F \in F'$ et que $u(0_E) = 0_F$, $0_E \in u^{-1}(F')$ et $u^{-1}(F') \neq \emptyset$. Ensuite, si $(x_1, x_2) \in u^{-1}(F')^2$, on a $u(x_1) \in F'$ et $u(x_2) \in F'$. F' étant un sous-espace vectoriel, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda x_1 + x_2) \in F'$, donc $\lambda x_1 + x_2 \in u^{-1}(F')$.

Déf 3:

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble image de E par u est un sous-espace vectoriel de F , appelé image de u , et noté $\text{Im } u$. Ainsi :

$$\text{Im } u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}.$$

2. L'image réciproque de 0_F par u est un sous-espace vectoriel de E , appelé noyau de u , et noté $\text{Ker } u$. Ainsi :

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

Théorème 2:

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \text{Im } u = F$.
2. u injective $\iff \text{Ker } u = \{0_E\}$.

 *Démonstration:* (A)

1. résulte directement de la définition de l'image et de la définition de la surjectivité (d'ailleurs, cette propriété est vraie pour toute application, même non linéaire).
2. – Si u est injective et si $x \in \text{Ker } u$, alors $0_F = u(x) = u(0_E)$ d'où $x = 0_E$. Ainsi, $\text{Ker } u \subset \{0_E\}$, et puisque $\text{Ker } u$ est un sous-espace vectoriel de E , on a $\{0_E\} \subset \text{Ker } u$, d'où l'égalité.
– Supposons $\text{Ker } u = \{0_E\}$. Alors, si x et y dans E sont tels que $u(x) = u(y)$, on a $u(x - y) = 0_F$ par linéarité, d'où $x - y \in \text{Ker } u$ d'où $x = y$: u est injective.

Exemple (lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels)

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On peut alors considérer l'application :

$$u : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

Alors :

- u est linéaire ; en effet, on peut soit faire une démonstration directe en écrivant la définition, soit, plus astucieusement, remarquer que $u = \sum_{i=1}^n p_i$ où $p_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$; puisque les p_i sont linéaires, il en est de même de leur somme (cf. théorème 4)
- $\text{Im } u = \sum_{i=1}^n E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^n E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.
(En effet, $\text{Ker } u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0,$$

ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe).

- En conclusion : u bijective $\iff E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Dans ce cas, et si E est de dimension finie, on retrouve à l'aide de la proposition 2 le résultat :

$$\dim \bigoplus_{i=1}^n E_i = \dim \prod_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \dim E_i.$$

Théorème 3: d'isomorphisme (fondamental)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\text{Ker } u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im } u$.

 *Démonstration:* ♥

Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E : $E = S \oplus \text{Ker } u$. Soit v la restriction de u à S .

- v est évidemment à valeurs dans $\text{Im } u$.
- v est linéaire, puisque u l'est (la propriété $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ étant vraie pour tous x, y dans E , elle l'est pour tous x, y dans S !).
- v est injective, car $\text{Ker } v = \{x \in S \mid u(x) = 0\} = \text{Ker } u \cap S = \{0\}$.
- v est surjective de S sur $\text{Im } u$ car :
Soit $y \in \text{Im } u$. Alors, il existe $x \in E$ tq $y = u(x)$. Puisque $E = S + \text{Ker } u$, il existe $(s, z) \in S \times \text{Ker } u$ tq $x = s + z$.
On a alors $y = u(x) = u(s) + \underbrace{u(z)}_{=0_E} = u(s) = v(s)$, donc y possède bien un antécédent par v .

III. Opérations sur les applications linéaires

Théorème 4:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$.

 *Démonstration:*

- $\mathcal{L}(E, F)$ n'est pas vide, car l'application nulle, qui à tout x de E associe le vecteur nul 0_F , est trivialement linéaire.
- On vérifie facilement que, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si u, v sont deux applications linéaires de E dans F , alors $w = \lambda u + v$ est encore une application linéaire de E dans F : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} w(\alpha x + y) &= (\lambda u + v)(\alpha x + y) = \lambda u(\alpha x + y) + v(\alpha x + y) \\ &= \lambda(\alpha u(x) + u(y)) + \alpha v(x) + v(y) \quad (\text{car } u \text{ et } v \text{ sont linéaires}) \\ &= \alpha(\lambda u(x) + v(x)) + \lambda u(y) + v(y) = \alpha w(x) + w(y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{L}(E, F)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Théorème 5:

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

 *Démonstration:*

Ce sont de simples vérifications. Par exemple :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \\ & v \circ u(\lambda x + y) = v[u(\lambda x + y)] \underset{u \text{ linéaire}}{=} v[\lambda u(x) + u(y)] \underset{v \text{ linéaire}}{=} \lambda v \circ u(x) + v \circ u(y) \\ 3. \quad & \forall x \in E, [v \circ (u_1 + u_2)](x) = v[(u_1 + u_2)(x)] = v[u_1(x) + u_2(x)] \underset{v \text{ linéaire}}{=} v \circ u_1(x) + v \circ u_2(x) \\ & = [v \circ u_1 + v \circ u_2](x) \end{aligned}$$

d'où $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$ (l'égalité précédente étant vraie pour tout x).

Prop 1: image et noyau d'une composée

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ et $\text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker } u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

 *Démonstration:*

Ces propriétés sont assez élémentaires, mais *importantes*

1. – Si $y \in \text{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$ donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \text{Im } v$.
– Si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où $v \circ u(x) = v(0_F) = 0_G$ donc $x \in \text{Ker}(v \circ u)$.
2. $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \forall x \in E, v[u(x)] = 0_G \iff \forall y \in \text{Im } u, v(y) = 0_G \iff \forall y \in \text{Im } u, y \in \text{Ker } v \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

Théorème 6:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geq 2$).

 Démonstration:

- $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ -espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
 - la loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{L}(E)$: découle du théorème 5.1
 - la loi $\circ$ est associative : elle l'est toujours!
 - la loi $\circ$ possède un élément neutre : c'est l'application identique de E , Id_E (qui est bien un endomorphisme).
 - la loi $\circ$ est distributive (à droite et à gauche) par rapport à $+$: découle du théorème 5.3 et 5.4
 - Enfin il reste à vérifier : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$, ce qui a été fait au théorème 5.2
- Dire que l'algèbre n'est pas *intègre* signifie que l'on peut avoir $u \circ v = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ce n'est pas bien difficile de trouver des exemples en dimension 2...

Théorème 7:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F , u^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

 Démonstration:

Il s'agit de montrer que u^{-1} est linéaire.

Soient $x, y \in F$, et $a = u^{-1}(x)$, $b = u^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda a + b) = \lambda u(a) + u(b) = \lambda x + y$, d'où $u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda a + b = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)$.

Théorème 8:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E , et noté $\text{GL}(E)$.

 Démonstration:

- La loi $\circ$ est interne dans $\text{GL}(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E car la composée de deux applications linéaires est linéaire et la composée de deux bijections est une bijection (rappelons au passage que si $u, v \in \text{GL}(E)$, $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$).
- La loi $\circ$ est associative (propriété générale).
- La loi $\circ$ possède un élément neutre dans $\text{GL}(E)$: c'est Id_E .
- Si $u \in \text{GL}(E)$, $u^{-1} \in \text{GL}(E)$ d'après le th. précédent;

Remarques

1. On adopte souvent, dans $\mathcal{L}(E)$, la *notation multiplicative*, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n -ièmes).

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

3. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n - \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E)(u^{n-1} + \dots + \text{Id}_E)$.
- si u et v commutent : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

 Démonstration:

- On commence par démontrer que si u et v commutent, il en est de même de u^k et de v pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur k ; en effet, la relation $u^k v = v u^k$ est vraie pour $k = 0, 1$ et si elle est vraie à un ordre k alors, en utilisant en particulier l'associativité de la loi $\circ$:

$$u^{k+1}v = u(u^k v) = u(v u^k) = (uv)u^k = (vu)u^k = v u^{k+1}$$

donc elle est encore vraie à l'ordre $k + 1$.

- On en déduit ensuite que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, u^k et v^ℓ commutent.
- Il suffit ensuite de développer le produit $(u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$ en utilisant les règles de calcul vues plus haut et la propriété ci-dessus pour retrouver $u^n - v^n$.

- si u et v commutent : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).

Démonstration:

Se démontre par récurrence sur n en utilisant la formule du triangle de Pascal et en remarquant que, puisque u et v commutent il en est de même de toutes leurs puissances donc on aura, par exemple, $u^k v^{n-k} u = u^{k+1} v^{n-k}$.

4. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^{-n} = (u^{-1})^n.$$

Rem: Le résultat utilisé dans la démonstration précédente, à savoir :

si u et v commutent, il en est de même de toutes leurs puissances

est important à connaître.

Lorsque u (ou v) est inversible, cela s'étend aussi aux puissances négatives, puisque, si u et v commutent et u inversible, alors u^{-1} et v commutent aussi car, en utilisant l'associativité de la loi $\circ$:

$$u^{-1}v = u^{-1}v(uu^{-1}) = u^{-1}(vu)u^{-1} = u^{-1}(uv)u^{-1} = (u^{-1}u)vu^{-1} = vu^{-1}.$$

IV. Projecteurs. Symétries

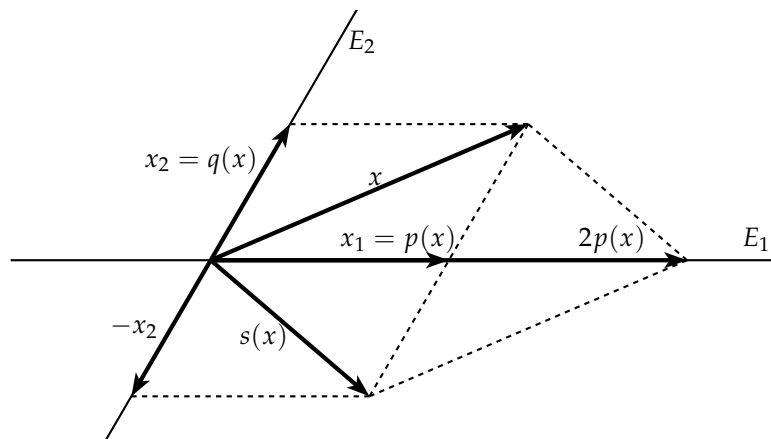
Déf 4:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = E_1 \oplus E_2$).

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

L'application $p : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ s'appelle la projection sur E_1 de direction E_2 (ou parallèlement à E_2).

L'application $s : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ s'appelle la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2 (ou parallèlement à E_2).



Propriétés: Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\text{Inv}(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \text{Opp}(u) = \text{Ker}(u + \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - \text{Id}_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E .
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \text{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\text{Inv}(p) = \text{Im } p = E_1$ et $\text{Ker } p = E_2$.

6. $\text{Inv}(s) = E_1$ et $\text{Opp}(s) = E_2$.

7. Si p est la projection sur E_1 de direction E_2 , et q est la projection sur E_2 de direction E_1 , $p + q = \text{Id}_E$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (p et q sont dits associés).

 **Démonstration:**

1. En effet, avec les mêmes notations que dans la définition on a

$$\forall x \in E, (2p - \text{Id}_E)(x) = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x).$$

2. Compte tenu de la relation obtenue en 1., il suffit de faire la démonstration pour p , ce qui est immédiat :

Si $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ sont deux vecteurs de E , avec $x_i, y_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, et si λ est un scalaire, alors

$$p(\lambda x + y) = p(\underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in E_2}) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$

3. En effet, avec les mêmes notations que dans la définition on a

$$\forall x \in E, p^2(x) = p[p(x)] = p(x_1) = x_1 = p(x).$$

4. En utilisant les résultats précédents : $s^2 = (2p - \text{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \text{Id}_E = \text{Id}_E$.

5. - Si $x \in \text{Inv}(p)$ on a $x = p(x)$ donc $x \in \text{Im } p$: $\text{Inv}(p) \subset \text{Im } p$.

- Si $x \in \text{Im } p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$, puis $x \in \text{Inv}(p)$: $\text{Im } p \subset \text{Inv}(p)$.

- Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $p(x) = x_1$ d'où l'équivalence

$$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x_2 = 0 \iff x \in E_1,$$

donc $\text{Inv}(p) = E_1$.

- Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $p(x) = x_1$ d'où l'équivalence

$$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in E_2.$$

Cela démontre directement l'égalité $\text{Ker } p = E_2$.

6. $s(x) = x \iff (2p - \text{Id}_E)(x) = x \iff p(x) = x$ et $s(x) = -x \iff (2p - \text{Id}_E)(x) = -x \iff p(x) = 0$, donc il suffit d'appliquer le résultat précédent.

7. Immédiat puisque, toujours avec les mêmes notations, $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$ donc $(p + q)(x) = x_1 + x_2 = x = \text{Id}_E(x)$.

De plus, l'écriture $x_1 = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2}$ montre que $q(x_1) = 0$ c'est-à-dire $q \circ p(x) = 0$.

Déf 5:

 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9:

Si p est un projecteur, alors :

$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$; $\text{Im } p = \text{Inv}(p)$; et p est la projection sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$.

 **Démonstration:**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\text{Inv}(p) = \text{Im } p$.

- On a toujours $\text{Inv}(p) \subset \text{Im } p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \text{Im } p$;

- Réciproquement, si $y \in \text{Im } p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \text{Inv}(p)$.

- Montrons que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

- $\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0\}$ car, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, on a $p(x) = 0$ d'une part, et $x \in \text{Inv}(p)$ soit $p(x) = x$ d'autre part, donc $x = 0$;

- Soit $x \in E$. On a : $x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in \text{Ker } p}$ avec $x_1 \in \text{Im } p$ et $p(x_2) = p(x) - p^2(x) = 0$ soit $x_2 \in \text{Ker } p$, donc

$$E = \text{Im } p + \text{Ker } p.$$

- Enfin, p est bien la projection sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$, car, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$, on a $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + 0 = x_1$.

Généralisation

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , telle que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^p E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^p x_i$;

on note alors, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, p_i l'application : $p_i : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x_i \end{cases}$. On a alors :

- $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, p_i \circ p_i = p_i$
- $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, p_i$ est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_j$.
- $\sum_{i=1}^p p_i = \text{Id}_E$.
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Déf 6:

On dit que $(p_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la famille de projecteurs canoniquement associée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Théorème 10:

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \text{Id}_E$), alors :

$E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$; et s est la symétrie par rapport à $\text{Inv}(s)$ de direction $\text{Opp}(s)$.

 *Démonstration:*

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s^2 = \text{Id}_E$. Soit alors $p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}$.

On a : $p^2 = \frac{s^2 + 2s + \text{Id}_E}{4} = \frac{s + \text{Id}_E}{2} = p$.

Donc p est la projection sur $\text{Inv}(p)$ de direction $\text{Ker } p$. Or

$$\text{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{x \in E \mid \left(\frac{s + \text{Id}_E}{2}\right)(x) = x\right\} = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \text{Inv}(s)$$

et

$$\text{Ker } p = \{x \in E \mid p(x) = 0\} = \left\{x \in E \mid \left(\frac{s + \text{Id}_E}{2}\right)(x) = 0\right\} = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \text{Opp}(s)$$

Ainsi, p est la projection sur $\text{Inv}(s)$ de direction $\text{Opp}(s)$, et $s = 2p - \text{Id}_E$, donc s est bien la symétrie annoncée.

Rem: La décomposition de $x \in E$ dans la somme directe $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$ s'écrit :

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \text{Inv}(s)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \text{Opp}(s)}.$$

Exemples

1. Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(-x)$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie et on a :

- $f \in \text{Inv}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
- $f \in \text{Opp}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

On retrouve ainsi le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de E , et que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires. De plus, la décomposition de $f \in E$ comme somme (de façon unique) d'une application paire et d'une application impaire est :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s: E \rightarrow E$
 $A \mapsto A^\top$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie et on a :

- $A \in \text{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;

– $A \in \text{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A$ antisymétrique.

On obtient ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :

$$A = \underbrace{\frac{A + A^\top}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - A^\top}{2}}_{\text{antisym.}}$$

V. Détermination d'une application linéaire

Théorème 11:

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , telle que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_i = u|_{E_i}$.

(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires).

 *Démonstration:*

- *Unicité (analyse)* : Si u existe, alors pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$, donc la donnée des u_i détermine u de façon unique.
- *Existence (synthèse)* : Pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$, on pose naturellement $u(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$. On vérifie alors facilement que u est linéaire (car chaque application $x \mapsto x_i$ l'est, puis composée et somme d'applications linéaires), et que sa restriction à chaque E_i est bien u_i .

Théorème 12:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(b_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une famille libre de F .
3. u surjective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .
4. u est un isomorphisme $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une base de F .

(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base).

 *Démonstration:*

1. Tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, où (λ_i) est une famille de scalaires à support fini. Si u existe, on doit donc avoir $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ d'où l'unicité de u .
Réciproquement, on vérifie facilement que l'application $u : x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ est linéaire; elle convient donc.
2. – Supposons u injective. Si on a $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre. Ainsi, la famille (b_i) est libre.
– Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.
On a alors $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.
Ainsi, $\text{Ker } u = \{0\}$ et u est injective.
3. On remarque déjà que : $u(\text{Vect}(\{e_i, i \in I\})) = \text{Vect}(\{u(e_i), i \in I\})$ (en effet, l'image par u d'une combinaison linéaire des e_i est, par linéarité, une combinaison linéaire des $u(e_i)$).
On a donc :
$$\text{Im } u = u(E) = u(\text{Vect}(\{e_i, i \in I\})) = \text{Vect}(\{b_i, i \in I\})$$

Donc : u surjective $\iff \text{Im } u = F \iff \text{Vect}(\{b_i, i \in I\}) = F \iff (b_i)_{i \in I}$ génératrice de F .

Rem : On a démontré au passage un résultat **très utile** :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{Im } u$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par les $u(e_i)$.

VI. Cas de la dimension finie

Prop 2:

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\begin{cases} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathcal{L}(E, F) & \iff \dim E \leq \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathcal{L}(E, F) & \iff \dim E \geq \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff \dim E = \dim F \end{cases}$$

 **Démonstration:**

- Démontrons la première équivalence.
 - S'il existe u injective de E dans F , et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leq \dim F$.
 - Supposons $\dim E \leq \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Puisque $n \leq \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n , $(b_1, \dots, b_n)$. Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i , dont l'existence est assurée par le théorème 12, est injective.
- Démontrons la seconde équivalence.
 - S'il existe u surjective de E dans F , et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\geq \dim F$.
 - Supposons $\dim E \geq \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Puisque $n \geq \dim F$, on peut en complétant une base quelconque de F trouver une famille génératrice de F de cardinal n ; notons-la $(b_1, \dots, b_n)$. Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i est surjective, toujours d'après le théorème 12.

Théorème 13: théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim E.$$

 **Démonstration:**

C'est immédiat à l'aide du théorème 3 page 3 : si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors S est isomorphe à $\text{Im } u$ (plus précisément, la restriction u_S de u à S est cet isomorphisme), donc $\dim \text{Im } u = \dim S = \dim E - \dim \text{Ker } u$



Rem : Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, mais $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ ne sont pas forcément supplémentaires !

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ici $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbb{R}e_1 \dots$

Déf 7:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le rang de u : $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u)$.

Remarques

1. Si F est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie.
2. Si E est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et $\text{rg } u + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$ (cf. th. précédent).
3. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{rg } u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $(u(e_i))_{i \in I}$.

Théorème 14:

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$:

1. Si E est de dimension finie : u injective $\iff \text{rg } u = \dim E$.
2. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff \text{rg } u = \dim F$.
3. Si E et F sont de dimensions finies et si $\dim E = \dim F$, on a :

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{Id}_E$. Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.
 (On obtient le même résultat si l'on suppose $u \circ v = \text{Id}_F$).

 Démonstration:

1. Découle directement du théorème du rang puisque u injective $\iff \dim(\text{Ker } u) = 0$.
2. Découle directement de : u surjective $\iff \text{Im } u = F$.
3. 1. + 2.
4. On rappelle le résultat (bien utile) suivant :
 | Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G
 | Alors : $g \circ f$ injective $\implies f$ injective et $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective
 Ici, on a : $v \circ u = \text{Id}_E$ donc u est injective donc bijective puisque $\dim E = \dim F$. Ainsi u^{-1} existe et $v = v \circ u \circ u^{-1} = \text{Id}_E \circ u^{-1} = u^{-1}$.
 Et lorsque l'on suppose $u \circ v = \text{Id}_F$, on a u surjective etc...



Rem : Les deux dernières propriétés ne sont plus vraies lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$
 par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.
- Les espaces ne sont pas de dimensions finies (même si $E = F$)
 par exemple, si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si u est l'application qui à f associe sa dérivée f' et si v est l'application qui à f associe $\left(x \mapsto \int_0^x f(t) dt\right)$, on a $u \circ v = \text{Id}_E$ mais $v \circ u \neq \text{Id}_E$.

Prop 3:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$.
 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) u inversible.
- (b) $\text{rg } u = n$.
- (c) u injectif.
- (d) u surjectif.
- (e) u inversible à droite.
- (f) u inversible à gauche.

 Démonstration:

- L'équivalence entre les quatre premières propriétés découle de la proposition précédente.
- (1) $\implies$ (5) est évident. Réciproquement, si u est inversible à droite, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \text{Id}_E$. Cela implique en particulier u surjective donc u bijective.
- (1) $\implies$ (6) est évident. Réciproquement, si u est inversible à gauche, il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \text{Id}_E$. Cela implique en particulier u injective donc u bijective.



Rem : Ces résultats peuvent tomber en défaut si E n'est pas de dimension finie !

Considérer par ex. les applications $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$.

$$P \longmapsto P' \qquad P \longmapsto XP$$

La première est surjective mais non injective ; la seconde est injective mais non surjective.

Théorème 15: Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } v$.
2. Si v est bijective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } u$.

Ce théorème (celui qui figure dans le programme) est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16:

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } u$ et, si v est injective, il y a égalité.

 *Démonstration:*

1. $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v$.
Si de plus u est surjective, on a $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u) = v(F) = \text{Im } v$ d'où l'égalité.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$. Si $r = \text{rg } u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\text{Im } u$, par exemple $(u(e_1), \dots, u(e_r))$.
Donc $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u)$ est engendrée par $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$, donc est de dimension $\leq r$ soit $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } u$.
De plus, si v est injective, $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est libre (une application injective transforme une famille libre en une famille libre). Donc dans ce cas $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(v \circ u)$, d'où l'égalité.

Théorème 17:

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F.$$

 *Démonstration:*

Soit $n = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow F^n \\ u & \longmapsto (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{cases}$$

- φ est linéaire : on vérifie aisément $\varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$.
- On sait que : $\forall (b_1, \dots, b_n) \in F^n, \exists ! u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $u(e_i) = b_i$ pour tout i (une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base).
Cela signifie que φ est bijective.
- φ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = n \cdot \dim F$.

Rem : On verra une démonstration beaucoup plus explicite dans le chapitre sur les matrices.

VII. Les polynômes d'interpolation de Lagrange**Théorème 18:**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts et soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}.$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
 P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

 Démonstration:

- La démonstration de la linéarité de u (à ne pas oublier!) est élémentaire :
En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_0), \dots, (\lambda P + Q)(a_n)) \\ &= (\lambda P(a_0) + Q(a_0), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_0), \dots, P(a_n)) + (Q(a_0), \dots, Q(a_n)) = \lambda u(P) + u(Q). \end{aligned}$$

- Si $P \in \text{Ker } u$ alors $\deg P \leq n$ et P s'annule en $n+1$ valeurs distinctes, donc P est le polynôme nul. Ainsi $\text{Ker } u = \{0\}$, donc u est injective. Puisque les espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont de mêmes dimensions ($n+1$), le résultat découle directement du théorème 14
- Simplement par définition d'une bijection :

$$\forall (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tq } u(P) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.

Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $L_j(a_i) = \delta_{i,j}$.

Donc L_j est divisible par $\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X - a_i)$, et puisque ces deux polynômes sont de même degré n , il existe une constante λ telle que $L_j = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ donne alors $1 = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (a_j - a_i)$.

Finalement, on a, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i} \right)$.

Les polynômes L_j pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$; puisque, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a, par définition, $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) = \sum_{j=0}^n P(a_j) e_j$, en appliquant u^{-1} on trouve : $P = \sum_{j=0}^n P(a_j) L_j$, c'est-à-dire que dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.

Ainsi, l'unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ qui vérifie $P(a_j) = b_j$ pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ est le polynôme $P = \sum_{j=0}^n b_j L_j$.

Exercice d'application

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2.$$

 Solution:

On écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2) \times 2 \times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

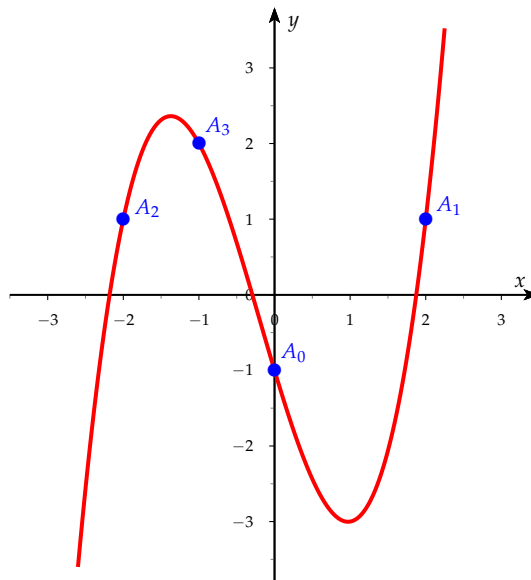
$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2 \times 4 \times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2) \times (-4) \times (-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1) \times (-3) \times 1} = \frac{1}{3}X^3 - \frac{4}{3}X$$

$$\text{Donc } P = -L_0 + L_1 + L_2 + 2L_3 = \frac{5}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{10}{3}X - 1.$$

Illustration graphique :

**Prop 4:**

Avec les notations du théorème précédent, on a

$$\sum_{j=0}^n L_j = 1.$$

Démonstration:

En effet, le polynôme $Q = \sum_{j=0}^n L_j$ et le polynôme constant égal à 1 sont deux polynômes de degrés $\leq n$ qui coïncident en $n+1$ points distincts, donc sont égaux.

Application : Décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19:

Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0) \dots (X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (ainsi, Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme

$$R = E + \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$$

où E appartient à $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration:

- La fraction rationnelle $R_1 = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$ est de degré négatif. L'égalité cherchée équivaut à $P = EQ + R_1Q$, avec $\deg(R_1Q) < \deg Q$. E est donc nécessairement le quotient de la division euclidienne de P par Q (E est la partie entière de la fraction rationnelle R).
- En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{(X - a_i)} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j) \right)}{\prod_{i=0}^n (X - a_i)}$$

soit $\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{(X - a_i)} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i}{Q}$ où $P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$.

L'égalité cherchée équivaut donc à : $P - EQ = R_1Q = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i$. Puisque $\deg(R_1Q) \leq n$, l'existence et l'unicité des λ_i résulte alors du fait que les $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$: en effet, chaque P_i est proportionnel au polynôme d'interpolation de Lagrange L_i .

Rem: Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle R , et les $\frac{\lambda_i}{X - a_i}$ sont des éléments simples de 1ère espèce

Détermination des coefficients λ_j

En reprenant les notations précédentes, on a, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$(X - a_j)R = (X - a_j)E + \lambda_j + (X - a_j) \left(\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{X - a_i} \right).$$

Donc λ_j est égal à la valeur de la fraction rationnelle $(X - a_j)R$ évaluée en $X = a_j$ (les autres termes s'annulant en cette valeur). On note :

$$\lambda_j = (X - a_j)R \Big|_{X=a_j}.$$

Exercice d'application

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \frac{X^{2022} + 1}{X^3 - X}$.

 **Solution:**

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022} + 1 = (X^3 - X)(X^{2019} + X^{2017} + \dots + X) + X^2 + 1$$

donc $R = E + \frac{X^2 + 1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019} + X^{2017} + \dots + X$.

Ensuite $R_1 = \frac{X^2 + 1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+1}$ et par la méthode exposée ci-dessus on trouve : $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

Vérification : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = 1 = a + b + c \dots$

Pour conclure :

$$\frac{X^{2022} + 1}{X^3 - X} = X^{2019} + X^{2017} + \dots + X + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1}.$$

