Chapitre II : Révisions et compléments sur les applications linéaires

PSI*

Septembre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITIONS

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(x + y) = u(x) + u(y) \ \textbf{et} \ u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ ,\ \forall\,(x,y) \in E^2\ ,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \forall\,(x,y) \in E^2\ ,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K}\ ,\ \forall\,(x,y) \in E^2\ ,\ u(x + y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(x + y) = u(x) + u(y) \textbf{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

On note : $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite linéaire si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(on dit aussi que u est un morphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F).

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

ou par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ , \ \forall (x, y) \in E^2 \ , \ u(x + y) = u(x) + u(y) \ \textbf{et} \ u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

On note : $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque

L'apparente simplicité de la définition masque une subtilité. En effet, pour des raisons de commodité, les lois dans E et dans F sont notées de la même façon.
Mais, par exemple, dans l'expression $u(x + y)$ le + est l'addition dans E alors que dans l'expression $u(x) + u(y)$, le + représente l'addition de F.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$** : $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe x_i.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe x_i.

La démonstration de la linéarité **ne doit pas poser de problème** !

Par exemple, pour montrer qu'une homothétie de rapport λ est linéaire, il suffit d'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ h_\lambda(\alpha x + y) = \lambda(\alpha x + y) = \alpha\lambda x + \lambda y = \alpha h_\lambda(x) + h_\lambda(y)\,.$$

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application p_i : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe x_i.

Propriétés

1. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $u(0_E) = 0_F$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe x_i.

Propriétés

1. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $u(0_E) = 0_F$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $x \in E$, $u(-x) = -u(x)$.

Exemples d'applications linéaires à connaître

1. L'application nulle $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$.
2. L'**homothétie de rapport** $\lambda \in \mathbb{K}$: $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
4. L'application **évaluation en un point** : $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$ dans E, avec $a \in D$, D ensemble quelconque, E espace vectoriel.
5. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $p_i : \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k \longrightarrow E_i$ (où les E_k sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels), qui à $(x_1, \dots, x_n)$ associe x_i.

Propriétés

1. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $u(0_E) = 0_F$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $x \in E$, $u(-x) = -u(x)$.
3. L'application identique de E, notée Id_E, est un automorphisme de E.

Définition 2

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F,\ \ u(x) \in F\,.$$

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F, noté u_F et appelé endomorphisme induit par u sur F.

Définition 2

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit <u>stable</u> par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F,\ \ u(x) \in F\,.$$

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F, noté u_F et appelé <u>endomorphisme induit par u sur F</u>.

Ne pas confondre les notions d'**endomorphisme induit** et de **restriction**.

- La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est

  1) un sous-espace vectoriel de E **2)** stable par u

  (pour pouvoir parler d'**endomorphisme** de F).

Définition 2

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in F,\ \ u(x) \in F\,.$$

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F, noté u_F et appelé endomorphisme induit par u sur F.

Ne pas confondre les notions d'**endomorphisme induit** et de **restriction**.

- La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est

  1) un sous-espace vectoriel de E **2)** stable par u

  (pour pouvoir parler d'**endomorphisme** de F).

- La notion de restriction est beaucoup plus générale :

  Si f est une application d'un ensemble A vers un ensemble B, et si A' est une partie non vide de A, on définit la **restriction de f à A'** comme étant l'application

  $$f|_{A'}\ :\ \begin{array}{rcl} A' & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- Si A' est une partie de A, on appelle image (directe) de A' par f l'ensemble des images des éléments de A' par f c'est-à-dire :
$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in A' \text{ tq } y = f(x)\}.$$

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- Si A' est une partie de A, on appelle <u>image (directe) de A' par f</u> l'ensemble des images des éléments de A' par f c'est-à-dire :
$$f(A') = \left\{f(x) \;\middle|\; x \in A'\right\} = \left\{y \in B \;\middle|\; \exists\, x \in A' \text{ tq } y = f(x)\right\}.$$
- Si B' est une partie de B on appelle <u>image réciproque de B' par f</u> l'ensemble des antécédents dans A des éléments de B' c'est-à-dire :
$$f^{-1}(B') = \left\{x \in A \;\middle|\; f(x) \in B'\right\}.$$

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- Si A' est une partie de A, on appelle image (directe) de A' par f l'ensemble des images des éléments de A' par f c'est-à-dire :
$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in A' \text{ tq } y = f(x)\}.$$
- Si B' est une partie de B on appelle image réciproque de B' par f l'ensemble des antécédents dans A des éléments de B' c'est-à-dire :
$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}.$$

Attention : l'écriture $f^{-1}(B')$ est une simple notation « globale », elle ne signifie pas que l'application f^{-1} existe c'est-à-dire que f est bijective.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. D'abord, puisque $u(0_E) = 0_F$ et que $0_E \in E'$, $0_F \in u(E')$ et $u(E') \neq \emptyset$.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.

2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. D'abord, puisque $u(0_E) = 0_F$ et que $0_E \in E'$, $0_F \in u(E')$ et $u(E') \neq \emptyset$.
Ensuite, si $(y_1, y_2) \in u(E')^2$, il existe $(x_1, x_2) \in E'^2$ tq $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2 = u(\lambda x_1 + x_2)$ puisque u est linéaire. Or $\lambda x_1 + x_2 \in E'$ puisque E' est un sous-espace vectoriel, donc $\lambda y_1 + y_2 \in u(E')$.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. D'abord, puisque $u(0_E) = 0_F$ et que $0_E \in E'$, $0_F \in u(E')$ et $u(E') \neq \emptyset$.
Ensuite, si $(y_1, y_2) \in u(E')^2$, il existe $(x_1, x_2) \in E'^2$ tq $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2 = u(\lambda x_1 + x_2)$ puisque u est linéaire. Or $\lambda x_1 + x_2 \in E'$ puisque E' est un sous-espace vectoriel, donc $\lambda y_1 + y_2 \in u(E')$.
2. Puisque $0_F \in F'$ et que $u(0_E) = 0_F$, $0_E \in u^{-1}(F')$ et $u^{-1}(F') \neq \emptyset$.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. D'abord, puisque $u(0_E) = 0_F$ et que $0_E \in E'$, $0_F \in u(E')$ et $u(E') \neq \emptyset$.
Ensuite, si $(y_1, y_2) \in u(E')^2$, il existe $(x_1, x_2) \in E'^2$ tq $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + y_2 = u(\lambda x_1 + x_2)$ puisque u est linéaire. Or $\lambda x_1 + x_2 \in E'$ puisque E' est un sous-espace vectoriel, donc $\lambda y_1 + y_2 \in u(E')$.
2. Puisque $0_F \in F'$ et que $u(0_E) = 0_F$, $0_E \in u^{-1}(F')$ et $u^{-1}(F') \neq \emptyset$.
Ensuite, si $(x_1, x_2) \in u^{-1}(F')^2$, on a $u(x_1) \in F'$ et $u(x_2) \in F'$. F' étant un sous-espace vectoriel, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u(x_1) + u(x_2) = u(\lambda x_1 + x_2) \in F'$, donc $\lambda x_1 + x_2 \in u^{-1}(F')$.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 3

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble image de E par u est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de u, et noté $\mathrm{Im}\, u$. Ainsi : $\mathrm{Im}\, u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}$.

Théorème 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, son image par u :
$$u(E') = \{u(x) \mid x \in E'\}$$
est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F, son image réciproque par u :
$$u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 3

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble image de E par u est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de u, et noté $\operatorname{Im} u$. Ainsi : $\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}$.
2. L'image réciproque de 0_F par u est un sous-espace vectoriel de E, appelé noyau de u, et noté $\operatorname{Ker} u$. Ainsi : $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$.

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$
- f est dite **injective** si tout élément de B a *au plus* un antécédent, ce qui revient à dire que deux éléments distincts de A ont deux images distinctes, ou encore :
$$\forall\,(x, x') \in A^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\ .$$

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$
- f est dite **injective** si tout élément de B a *au plus* un antécédent, ce qui revient à dire que deux éléments distincts de A ont deux images distinctes, ou encore :
$$\forall\, (x, x') \in A^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\ .$$
- f est dite **bijective** si tout élément de B a *exactement* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists! x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$
- f est dite **injective** si tout élément de B a *au plus* un antécédent, ce qui revient à dire que deux éléments distincts de A ont deux images distinctes, ou encore :
$$\forall\,(x, x') \in A^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\ .$$
- f est dite **bijective** si tout élément de B a *exactement* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists! x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

Démonstration

1. résulte directement de la définition de l'image et de la définition de la surjectivité (d'ailleurs, cette propriété est vraie pour toute application, même non linéaire).

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$
- f est dite **injective** si tout élément de B a *au plus* un antécédent, ce qui revient à dire que deux éléments distincts de A ont deux images distinctes, ou encore :
$$\forall\,(x, x') \in A^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\ .$$
- f est dite **bijective** si tout élément de B a *exactement* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists! x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

Démonstration

2. • Si u est injective et si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $0_F = u(x) = u(0_E)$ d'où $x = 0_E$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset \{0_E\}$, et puisque $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u$, d'où l'égalité.

Théorème 2

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. u surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} u = F$.
2. u injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

Rappel

Soient A et B deux ensembles, et f une application de A vers B.

- f est dite **surjective** si tout élément de B a *au moins* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \text{ tel que } y = f(x).$$
- f est dite **injective** si tout élément de B a *au plus* un antécédent, ce qui revient à dire que deux éléments distincts de A ont deux images distinctes, ou encore :
$$\forall\, (x, x') \in A^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\ .$$
- f est dite **bijective** si tout élément de B a *exactement* un antécédent, c'est-à-dire :
$$\forall\, y \in B, \exists! x \in A \text{ tel que } y = f(x)$$

Démonstration

2.
   - Si u est injective et si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $0_F = u(x) = u(0_E)$ d'où $x = 0_E$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset \{0_E\}$, et puisque $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E, on a $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u$, d'où l'égalité.
   - Supposons $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Alors, si x et y dans E sont tels que $u(x) = u(y)$, on a $u(x - y) = 0_F$ par linéarité, d'où $x - y \in \operatorname{Ker} u$ d'où $x = y$: u est injective.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que

$$u\big(\lambda(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \ldots, x_n) + u(y_1, \ldots, y_n)$$

  ce qui est immédiat.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n)$$
ce qui est immédiat.

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $x_i, y_i \in E_i$ on a :

$$\begin{aligned} u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) &= u(\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n) \\ &= (\lambda x_1 + y_1) + \cdots + (\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + y_1 + \cdots + y_n \\ &= \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \ldots, x_n) + u(y_1, \ldots, y_n)$$
ce qui est immédiat.

Une façon plus subtile de démontrer la linéarité de u consiste à remarquer que chaque application

$$p_i : \left\{ \begin{array}{rcc} E_i & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$$

est linéaire, donc $u = p_1 + \cdots + p_n$ l'est d'après le théorème 4.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n)$$
ce qui est immédiat.
- $\operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n)$$
ce qui est immédiat.
- $\operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \ldots, x_n) + u(y_1, \ldots, y_n)$$
ce qui est immédiat.
- $\operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\Longleftrightarrow E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

  En effet, $\operatorname{Ker} u = \{0_{E_1 \times \ldots \times E_n}\}$ équivaut à
$$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0,$$
  ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n)$$
ce qui est immédiat.
- $\operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

  En effet, $\operatorname{Ker} u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à
$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$
  ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe.
- En conclusion : u bijective $\iff E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Exemple : *lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels*

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On peut alors considérer l'application :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$$

- u est linéaire : il suffit de vérifier que
$$u\big(\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) = \lambda u(x_1, \dots, x_n) + u(y_1, \dots, y_n)$$
ce qui est immédiat.
- $\operatorname{Im} u = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^{n} E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} E_i$ est directe.

  En effet, $\operatorname{Ker} u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à
$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$
  ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe.
- En conclusion : u bijective $\iff\ E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
- Si E est de dimension finie, on retrouve à l'aide de la proposition 2 le résultat :
$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \dim \prod_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i\ .$$

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$. Soit v la restriction de u à S.

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$. Soit v la restriction de u à S.

- v est évidemment à valeurs dans $\operatorname{Im} u$.

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$. Soit v la restriction de u à S.

- v est évidemment à valeurs dans $\operatorname{Im} u$.
- v est linéaire, puisque u l'est (la propriété $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ étant vraie pour tous x, y dans E, elle l'est pour tous x, y dans S !).

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$. Soit v la restriction de u à S.

- v est évidemment à valeurs dans $\operatorname{Im} u$.
- v est linéaire, puisque u l'est (la propriété $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ étant vraie pour tous x, y dans E, elle l'est pour tous x, y dans S !).
- v est injective, car $\operatorname{Ker} v = \{x \in S \mid v(x) = 0\} = \{x \in S \mid u(x) = 0\} = \operatorname{Ker} u \cap S = \{0\}$.

Théorème 3: *théorème d'isomorphisme (fondamental)*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E : $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$. Soit v la restriction de u à S.

- v est évidemment à valeurs dans $\operatorname{Im} u$.
- v est linéaire, puisque u l'est (la propriété $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ étant vraie pour tous x, y dans E, elle l'est pour tous x, y dans S !).
- v est injective, car $\operatorname{Ker} v = \{x \in S \mid v(x) = 0\} = \{x \in S \mid u(x) = 0\} = \operatorname{Ker} u \cap S = \{0\}$.
- v est surjective de S sur $\operatorname{Im} u$ car :
  Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors, il existe $x \in E$ tq $y = u(x)$. Puisque $E = S + \operatorname{Ker} u$, il existe $(s, z) \in S \times \operatorname{Ker} u$ tq $x = s + z$.
  On a alors $y = u(x) = u(s) + \underbrace{u(z)}_{=0_E} = u(s) = v(s)$, donc y possède bien un antécédent par v.

OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Démonstration

- $\mathscr{L}(E,F)$ n'est pas vide, car l'application nulle, qui à tout x de E associe le vecteur nul 0_F, est trivialement linéaire.

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$.

Démonstration

- $\mathscr{L}(E, F)$ n'est pas vide, car l'application nulle, qui à tout x de E associe le vecteur nul 0_F, est trivialement linéaire.
- On vérifie facilement que, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si u, v sont deux applications linéaires de E dans F, alors $w = \lambda u + v$ est encore une application linéaire de E dans F :

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Démonstration

- $\mathscr{L}(E,F)$ n'est pas vide, car l'application nulle, qui à tout x de E associe le vecteur nul 0_F, est trivialement linéaire.
- On vérifie facilement que, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si u, v sont deux applications linéaires de E dans F, alors $w = \lambda u + v$ est encore une application linéaire de E dans F :
  $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, (x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} w(\alpha x + y) &= (\lambda u + v)(\alpha x + y) = \lambda u(\alpha x + y) + v(\alpha x + y) \\ &= \lambda\big(\alpha u(x) + u(y)\big) + \alpha v(x) + v(y) \quad \text{(car } u \text{ et } v \text{ sont linéaires)} \\ &= \alpha(\lambda u(x) + v(x)) + \lambda u(y) + v(y) = \alpha w(x) + w(y) \end{aligned}$$

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Démonstration

- $\mathscr{L}(E,F)$ n'est pas vide, car l'application nulle, qui à tout x de E associe le vecteur nul 0_F, est trivialement linéaire.
- On vérifie facilement que, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si u, v sont deux applications linéaires de E dans F, alors $w = \lambda u + v$ est encore une application linéaire de E dans F :
  $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, (x,y) \in E^2$,
  $$\begin{aligned} w(\alpha x + y) &= (\lambda u + v)(\alpha x + y) = \lambda u(\alpha x + y) + v(\alpha x + y) \\ &= \lambda\big(\alpha u(x) + u(y)\big) + \alpha v(x) + v(y) \quad \text{(car } u \text{ et } v \text{ sont linéaires)} \\ &= \alpha(\lambda u(x) + v(x)) + \lambda u(y) + v(y) = \alpha w(x) + w(y) \end{aligned}$$
  c'est-à-dire que $\mathscr{L}(E,F)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Théorème 5

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$.

Théorème 5

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F, G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Démonstration

Ce sont de simples vérifications. Par exemple :

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Théorème 5

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Démonstration

Ce sont de simples vérifications. Par exemple :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2$,
$$v \circ u(\lambda x + y) = v\big[u(\lambda x + y)\big] \underbrace{=}_{u \text{ linéaire}} v\big[\lambda u(x) + u(y)\big] \underbrace{=}_{v \text{ linéaire}} \lambda v \circ u(x) + v \circ u(y)$$

Théorème 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E,F)$.

Théorème 5

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Démonstration

Ce sont de simples vérifications. Par exemple :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,$

$$v \circ u(\lambda x + y) = v\big[u(\lambda x + y)\big] \underbrace{=}_{u \text{ linéaire}} v\big[\lambda u(x) + u(y)\big] \underbrace{=}_{v \text{ linéaire}} \lambda v \circ u(x) + v \circ u(y)$$

3. $$\forall x \in E, \big[v \circ (u_1 + u_2)\big](x) = v\big[(u_1 + u_2)(x)\big] = v\big[u_1(x) + u_2(x)\big] \underbrace{=}_{v \text{ linéaire}} v \circ u_1(x) + v \circ u_2(x)$$

$$= \big[v \circ u_1 + v \circ u_2\big](x) \quad \text{d'où } v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2.$$

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u.$
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v.$

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Démonstration

1.
   - Si $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$ donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \mathrm{Im}\, v$.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Démonstration

1.
   - Si $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$ donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \mathrm{Im}\, v$.
   - Si $x \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où $v \circ u(x) = v(0_F) = 0_G$ donc $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v \quad$ et $\quad \mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Démonstration

1.
   - Si $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$ donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \mathrm{Im}\, v$.
   - Si $x \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où $v \circ u(x) = v(0_F) = 0_G$ donc $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ v\big[u(x)\big] = 0_G \Leftrightarrow \forall\, y \in \mathrm{Im}\, u,\ v(y) = 0_G \Leftrightarrow \forall\, y \in \mathrm{Im}\, u,\ y \in \mathrm{Ker}\, v \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Ces propriétés sont assez élémentaires, mais **importantes**.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
  - la loi $\circ$ est interne dans $\mathscr{L}(E)$: découle du théorème 5.1

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
  - la loi $\circ$ est interne dans $\mathscr{L}(E)$: découle du théorème 5.1
  - la loi $\circ$ est associative : elle l'est toujours !

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
  - la loi $\circ$ est interne dans $\mathscr{L}(E)$: découle du théorème 5.1
  - la loi $\circ$ est associative : elle l'est toujours !
  - la loi $\circ$ possède un élément neutre : c'est l'application identique de E, Id_E (qui est bien un endomorphisme).

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
  - la loi $\circ$ est interne dans $\mathscr{L}(E)$: découle du théorème 5.1
  - la loi $\circ$ est associative : elle l'est toujours !
  - la loi $\circ$ possède un élément neutre : c'est l'application identique de E, Id_E (qui est bien un endomorphisme).
  - la loi $\circ$ est distributive par rapport à $+$: découle du théorème 5.3 et 5.4

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Démonstration

- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel découle du théorème 4.
- Pour montrer que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre, il reste à vérifier :
  - la loi $\circ$ est interne dans $\mathscr{L}(E)$: découle du théorème 5.1
  - la loi $\circ$ est associative : elle l'est toujours !
  - la loi $\circ$ possède un élément neutre : c'est l'application identique de E, Id_E (qui est bien un endomorphisme).
  - la loi $\circ$ est distributive par rapport à $+$: découle du théorème 5.3 et 5.4
- Enfin il reste à vérifier

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2,\ \lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$$

ce qui a été fait au théorème 5.2

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Dire que l'algèbre n'est pas **intègre** signifie que l'on peut avoir $u \circ v = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ce n'est pas bien difficile de trouver des exemples en dimension 2...

On peut aussi facilement trouver des exemples d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

1. $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}\, u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Dire que l'algèbre n'est pas **intègre** signifie que l'on peut avoir $u \circ v = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ce n'est pas bien difficile de trouver des exemples en dimension 2...

On peut aussi facilement trouver des exemples d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Théorème 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F, u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Dire que l'algèbre n'est pas **intègre** signifie que l'on peut avoir $u \circ v = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ce n'est pas bien difficile de trouver des exemples en dimension 2...

On peut aussi facilement trouver des exemples d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Théorème 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F, u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration

u^{-1} est bijective, donc il reste à montrer que u^{-1} est linéaire :

Proposition 1: *image et noyau d'une composée*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geqslant 2$).

Dire que l'algèbre n'est pas **intègre** signifie que l'on peut avoir $u \circ v = 0$ avec $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ce n'est pas bien difficile de trouver des exemples en dimension 2...

On peut aussi facilement trouver des exemples d'endomorphismes u et v tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Théorème 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F, u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration

u^{-1} est bijective, donc il reste à montrer que u^{-1} est linéaire :

Soient $x, y \in F$, et $a = u^{-1}(x)$, $b = u^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda a + b) = \lambda u(a) + b = \lambda x + y$, d'où $u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda a + b = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)$.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

On vérifie la définition d'un groupe :

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

On vérifie la définition d'un groupe :

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathrm{GL}(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E car la composée de deux applications linéaires est linéaire et la composée de deux bijections est une bijection (rappelons au passage que **si** $u, v \in \mathrm{GL}(E)$**,** $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$).

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

On vérifie la définition d'un groupe :

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathrm{GL}(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E car la composée de deux applications linéaires est linéaire et la composée de deux bijections est une bijection (rappelons au passage que **si** $u, v \in \mathrm{GL}(E)$**,** $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$).
- La loi $\circ$ est associative (propriété générale).

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

On vérifie la définition d'un groupe :

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathrm{GL}(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E car la composée de deux applications linéaires est linéaire et la composée de deux bijections est une bijection (rappelons au passage que **si** $u, v \in \mathrm{GL}(E)$, $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$).
- La loi $\circ$ est associative (propriété générale).
- La loi $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathrm{GL}(E)$: c'est Id_E.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe linéaire de E, et noté $\mathrm{GL}(E)$.

Démonstration

On vérifie la définition d'un groupe :

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathrm{GL}(E)$: la composée de deux automorphismes de E est un automorphisme de E car la composée de deux applications linéaires est linéaire et la composée de deux bijections est une bijection (rappelons au passage que **si** $u, v \in \mathrm{GL}(E)$, $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$).
- La loi $\circ$ est associative (propriété générale).
- La loi $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathrm{GL}(E)$: c'est Id_E.
- Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, $u^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$ d'après le th. précédent.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

Démonstration

- On commence par démontrer que si u et v commutent, il en est de même de u^k et de v pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur k.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

Démonstration

- On commence par démontrer que si u et v commutent, il en est de même de u^k et de v pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur k.
  En effet, la relation $u^k v = vu^k$ est vraie pour $k = 0, 1$ et si elle est vraie à un ordre k alors, en utilisant en particulier l'associativité de la loi $\circ$:
  $$u^{k+1}v = u(u^k v) = u(vu^k) = (uv)u^k = (vu)u^k = vu^{k+1}$$
  donc elle est encore vraie à l'ordre $k + 1$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

Démonstration

- On commence par démontrer que si u et v commutent, il en est de même de u^k et de v pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur k.
  En effet, la relation $u^k v = vu^k$ est vraie pour $k = 0, 1$ et si elle est vraie à un ordre k alors, en utilisant en particulier l'associativité de la loi $\circ$:
  $$u^{k+1}v = u(u^k v) = u(vu^k) = (uv)u^k = (vu)u^k = vu^{k+1}$$
  donc elle est encore vraie à l'ordre $k + 1$.
- On en déduit ensuite que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, u^k et v^ℓ commutent (récurrence sur ℓ).

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.

Démonstration

- On commence par démontrer que si u et v commutent, il en est de même de u^k et de v pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur k.
  En effet, la relation $u^k v = vu^k$ est vraie pour $k = 0, 1$ et si elle est vraie à un ordre k alors, en utilisant en particulier l'associativité de la loi $\circ$:
  $$u^{k+1}v = u(u^k v) = u(vu^k) = (uv)u^k = (vu)u^k = vu^{k+1}$$
  donc elle est encore vraie à l'ordre $k + 1$.
- On en déduit ensuite que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, u^k et v^ℓ commutent (récurrence sur ℓ).
- Il suffit ensuite de développer le produit $(u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$ en utilisant les règles de calcul vues plus haut et la propriété ci-dessus pour retrouver $u^n - v^n$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
   - **si u et v commutent** : $(u + v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
   - **si u et v commutent** : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).

Démonstration

Se démontre par récurrence sur n en utilisant la formule du triangle de Pascal et en remarquant que, puisque u et v commutent il en est de même de toutes leurs puissances donc on aura, par exemple, $u^k v^{n-k} u = u^{k+1} v^{n-k}$.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
   - **si u et v commutent** : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).
4. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en posant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u^{-n} = \left(u^{-1}\right)^n .$$

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
   - **si u et v commutent** : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).
4. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en posant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u^{-n} = \left(u^{-1}\right)^n .$$

Le résultat utilisé dans la démonstration précédente, à savoir :

si u et v commutent, il en est de même de toutes leurs puissances

est important à retenir.

Remarques

1. On adopte souvent dans $\mathscr{L}(E)$ la **notation multiplicative**, c'est-à-dire que l'on écrit uv au lieu de $u \circ v$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n-ièmes). Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u \quad (n \text{ fois})$.
3. $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ étant une algèbre, les règles de calcul permettent de montrer que :
   - $u^n - \mathrm{Id}_E = (u - \mathrm{Id}_E)(u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Id}_E)$.
   - **si u et v commutent** : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$.
   - **si u et v commutent** : $(u+v)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme).
4. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en posant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u^{-n} = \left(u^{-1}\right)^n .$$

Le résultat utilisé dans la démonstration précédente, à savoir :

si u et v commutent, il en est de même de toutes leurs puissances

est important à retenir.

Lorsque u (ou v) est inversible, cela s'étend aussi aux puissances négatives, puisque, si u et v commutent et u inversible, alors u^{-1} et v commutent aussi car, en utilisant l'associativité de la loi $\circ$:

$$u^{-1}v = u^{-1}v(uu^{-1}) = u^{-1}(vu)u^{-1} = u^{-1}(uv)u^{-1} = (u^{-1}u)vu^{-1} = vu^{-1} .$$

PROJECTEURS
SYMÉTRIES

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = E_1 \oplus E_2$).
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

L'application $p : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_1 \end{array}$ s'appelle la **projection sur E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).

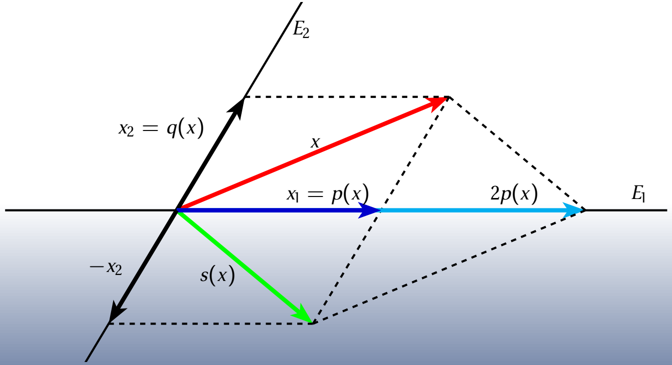
L'application $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array}$ s'appelle la **symétrie par rapport à E_1 de direction E_2**.

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = E_1 \oplus E_2$). Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

L'application $p : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_1 \end{array}$ s'appelle la **projection sur E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).

L'application $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array}$ s'appelle la **symétrie par rapport à E_1 de direction E_2**.



Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.

Démonstration

En effet, avec les mêmes notations que dans la définition on a

$$\forall x \in E, \ (2p - \mathrm{Id}_E)(x) = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)\,.$$

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.

Démonstration

Compte tenu de la relation obtenue en 1., il suffit de faire la démonstration pour p, ce qui est immédiat :

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.

Démonstration

Compte tenu de la relation obtenue en **1.**, il suffit de faire la démonstration pour p, ce qui est immédiat :

Si $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ sont deux vecteurs de E, avec $x_i, y_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, et si λ est un scalaire, alors

$$p(\lambda x + y) = p\Big(\underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in E_2}\Big) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y)\,.$$

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).

Démonstration

En effet, avec les mêmes notations que dans la définition on a

$$\forall\, x \in E,\ p^2(x) = p\big[p(x)\big]\big) = p(x_1) = x_1 = p(x)\,.$$

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).

Démonstration

En utilisant les résultats précédents : $s^2 = (2p - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Démonstration

- Si $x \in \mathrm{Inv}(p)$ on a $x = p(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$: $\mathrm{Inv}(p) \subset \mathrm{Im}\, p$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Démonstration

- Si $x \in \mathrm{Inv}(p)$ on a $x = p(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$: $\mathrm{Inv}(p) \subset \mathrm{Im}\, p$.
  Si $x \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$, puis $x \in \mathrm{Inv}(p)$: $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Inv}(p)$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Démonstration

- Si $x \in \mathrm{Inv}(p)$ on a $x = p(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$: $\mathrm{Inv}(p) \subset \mathrm{Im}\, p$.
  Si $x \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$, puis $x \in \mathrm{Inv}(p)$: $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Inv}(p)$.
  Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $p(x) = x_1$ d'où l'équivalence :
  $$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x_2 = 0 \iff x \in E_1,$$
  donc $\mathrm{Inv}(p) = E_1$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Démonstration

- Si $x \in \mathrm{Inv}(p)$ on a $x = p(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$: $\mathrm{Inv}(p) \subset \mathrm{Im}\, p$.
  Si $x \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$, puis $x \in \mathrm{Inv}(p)$: $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Inv}(p)$.
  Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $p(x) = x_1$ d'où l'équivalence :
  $$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x_2 = 0 \iff x \in E_1,$$
  donc $\mathrm{Inv}(p) = E_1$.
- Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $p(x) = x_1$ d'où l'équivalence :
  $$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in E_2 .$$
  Cela démontre directement l'égalité $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit <u>idempotent</u>).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit <u>involutif</u>).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.
6. $\mathrm{Inv}(s) = E_1$ et $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.
6. $\mathrm{Inv}(s) = E_1$ et $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.

Démonstration

$s(x) = x \iff (2p - \mathrm{Id}_E)(x) = x \iff p(x) = x$ et $s(x) = -x \iff (2p - \mathrm{Id}_E)(x) = -x \iff p(x) = 0$, donc il suffit d'appliquer le résultat précédent.

Propriétés

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.
6. $\mathrm{Inv}(s) = E_1$ et $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.
7. Si p est la projection sur E_1 de direction E_2, et q est la projection sur E_2 de direction E_1, $p + q = \mathrm{Id}_E$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (p et q sont dits associés).

Propriétés

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = x\} \text{ et } \mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E (car noyaux d'un endomorphisme).

1. $s = 2p - id_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E.
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}\, p = E_1$ et $\mathrm{Ker}\, p = E_2$.
6. $\mathrm{Inv}(s) = E_1$ et $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.
7. Si p est la projection sur E_1 de direction E_2, et q est la projection sur E_2 de direction E_1, $p + q = \mathrm{Id}_E$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (p et q sont dits associés).

Démonstration

Immédiat puisque, toujours avec les mêmes notations, $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$ donc $(p + q)(x) = x_1 + x_2 = x = \mathrm{Id}_E(x)$.

De plus, l'écriture $x_1 = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2}$ montre que $q(x_1) = 0$ c'est-à-dire $q \circ p(x) = 0$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \;\; ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \;\; ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
  - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \;\; ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \;\; ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
  - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;
  - Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \operatorname{Inv}(p)$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
  - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;
  - Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \operatorname{Inv}(p)$.
- Montrons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \;\; ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \;\; ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
    - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;
    - Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \operatorname{Inv}(p)$.
- Montrons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
    - $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$ car, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, on a $p(x) = 0$ d'une part, et $x \in \operatorname{Inv}(p)$ soit $p(x) = x$ d'autre part, donc $x = 0$;

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un <u>projecteur</u> si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{ et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
  - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;
  - Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \operatorname{Inv}(p)$.
- Montrons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
  - $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$ car, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, on a $p(x) = 0$ d'une part, et $x \in \operatorname{Inv}(p)$ soit $p(x) = x$ d'autre part, donc $x = 0$;
  - Soit $x \in E$. On a : $x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{=x_2}$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $p(x_2) = p(x) - p^2(x) = 0$ soit $x_2 \in \operatorname{Ker} p$,

    donc $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Démonstration

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\operatorname{Inv}(p) = \operatorname{Im} p$.
  - On a toujours $\operatorname{Inv}(p) \subset \operatorname{Im} p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \operatorname{Im} p$;
  - Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \operatorname{Inv}(p)$.
- Montrons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
  - $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$ car, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, on a $p(x) = 0$ d'une part, et $x \in \operatorname{Inv}(p)$ soit $p(x) = x$ d'autre part, donc $x = 0$;
  - Soit $x \in E$. On a : $x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{=x_2}$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $p(x_2) = p(x) - p^2(x) = 0$ soit $x_2 \in \operatorname{Ker} p$,

    donc $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.
- Enfin, p est bien la projection sur $\operatorname{Im} p$ de direction $\operatorname{Ker} p$, car, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$, on a $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + 0 = x_1$.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. u s'appelle un projecteur si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \ ; \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p) \ ; \text{et } p \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} p \text{ de direction } \operatorname{Ker} p.$$

Il faut retenir que la décomposition de $x \in E$ dans la somme directe $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ s'écrit :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}$$

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i l'application : $p_i \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, p_i l'application : $p_i \; : \; \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$.

On a les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont élémentaires :

- $\forall\, i \in [\![1 ; n]\!] \;,\; p_i \circ p_i = p_i$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i l'application : $p_i \ : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$.

On a les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont élémentaires :

- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$.
- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i l'application : $p_i \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$.

On a les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont élémentaires :

- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i \circ p_i = p_i$.
- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i$ est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} E_j$.
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i l'application : $p_i \; : \; \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_i \end{array}$.

On a les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont élémentaires :

- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i \circ p_i = p_i$.
- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i$ est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} E_j$.
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.
- $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Généralisation à la somme de n sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

on note alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, p_i l'application : $p_i \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}$.

On a les propriétés suivantes, dont les démonstrations sont élémentaires :

- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i \circ p_i = p_i$.
- $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ p_i$ est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} E_j$.
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.
- $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Définition 6

On dit que $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la famille de projecteurs canoniquement associée à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,;\ \text{et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,;\text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.
Donc p est une projection, forcément sur $\mathrm{Inv}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$. Or

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,;\text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.
Donc p est une projection, forcément sur $\mathrm{Inv}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$. Or

$$\mathrm{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{x \in E \,\middle|\, \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = x\right\} = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Inv}(s)$$

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,;\ \text{et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.
Donc p est une projection, forcément sur $\mathrm{Inv}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$. Or

$$\mathrm{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = x\right\} = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Inv}(s)$$

et

$$\mathrm{Ker}\, p = \{x \in E \mid p(x) = 0\} = \left\{x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = 0\right\} = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Opp}(s)$$

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)\,; \text{ et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.
Donc p est une projection, forcément sur $\mathrm{Inv}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$. Or

$$\mathrm{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = x \right\} = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Inv}(s)$$

et

$$\mathrm{Ker}\, p = \{x \in E \mid p(x) = 0\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = 0 \right\} = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Opp}(s)$$

Ainsi, p est la projection sur Inv(s) de direction $\mathrm{Opp}(s)$, et $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, donc s est bien la symétrie annoncée.

Symétries

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), alors :

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s) \text{ ; et } s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Inv}(s) \text{ de direction } \mathrm{Opp}(s).$$

Démonstration

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit alors $p = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. On a : $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{Id}_E}{2} = p$.
Donc p est une projection, forcément sur $\mathrm{Inv}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\, p$. Or

$$\mathrm{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = x \right\} = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Inv}(s)$$

et

$$\mathrm{Ker}\, p = \{x \in E \mid p(x) = 0\} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \left(\frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}\right)(x) = 0 \right\} = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Opp}(s)$$

Ainsi, p est la projection sur Inv(s) de direction $\mathrm{Opp}(s)$, et $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, donc s est bien la symétrie annoncée.

Il faut retenir que la décomposition de $x \in E$ dans la somme directe $E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s)$ s'écrit :

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Inv}(s)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Opp}(s)}$$

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire $\big(s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g) \dots\big)$ et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire $\big(s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g) \dots\ \big)$ et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $f \in \mathrm{Inv}(s) \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \Longleftrightarrow f$ paire ;

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire $\big(s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g) \ldots\big)$ et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $f \in \mathrm{Inv}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
- $f \in \mathrm{Opp}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire $\big(s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g) \dots \big)$ et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $f \in \mathrm{Inv}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
- $f \in \mathrm{Opp}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

À l'aide du théorème précédent, on retrouve le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de E, et que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

Exemple 1

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire $\big(s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g)\dots\big)$ et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $f \in \mathrm{Inv}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
- $f \in \mathrm{Opp}(s) \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

À l'aide du théorème précédent, on retrouve le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de E, et que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

De plus, la décomposition de $f \in E$ comme somme (de façon unique) d'une application paire et d'une application impaire est :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;
- $A \in \mathrm{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A$ antisymétrique.

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;
- $A \in \mathrm{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A$ antisymétrique.

À l'aide du théorème précédent, on retrouve le fait que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})\,.$$

Exemple 2

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie. On a alors :

- $A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A$ symétrique ;
- $A \in \mathrm{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A$ antisymétrique.

À l'aide du théorème précédent, on retrouve le fait que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) .$$

De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :

$$A = \underbrace{\frac{A + A^\top}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - A^\top}{2}}_{\text{antisym.}} .$$

DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Théorème 11

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ u_i = u|_{E_i}$.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Théorème 11

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i = u|_{E_i}$.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Démonstration

- *Unicité (analyse) :* Si u existe, alors pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$, donc la donnée des u_i détermine u de façon unique.

Théorème 11

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ u_i = u|_{E_i}$.
Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Démonstration

- *Unicité (analyse) :* Si u existe, alors pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$, donc la donnée des u_i détermine u de façon unique.
- *Existence :* Pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$, on pose naturellement $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$. On vérifie alors facilement que u est linéaire (car chaque application $x \mapsto x_i$ l'est, puis composée et somme d'applications linéaires), et que sa restriction à chaque E_i est bien u_i.

Théorème 12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\Longleftrightarrow$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre de F.
3. u surjective $\Longleftrightarrow$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
4. u est un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ $(b_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Théorème 12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre de F.
3. u surjective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
4. u est un isomorphisme $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Démonstration

1. Tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, où (λ_i) est une famille de scalaires à support fini. Si u existe, on doit donc avoir $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$ d'où l'unicité de u.

Théorème 12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(b_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille libre de F.
3. u surjective $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
4. u est un isomorphisme $\iff$ $(b_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Ainsi, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base.

Démonstration

1. Tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, où (λ_i) est une famille de scalaires à support fini. Si u existe, on doit donc avoir $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$ d'où l'unicité de u.

   Réciproquement, on vérifie facilement que l'application $u :\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \longmapsto \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$ est linéaire ; elle convient donc.

Démonstration (suite)

2. - Supposons u injective. Si on a $\sum_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.
  Ainsi, la famille (b_i) est libre.

Démonstration (suite)

2.
- Supposons u injective. Si on a $\sum_{i\in I} \lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.
  Ainsi, la famille (b_i) est libre.
- Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
  On a alors $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injective.

Démonstration (suite)

2.
- Supposons u injective. Si on a $\sum_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.
  Ainsi, la famille (b_i) est libre.
- Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$.
  On a alors $u(x) = \sum_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injective.

3. On remarque déjà que : $u\big(\operatorname{Vect}(\{e_i, i\in I\})\big) = \operatorname{Vect}(\{u(e_i), i\in I\})$; en effet, l'image par u d'une combinaison linéaire des e_i est, par linéarité, une combinaison linéaire des $u(e_i)$.

Démonstration (suite)

2.
   - Supposons u injective. Si on a $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.
     Ainsi, la famille (b_i) est libre.
   - Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i$.
     On a alors $u(x) = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.
     Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injective.
3. On remarque déjà que : $u\big(\operatorname{Vect}(\{e_i, i \in I\})\big) = \operatorname{Vect}(\{u(e_i), i \in I\})$; en effet, l'image par u d'une combinaison linéaire des e_i est, par linéarité, une combinaison linéaire des $u(e_i)$. On a donc :
$$\operatorname{Im} u = u(E) = u\big(\operatorname{Vect}(\{e_i, i \in I\})\big) = \operatorname{Vect}(\{b_i, i \in I\}) .$$
   Donc : u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F \iff \operatorname{Vect}(\{b_i, i \in I\}) = F \iff (b_i)_{i\in I}$ génératrice de F.

Démonstration (suite)

2
- Supposons u injective. Si on a $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.
  Ainsi, la famille (b_i) est libre.
- Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini telle que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i$.
  On a alors $u(x) = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injective.

3 On remarque déjà que : $u\big(\operatorname{Vect}(\{e_i, i \in I\})\big) = \operatorname{Vect}(\{u(e_i), i \in I\})$; en effet, l'image par u d'une combinaison linéaire des e_i est, par linéarité, une combinaison linéaire des $u(e_i)$. On a donc :

$$\operatorname{Im} u = u(E) = u\big(\operatorname{Vect}(\{e_i, i \in I\})\big) = \operatorname{Vect}(\{b_i, i \in I\})\ .$$

Donc : u surjective $\iff \operatorname{Im} u = F \iff \operatorname{Vect}(\{b_i, i \in I\}) = F \iff (b_i)_{i\in I}$ génératrice de F.

On a démontré au passage un résultat qui est très utile :

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, $\operatorname{Im} u$ est exactement le sous-espace vectoriel de F engendré par les $u(e_i)$.

CAS DE LA DIMENSION FINIE

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

- S'il existe u injective de E dans F, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leqslant \dim F$.

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

- S'il existe u injective de E dans F, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leqslant \dim F$.
- Supposons $\dim E \leqslant \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Puisque $n \leqslant \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n, $(b_1, \dots, b_n)$ (il suffit d'extraire n vecteurs d'une base de F). Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i, dont l'existence est assurée par le théorème 12, est injective.

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

- S'il existe u injective de E dans F, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leqslant \dim F$.
- Supposons $\dim E \leqslant \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Puisque $n \leqslant \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n, $(b_1, \dots, b_n)$ (il suffit d'extraire n vecteurs d'une base de F). Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i, dont l'existence est assurée par le théorème 12, est injective.

et pour la seconde équivalence :

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \iff & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

- S'il existe u injective de E dans F, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leqslant \dim F$.
- Supposons $\dim E \leqslant \dim F$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Puisque $n \leqslant \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n, $(b_1, \ldots, b_n)$ (il suffit d'extraire n vecteurs d'une base de F). Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i, dont l'existence est assurée par le théorème 12, est injective.

et pour la seconde équivalence :

- S'il existe u surjective de E dans F, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u = F$, donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\geqslant \dim F$.

Proposition 2

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \leqslant \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathscr{L}(E,F) & \Longleftrightarrow & \dim E \geqslant \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow & \dim E = \dim F \end{array}\right.$$

Démonstration

Pour la première équivalence :

- S'il existe u injective de E dans F, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F (théorème 12), donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leqslant \dim F$.
- Supposons $\dim E \leqslant \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Puisque $n \leqslant \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n, $(b_1, \dots, b_n)$ (il suffit d'extraire n vecteurs d'une base de F). Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i, dont l'existence est assurée par le théorème 12, est injective.

et pour la seconde équivalence :

- S'il existe u surjective de E dans F, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} u = F$, donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\geqslant \dim F$.
- Supposons $\dim E \leqslant \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Puisque $n \geqslant \dim F$, il existe dans F une famille génératrice de cardinal n, $(b_1, \dots, b_n)$ (il suffit de compléter une base de F par des vecteurs quelconques). Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i est surjective, , toujours d'après le théorème 12.

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \;=\; \dim E$$

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\operatorname{dim}(\operatorname{Im} u) + \operatorname{dim}(\operatorname{Ker} u) \ = \ \operatorname{dim} E$$

Démonstration

C'est immédiat à l'aide du théorème 3 : si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, alors S est isomorphe à $\operatorname{Im} u$ (plus précisément, la restriction u_S de u à S est cet isomorphisme), donc

$$\operatorname{dim} \operatorname{Im} u = \operatorname{dim} S = \operatorname{dim} E - \operatorname{dim} \operatorname{Ker} u.$$

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \ = \ \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \; = \; \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a ici $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$...

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \;=\; \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a ici $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$...

Définition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le <u>rang</u> de u : $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\, u) \;=\; \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a ici $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}e_1$...

Définition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le <u>rang</u> de u : $\mathrm{rg}\, u = \dim(\mathrm{Im}\, u)$.

Remarques :

1. Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie, donc $\mathrm{rg}\, u$ est bien défini.

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :
$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \ = \ \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a ici $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$...

Définition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le <u>rang</u> de u : $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Remarques :

1. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, donc $\operatorname{rg} u$ est bien défini.
2. Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est encore de dimension finie, et $\operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) \ = \ \dim E$ d'après le théorème précédent.

Théorème 13: *théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Ker} u) \ = \ \dim E$$

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, **mais $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas forcément supplémentaires !**

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire tel que $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a ici $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$...

Définition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le <u>rang</u> de u : $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Remarques :

1. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, donc $\operatorname{rg} u$ est bien défini.
2. Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est encore de dimension finie, et $\operatorname{rg} u + \dim(\operatorname{Ker} u) \ = \ \dim E$ d'après le théorème précédent.
3. **Rappel :** Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, $\operatorname{rg} u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $\big(u(e_i)\big)_{i \in I}$.

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective}.$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
   Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective}.$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
   Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration

Pour les trois premières propriétés, il suffit d'utiliser le théorème du rang et de savoir compter...

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :

$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$

4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
   Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration

Pour les trois premières propriétés, il suffit d'utiliser le théorème du rang et de savoir compter...

Démontrons la quatrième : on rappelle le résultat (bien utile) suivant :

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G Alors : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ f injective et $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ g surjective.

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration

Pour les trois premières propriétés, il suffit d'utiliser le théorème du rang et de savoir compter...

Démontrons la quatrième : on rappelle le résultat (bien utile) suivant :

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G Alors : $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective et $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

Ici, on a : $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ donc u est injective donc bijective puisque $\dim E = \dim F$. Ainsi u^{-1} existe et $v = v \circ u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ u^{-1} = u^{-1}$.

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Les deux dernières propriétés **ne sont plus vraies** lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$:

par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.

Théorème 14

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie : u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie : u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E et F sont de dimensions finies et **si** $\dim E = \dim F$, on a :
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective.}$$
4. Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = id_E$.
Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Les deux dernières propriétés **ne sont plus vraies** lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$:

par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.

- Les espaces ne sont pas de dimensions finies (même si $E = F$) :

par exemple, si $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, si u est l'application qui à f associe sa dérivée f' et si v est l'application qui à f associe $\left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt\right)$, on a $u \circ v = \mathrm{Id}_E$ mais $v \circ u \neq \mathrm{Id}_E$.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u inversible.
2. $\operatorname{rg} u = n$.
3. u injectif.
4. u surjectif.
5. u inversible à droite.
6. u inversible à gauche.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u inversible.
2. $\operatorname{rg} u = n$.
3. u injectif.
4. u surjectif.
5. u inversible à droite.
6. u inversible à gauche.

Démonstration

- L'équivalence entre les quatre premières propriétés découle de la proposition précédente.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u inversible.
2. $\operatorname{rg} u = n$.
3. u injectif.
4. u surjectif.
5. u inversible à droite.
6. u inversible à gauche.

Démonstration

- L'équivalence entre les quatre premières propriétés découle de la proposition précédente.
- (1) $\Rightarrow$ (5) est évident. Réciproquement, si u est inversible à droite, il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Cela implique en particulier u surjective donc u bijective.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u inversible.
2. $\operatorname{rg} u = n$.
3. u injectif.
4. u surjectif.
5. u inversible à droite.
6. u inversible à gauche.

Démonstration

- L'équivalence entre les quatre premières propriétés découle de la proposition précédente.
- (1) $\Rightarrow$ (5) est évident. Réciproquement, si u est inversible à droite, il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Cela implique en particulier u surjective donc u bijective.
- (1) $\Rightarrow$ (6) est évident. Réciproquement, si u est inversible à gauche, il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Cela implique en particulier u injective donc u bijective.

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** n, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u inversible.
2. $\operatorname{rg} u = n$.
3. u injectif.
4. u surjectif.
5. u inversible à droite.
6. u inversible à gauche.

Ces résultats peuvent tomber en défaut si E n'est pas de dimension finie !

Exemple :

On considère les applications $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$.
La première est surjective mais non injective ; la seconde est injective mais non surjective.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$.
2. Si v est bijective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
   Si de plus u est surjective, on a $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u) = v(F) = \operatorname{Im} v$ d'où l'égalité.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
   Si de plus u est surjective, on a $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u) = v(F) = \operatorname{Im} v$ d'où l'égalité.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Si $r = \operatorname{rg} u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\operatorname{Im} u$, par exemple $(u(e_1), \dots, u(e_r))$.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
   Si de plus u est surjective, on a $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u) = v(F) = \operatorname{Im} v$ d'où l'égalité.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Si $r = \operatorname{rg} u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\operatorname{Im} u$, par exemple $(u(e_1), \dots, u(e_r))$.
   Donc $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$ est engendrée par $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$, donc est de dimension $\leqslant r$ soit $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
   Si de plus u est surjective, on a $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u) = v(F) = \operatorname{Im} v$ d'où l'égalité.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Si $r = \operatorname{rg} u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\operatorname{Im} u$, par exemple $(u(e_1), \dots, u(e_r))$.
   Donc $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$ est engendrée par $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$, donc est de dimension $\leqslant r$ soit $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$. De plus, si v est injective, $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est libre (une application injective transforme une famille libre en une famille libre). Donc dans ce cas $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$, d'où l'égalité.

Théorème 15: *Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme*

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. Si u est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est bijective, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Ce théorème est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Théorème 16

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
2. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
   Si de plus u est surjective, on a $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u) = v(F) = \operatorname{Im} v$ d'où l'égalité.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Si $r = \operatorname{rg} u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\operatorname{Im} u$, par exemple $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$.
   Donc $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$ est engendrée par $(v \circ u(e_1), \ldots, v \circ u(e_r))$, donc est de dimension $\leqslant r$ soit $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$. De plus, si v est injective, $(v \circ u(e_1), \ldots, v \circ u(e_r))$ est libre (une application injective transforme une famille libre en une famille libre). Donc dans ce cas $(v \circ u(e_1), \ldots, v \circ u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$, d'où l'égalité.

   Autre démo possible : utiliser l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$ *et le théorème du rang...*

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array} \right.$$

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :
$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons l'application :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \end{array} \right.$$

- φ est linéaire : on vérifie aisément $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \end{array} \right.$$

- φ est linéaire : on vérifie aisément $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.
- On sait que : $\forall\,(b_1, \ldots, b_n) \in F^n,\ \exists! u \in \mathscr{L}(E,F)$ tq $u(e_i) = b_i$ pour tout i (une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base).

  Cela signifie que φ est bijective.

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1),\dots,u(e_n)) \end{array} \right.$$

- φ est linéaire : on vérifie aisément $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.
- On sait que : $\forall\,(b_1,\dots,b_n) \in F^n,\ \exists! u \in \mathscr{L}(E,F)$ tq $u(e_i) = b_i$ pour tout i (une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base).

  Cela signifie que φ est bijective.
- φ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim F^n = n \cdot \dim F$.

Théorème 17

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1),\dots,u(e_n)) \end{array} \right.$$

- φ est linéaire : on vérifie aisément $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.
- On sait que : $\forall\,(b_1,\dots,b_n) \in F^n$, $\exists! u \in \mathscr{L}(E,F)$ tq $u(e_i) = b_i$ pour tout i (une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base).

  Cela signifie que φ est bijective.
- φ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a $\dim\mathscr{L}(E,F) = \dim F^n = n \cdot \dim F$.

Rem : On verra une démonstration beaucoup plus explicite dans le chapitre sur les matrices.

Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** et soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) \end{cases}.$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$.

   P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** et soit

$$u \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{cases} .$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$.

   P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Démonstration

1. • La démonstration de la linéarité de u (à ne pas oublier !) est élémentaire.

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** et soit

$$u \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) \end{cases} .$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$.

   P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Démonstration

1. • La démonstration de la linéarité de u (à ne pas oublier !) est élémentaire.

   En effet, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q) &= \big((\lambda P + Q)(a_0), \dots, (\lambda P + Q)(a_n)\big) \\ &= \big(\lambda P(a_0) + Q(a_0), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)\big) \\ &= \lambda\big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) + \big(Q(a_0), \dots, Q(a_n)\big) = \lambda u(P) + u(Q). \end{aligned}$$

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** et soit

$$u \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{cases} .$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$.

   P s'appelle le <u>polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)</u>

Démonstration

1. • La démonstration de la linéarité de u (à ne pas oublier !) est élémentaire.

   • Si $P \in \operatorname{Ker} u$ alors $\deg P \leqslant n$ et P s'annule en $n+1$ valeurs distinctes (les a_i), donc P est le polynôme nul.
   Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, donc u est injective. Puisque les espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont de mêmes dimensions $(n+1)$, le résultat découle directement du théorème 14.

Théorème 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** et soit

$$u \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto \big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\big) \ . \end{cases}$$

Alors :

1. u est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
2. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![0 \, ; n]\!]$.

   P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Démonstration

1. • La démonstration de la linéarité de u (à ne pas oublier !) est élémentaire.

   • Si $P \in \operatorname{Ker} u$ alors $\deg P \leqslant n$ et P s'annule en $n+1$ valeurs distinctes (les a_i), donc P est le polynôme nul.
   Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, donc u est injective. Puisque les espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont de mêmes dimensions $(n+1)$, le résultat découle directement du théorème 14.
2. Simplement par définition d'une bijection :

$$\forall \, (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \ \exists ! P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tq } u(P) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$$

   ce qui est exactement le résultat demandé.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $\boxed{L_j(a_i) = \delta_{i,j}}$.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $\boxed{L_j(a_i) = \delta_{i,j}}$.

Donc L_j est divisible par $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$, et puisque ces deux polynômes sont de même degré n, il existe une constante λ telle que $L_j = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ donne alors $1 = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(a_j - a_i)$.

Finalement, on a, $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0\,;n]\!],\ L_j = \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\dfrac{X - a_i}{a_j - a_i}\right)}$.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $\boxed{L_j(a_i) = \delta_{i,j}}$.

Donc L_j est divisible par $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$, et puisque ces deux polynômes sont de même degré n, il existe une constante λ telle que $L_j = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ donne alors $1 = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(a_j - a_i)$.

Finalement, on a, $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0\,;n]\!],\ L_j = \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i}\right)}$.

Les polynômes L_j pour $j \in [\![0\,;n]\!]$ forment une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$; puisque, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a, par définition, $u(P) = \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(a_j)e_j$, en appliquant u^{-1} on trouve : $\boxed{P = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)L_j}$,
c'est-à-dire que dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.

Détermination du polynôme interpolateur

On conserve les notations du théorème précédent.
Soit $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Cela signifie que L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$, soit en abrégé : $\boxed{L_j(a_i) = \delta_{i,j}}$.

Donc L_j est divisible par $\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$, et puisque ces deux polynômes sont de même degré n, il existe une constante λ telle que $L_j = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - a_i)$. La condition $L_j(a_j) = 1$ donne alors $1 = \lambda \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(a_j - a_i)$.

Finalement, on a, $\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0\,;n]\!],\ L_j = \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\dfrac{X - a_i}{a_j - a_i}\right)}$.

Les polynômes L_j pour $j \in [\![0\,;n]\!]$ forment une **base** de $\mathbb{K}_n[X]$; puisque, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a, par définition, $u(P) = \big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big) = \sum\limits_{j=1}^{n} P(a_j)e_j$, en appliquant u^{-1} on trouve : $\boxed{P = \sum\limits_{j=0}^{n} P(a_j)L_j}$, c'est-à-dire que dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.

Ainsi, l'unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ qui vérifie $P(a_j) = b_j$ pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$ est le polynôme $P = \sum\limits_{j=0}^{n} b_jL_j$.

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2)\times[-4)\times(-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2)\times [-4)\times(-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1)\times(-3)\times 1} = \frac{1}{3}X^3 - \frac{4}{3}X$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution

On applique bêtement les formules précédentes : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

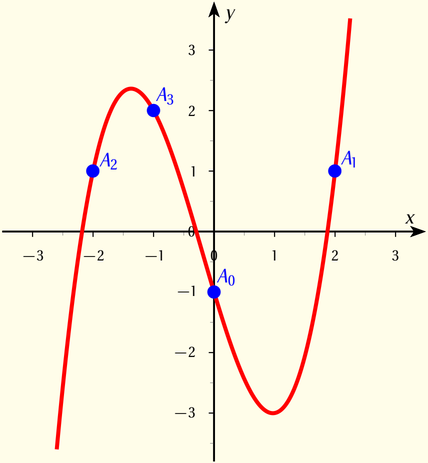
$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2)\times [-4)\times(-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1)\times(-3)\times 1} = \frac{1}{3}X^3 - \frac{4}{3}X$$

Donc $P = -L_0 + L_1 + L_2 + 2L_3 = \dfrac{5}{6}X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{10}{3}X - 1.$

Solution (suite)

Illustration graphique :



Proposition 4

Avec les notations du théorème précédent, on a :

$$\sum_{j=0}^{n} L_j = 1.$$

Proposition 4

Avec les notations du théorème précédent, on a :

$$\sum_{j=0}^{n} L_j = 1.$$

Démonstration

En effet, le polynôme $Q = \sum_{j=0}^{n} L_j$ et le polynôme constant égal à 1 sont deux polynômes de degrés $\leqslant n$ qui coïncident en $n+1$ points distincts (les a_i), donc sont égaux.

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0)\dots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0)\dots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration

- La fraction rationnelle $R_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$ est de degré négatif. L'égalité cherchée équivaut à $P = EQ + R_1 Q$, avec $\deg(R_1 Q) < \deg Q$. E est donc nécessairement le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0)\dots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration

- En réduisant au même dénominateur, on a :

$$R_1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) \right)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (X - a_i)}, \text{ soit } R_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i}{Q} \text{ où } P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j).$$

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0)\dots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration

- En réduisant au même dénominateur, on a :

$$R_1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j) \right)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (X - a_i)}, \text{ soit } R_1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i}{Q} \text{ où } P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j).$$

L'égalité cherchée équivaut donc à : $P - EQ = R_1 Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$. Puisque $\deg(R_1 Q) \leqslant n$, l'existence et l'unicité des λ_i résulte alors du fait que les $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$: en effet, chaque P_i est non nul et proportionnel au polynôme d'interpolation de Lagrange L_i.

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.

On suppose que $Q = (X - a_0)\ldots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle R, et les $\dfrac{\lambda_i}{X - a_i}$ sont des éléments simples de 1ère espèce.

Une application : la décomposition en éléments simples (cas simplifié)

Théorème 19

Soit $R = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$.
On suppose que $Q = (X - a_0)\dots(X - a_n)$, où les a_i sont des scalaires distincts (*ainsi, Q est scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$).

Alors R s'écrit de manière unique sous la forme : $R = E + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{(X - a_i)}$, où E est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Le polynôme E s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle R, et les $\dfrac{\lambda_i}{X - a_i}$ sont des éléments simples de 1ère espèce.

Détermination des coefficients λ_j :

En reprenant les notations précédentes, on a, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$:

$$(X - a_j)R = (X - a_j)E + \lambda_j + (X - a_j)\left(\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{X - a_i}\right).$$

Donc λ_j est égal à la valeur de la fraction rationnelle $(X - a_j)R$ évaluée en $X = a_j$ (les autres termes s'annulant en cette valeur). On note :

$$\lambda_j = (X - a_j)R\Big|_{X = a_j}.$$

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$.

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$.

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$.

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3-X)(X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X)+X^2+1$$

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$ ·

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3-X)(X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X)+X^2+1$$

donc $R = E + \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X$.

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$ ·

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3-X)(X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X)+X^2+1$$

donc $R = E + \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X$.

Ensuite $R_1 = \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X+1}$ et par la méthode exposée ci-dessus on trouve :

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$.

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3-X)(X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X)+X^2+1$$

donc $R = E + \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X$.

Ensuite $R_1 = \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X+1}$ et par la méthode exposée ci-dessus on trouve :

$$a=1 \quad , \quad b=-1 \quad \text{et} \quad c=1.$$

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3 - X}$ ·

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3 - X)(X^{2019} + X^{2017} + \cdots + X) + X^2 + 1$$

donc $R = E + \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019} + X^{2017} + \cdots + X$.

Ensuite $R_1 = \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X} + \dfrac{c}{X+1}$ et par la méthode exposée ci-dessus on trouve :

$$a = 1 \quad , \quad b = -1 \quad \text{et} \quad c = 1.$$

Vérification : $\lim\limits_{x \to +\infty} xS(x) = 1 = a + b + c$ ....

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $R = \dfrac{X^{2022}+1}{X^3-X}$.

Solution

On remarque que R n'est pas à degré < 0 donc on effectue la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, qui s'écrit

$$X^{2022}+1 = (X^3-X)(X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X)+X^2+1$$

donc $R = E + \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)}$ avec $E = X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X$.

Ensuite $R_1 = \dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X}+\dfrac{c}{X+1}$ et par la méthode exposée ci-dessus on trouve :

$$a=1 \quad , \quad b=-1 \quad \text{et} \quad c=1.$$

Vérification : $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = 1 = a+b+c$ ....

Pour conclure :

$$\frac{X^{2022}+1}{X^3-X} = X^{2019}+X^{2017}+\cdots+X+\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}.$$

FIN DU CHAPITRE II