Chapitre IV : Révisions et compléments sur le calcul matriciel

PSI*

Septembre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

MATRICES

Définitions

Définition 1

Une matrice à p lignes et q colonnes (ou de type (p,q)), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application

$$A \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right. \quad \text{notée : } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Définitions

Définition 1

Une matrice à p lignes et q colonnes (ou de type (p, q)), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application

$$A \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right. \quad \text{notée : } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

On notera :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées de type (n, n), ou d'ordre n, se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définitions

Définition 1

Une matrice à p lignes et q colonnes (ou de type (p, q)), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application

$$A \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right. \quad \text{notée : } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

On notera :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées de type (n, n), ou d'ordre n, se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$, on appelle :

- $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A le vecteur $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}) \in \mathbb{K}^p$
- $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A le vecteur $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}) \in \mathbb{K}^q$.

Définitions

Définition 1

Une matrice à p lignes et q colonnes (ou de type (p, q)), à coefficients dans $\mathbb{K}$, est une application

$$A \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right. \quad \text{notée : } A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

On notera :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées de type (n, n), ou d'ordre n, se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour $(i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$, on appelle :

- $j^{ème}$ vecteur colonne de A le vecteur $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}) \ \in \ \mathbb{K}^p$
- $i^{ème}$ vecteur ligne de A le vecteur $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iq}) \ \in \ \mathbb{K}^q$.

Définition 3

Une matrice de type $(1, q)$ est appelée une matrice ligne.

Une matrice de type $(p, 1)$ est appelée une matrice colonne.

Matrice d'un système de vecteurs

Définition 4

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $(x_1, \dots, x_q)$ des vecteurs de F.

Alors, pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$, il existe $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tels que $x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'appelle la <u>matrice des (x_j) dans la base $\mathscr{B}_F$</u>.

Matrice d'un système de vecteurs

Définition 4

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $(x_1, \dots, x_q)$ des vecteurs de F.

Alors, pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$, il existe $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tels que $x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice des (x_j) dans la base $\mathscr{B}_F$.

Il s'agit donc de la matrice obtenue en écrivant dans chaque **colonne** les coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ des vecteurs de la famille. Cela peut être visualisé ainsi :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_F}(x_1, \dots, x_q) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_q \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \to e'_1 \\ \to e'_2 \\ \vdots \\ \to e'_p \end{array} \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$, et soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ la matrice dans $\mathscr{B}_F$ du système de vecteurs $\big(u(e_1), \dots, u(e_q)\big)$. On la notera $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}(u; \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Ainsi : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, où a_{ij} désigne la $i^{ème}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ soit :

$$\forall j \in [\![1 \,; q]\!] \ , \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \ .$$

Matrice d'une application linéaire

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$, et soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle matrice de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ la matrice dans $\mathscr{B}_F$ du système de vecteurs $(u(e_1), \ldots, u(e_q))$. On la notera $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}(u; \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Ainsi : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, où a_{ij} désigne la $i^{ème}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ soit :

$$\forall j \in [\![1\,; q]\!]\ ,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i\ .$$

Cette matrice peut être visualisée ainsi :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_F}(u(\mathscr{B}_E)) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \ldots & u(e_q) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \to e'_1 \\ \to e'_2 \\ \quad\vdots \\ \to e'_p \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$, et soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle <u>matrice de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$</u> la matrice dans $\mathscr{B}_F$ du système de vecteurs $\big(u(e_1), \ldots, u(e_q)\big)$. On la notera $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u)$ ou $\mathrm{M}(u; \mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

Ainsi : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, où a_{ij} désigne la $i^{ème}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ soit :

$$\forall j \in [\![1\,;q]\!]\ ,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i\ .$$

Cette matrice peut être visualisée ainsi :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_F}\big(u(\mathscr{B}_E)\big) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \ldots & u(e_q) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \to e'_1 \\ \to e'_2 \\ \quad\vdots \\ \to e'_p \end{array}$$

Il est important de se rappeler que la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension $\boxed{q}$ dans un espace vectoriel de dimension $\boxed{p}$ est une matrice de type $\boxed{(p, q)}$.

Proposition 1

L 'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \end{array}$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(cette bijection dépend évidemment du choix des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$).

Proposition 1

L 'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \end{array}$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(cette bijection dépend évidemment du choix des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$).

Démonstration

Cela découle directement du fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base, dont les coordonnées sont justement les colonnes de la matrice.

Proposition 1

L 'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)\end{array}$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(cette bijection dépend évidemment du choix des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$).

Démonstration

Cela découle directement du fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base, dont les coordonnées sont justement les colonnes de la matrice.

Corollaire:

> Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
>
> Alors il existe une et une seule application linéaire $a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de a dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^p$ soit égale à A.
>
> a s'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 1

L 'application $\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \end{array}$ est une bijection de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

(cette bijection dépend évidemment du choix des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$).

Démonstration

Cela découle directement du fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base, dont les coordonnées sont justement les colonnes de la matrice.

Corollaire:

> Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
>
> Alors il existe une et une seule application linéaire $a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de a dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^p$ soit égale à A.
>
> a s'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A.

Quand on parle de la matrice d'une application linéaire, **il est indispensable de préciser dans quelles bases.**

Dire : « soit A la matrice de u », ou : « soit u l'application linéaire associée à A », sans dire dans quel(s) espace(s) ni dans quelle(s) base(s) on travaille, n'a aucun sens !

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \dots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \dots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

En effet, en reprenant les notations précédentes, si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$, le rang de u est par définition la dimension de $\operatorname{Im} u$, donc celle de $\operatorname{Vect}\big(u(e_1), \dots, u(e_q)\big)$, et les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ sont précisément les colonnes de la matrice.

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \dots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \min(p, q)$.

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \dots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \min(p, q)$.

Démonstration

En effet, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $\operatorname{rg} u \leqslant \dim E$ (par exemple par le théorème du rang), et $\operatorname{rg} u \leqslant \dim F$, puisque $\operatorname{Im} u \subset F$.

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \ldots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \min(p, q)$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice dans des base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ de $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors :

$$\operatorname{rg} A = p \iff u \textbf{ surjective} \quad , \quad \operatorname{rg} A = q \iff u \textbf{ injective}$$

Rang d'une matrice

Définition 6

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est, par définition, le rang de ses vecteurs colonnes (éléments de $\mathbb{K}^p$). On le note : $\operatorname{rg} A$.

• Si A est la matrice, dans une base $\mathscr{B}_F$, d'un système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_q)$ de F, le rang de A est aussi celui, dans F, du système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_q)$ c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel de F engendré par $(x_1, \ldots, x_q)$.

• Si A est la matrice, dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, le rang de A est aussi le rang de u.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \min(p, q)$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice dans des base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ de $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors :

$$\operatorname{rg} A = p \iff u \textbf{ surjective} \quad , \quad \operatorname{rg} A = q \iff u \textbf{ injective}$$

Démonstration

Cela découle immédiatement de la proposition 4 du chapitre II : pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$ on a :

- u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$ (découle par exemple du théorème du rang).
- u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$ (découle directement de la définition d'une application surjective).

OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Addition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On peut alors leur associer, de manière unique, deux applications linéaires $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(v)$.

On **définit** alors la matrice $C = A + B$ par : $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u + v)$.

Addition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On peut alors leur associer, de manière unique, deux applications linéaires $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(v)$.

On **définit** alors la matrice $C = A + B$ par : $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u + v)$.

Il est facile de vérifier que $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Addition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On peut alors leur associer, de manière unique, deux applications linéaires $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(v)$.

On **définit** alors la matrice $C = A + B$ par : $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u + v)$.

Il est facile de vérifier que $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Démonstration

En effet, en reprenant les notations précédentes, on a, pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \quad \text{et} \quad v(e_j) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} e'_i$$

donc

$$(u + v)(e_j) = \sum_{i=1}^{p} (a_{ij} + b_{ij}) e'_i,$$

ce qui montre que la matrice de $u + v$ (dans les mêmes bases) a pour coefficients les $a_{ij} + b_{ij}$.

Multiplication externe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on **définit** la matrice $B = \lambda.A$ par : $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(\lambda u)$.

Il est facile de vérifier que $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Multiplication externe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on **définit** la matrice $B = \lambda.A$ par : $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(\lambda u)$.

Il est facile de vérifier que $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Théorème 1

Muni des lois précédentes, $\big(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, .\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Multiplication externe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on **définit** la matrice $B = \lambda.A$ par : $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(\lambda u)$.

Il est facile de vérifier que $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et que : $\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Théorème 1

Muni des lois précédentes, $\left(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration

Il est clair que les propriétés d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$ vont se « transmettre » à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$;
par exemple, pour démontrer la commutativité de la loi $+$, il suffit décrire, avec des notations évidentes :

$$A + B = \mathrm{M}(u) + \mathrm{M}(v) = \mathrm{M}(u + v) = \mathrm{M}(v + u) = \mathrm{M}(v) + \mathrm{M}(u) = B + A$$

$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sera donc bien un espace vectoriel, et φ est alors une application bijective (déjà vu) et linéaire car, par définition des lois, on a, pour toutes $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $O_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $\mathrm{O}_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.
2. Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est formée de la famille des matrices $(E_{k\ell})_{(k,\ell)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, définies par :

   $E_{k\ell}$ est la matrice de type (p, q) dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

   Ainsi, le terme d'indice (i, j) de $E_{k\ell}$ vaut : $\left(E_{k\ell}\right)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $0_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2. Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est formée de la famille des matrices $(E_{k\ell})_{(k,\ell)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, définies par :

   $E_{k\ell}$ est la matrice de type (p, q) dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

   Ainsi, le terme d'indice (i, j) de $E_{k\ell}$ vaut : $\left(E_{k\ell}\right)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$.

   En effet, compte tenu de la définition des lois + et ., il est facile de vérifier que toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme :

   $$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} a_{ij}E_{ij}.$$

   Les coordonnées de A dans cette base sont donc les a_{ij}.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $\mathrm{O}_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2. Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est formée de la famille des matrices $(E_{k\ell})_{(k,\ell)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, définies par :

   $E_{k\ell}$ est la matrice de type (p, q) dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

   Ainsi, le terme d'indice (i, j) de $E_{k\ell}$ vaut : $\left(E_{k\ell}\right)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$.

   En effet, compte tenu de la définition des lois $+$ et ., il est facile de vérifier que toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme :

   $$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} a_{ij}E_{ij}.$$

   Les coordonnées de A dans cette base sont donc les a_{ij}.

3. On en déduit : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})) = pq$.

Remarques

1. L'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est l'image par φ de l'application linéaire nulle ; c'est donc la matrice nulle, dont tous les termes sont nuls, notée $\mathrm{O}_{p,q}$, ou plus simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2. Une base de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est formée de la famille des matrices $(E_{k\ell})_{(k,\ell)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, définies par :

   $E_{k\ell}$ est la matrice de type (p, q) dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, ℓ) qui vaut 1.

   Ainsi, le terme d'indice (i, j) de $E_{k\ell}$ vaut : $\left(E_{k\ell}\right)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$.

   En effet, compte tenu de la définition des lois + et ., il est facile de vérifier que toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme :

   $$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} a_{ij}E_{ij}.$$

   Les coordonnées de A dans cette base sont donc les a_{ij}.

3. On en déduit : $\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})) = pq$.

Définition 7

La base $(E_{kl})_{(k,l)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$ est appelée base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \ldots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i,k) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;r]\!]\ ,\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \dots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i, k) \in [\![1\,; p]\!] \times [\![1\,; r]\!] \ , \ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Démonstration

$\forall\, k \in [\![1\,; r]\!]$, on a $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$. Or :

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \dots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i, k) \in [\![1 ; p]\!] \times [\![1 ; r]\!] \ , \ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Démonstration

$\forall k \in [\![1 ; r]\!]$, on a $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$. Or : $v(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} e_j$ et $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \dots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i, k) \in [\![1 ; p]\!] \times [\![1 ; r]\!] \ , \ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Démonstration

$\forall k \in [\![1 ; r]\!]$, on a $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$. Or : $v(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} e_j$ et $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

Donc $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} u(e_j) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \right) e'_i = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$.

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \ldots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i,k) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;r]\!]\ ,\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Démonstration

$\forall\, k \in [\![1\,;r]\!]$, on a $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$. Or : $v(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} e_j$ et $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

Donc $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} u(e_j) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \right) e'_i = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$.

On en déduit la formule annoncée par unicité des coordonnées dans la base (e'_i).

Multiplication interne

Soient G, E, F trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives r, q, p, rapportés respectivement à des bases $\mathscr{B}_G = (e''_1, \dots, e''_r)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$.

Soient :

- $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$,
- $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et $v \in \mathscr{L}(G, E)$ tq $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$ et
- $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, tq $C = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v)$ (avec $u \circ v \in \mathscr{L}(G, F)$).

Un « simple » calcul montre alors que : $\boxed{\forall (i, k) \in [\![1 ; p]\!] \times [\![1 ; r]\!] \ , \ c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}}$.

Démonstration

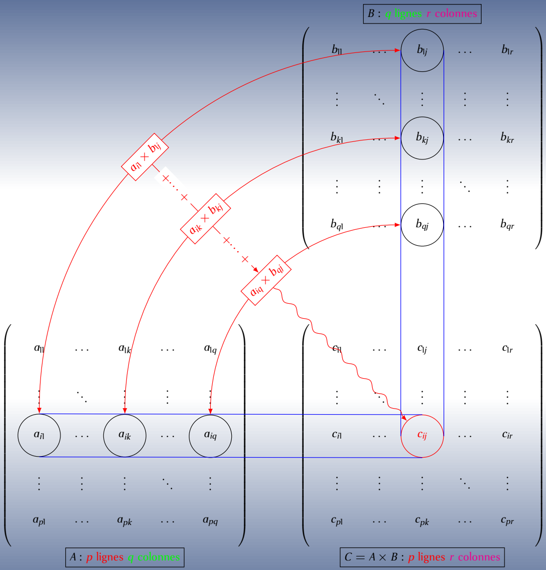
$\forall k \in [\![1 ; r]\!]$, on a $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$. Or : $v(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} e_j$ et $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

Donc $(u \circ v)(e''_k) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} u(e_j) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \right) e'_i = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} e'_i$.

On en déduit la formule annoncée par unicité des coordonnées dans la base (e'_i).

Par définition, la matrice $C = (c_{ik})_{(i,k) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;r]\!]}$ s'appelle le produit de A par B, noté $C = AB$.

Disposition pratique



Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.

2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.

2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.

2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p,q)}$ et B de type $\underline{(q,r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.

2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.

2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p,q)}$ et B de type $\underline{(q,r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p,q)}$ et B de type $\underline{(q,r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Démonstration

Toutes ces propriétés découlent immédiatement de celles sur les applications linéaires.

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Démonstration

Toutes ces propriétés découlent immédiatement de celles sur les applications linéaires.
Par exemple, la propriété n°1 découle de :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E, F),\ v \in \mathscr{L}(G, E),\ w \in \mathscr{L}(H, G), \quad u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w\,,$$

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p, q)}$ et B de type $\underline{(q, r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Démonstration

Toutes ces propriétés découlent immédiatement de celles sur les applications linéaires.
Par exemple, la propriété n°1 découle de :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E, F),\ v \in \mathscr{L}(G, E),\ w \in \mathscr{L}(H, G), \quad u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w\,,$$

la propriété n°3 découle de :

$$\forall\, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E, F),\ \forall\, v \in \mathscr{L}(G, E),\ (u_1 + u_2) \circ v = u_1 \circ v + u_2 \circ v\,,$$

Remarques

1. Cette définition n'a un sens que si A est de type $\underline{(p,q)}$ et B de type $\underline{(q,r)}$. Ainsi, le produit AB peut être défini sans que BA ne le soit.
2. On a par définition : $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_F}(u \circ v) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u) \times \mathrm{M}_{\mathscr{B}_G}^{\mathscr{B}_E}(v)$, avec la même base $\mathscr{B}_E$.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors : $A(BC) = (AB)C$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
3. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
5. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors : $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

Démonstration

Toutes ces propriétés découlent immédiatement de celles sur les applications linéaires.
Par exemple, la propriété n°1 découle de :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E,F),\ v \in \mathscr{L}(G,E),\ w \in \mathscr{L}(H,G), \quad u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w\,,$$

la propriété n°3 découle de :

$$\forall\, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall\, v \in \mathscr{L}(G,E),\ (u_1 + u_2) \circ v = u_1 \circ v + u_2 \circ v\,,$$

et la propriété n°5 de :

$$\forall\, u \in \mathscr{L}(E,F),\ \forall\, v \in \mathscr{L}(G,E),\ \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\, u \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\, v\,.$$

Proposition 2: *Produit des matrices des bases canoniques*

Si $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E'_{k\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\ 1\leqslant l\ell\leqslant r}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1\,;p]\!]\times[\![1\,;q]\!]\ ,\ \forall\,(k,\ell)\in[\![1\,;q]\!]\times[\![1\,;r]\!]\ \ :\ \ E_{ij}E'_{k\ell}=\delta_{jk}E''_{i\ell}$$

où $(E''_{i\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant \ell\leqslant r}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Proposition 2: *Produit des matrices des bases canoniques*

Si $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E'_{k\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\1\leqslant l\ell\leqslant r}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1\,;p]\!]\times[\![1\,;q]\!]\ ,\ \forall\,(k,\ell)\in[\![1\,;q]\!]\times[\![1\,;r]\!]\ :\ E_{ij}E'_{k\ell}=\delta_{jk}E''_{i\ell}$$

où $(E''_{i\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant \ell\leqslant r}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Démonstration

On se contente d'écrire proprement les formules du produit matriciel.

Proposition 2: *Produit des matrices des bases canoniques*

Si $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(E'_{k\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\1\leqslant l\ell\leqslant r}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

$$\forall (i,j)\in [\![1\,;p]\!]\times[\![1\,;q]\!]\ ,\ \forall (k,\ell)\in [\![1\,;q]\!]\times[\![1\,;r]\!]\ :\ E_{ij}E'_{k\ell}=\delta_{jk}E''_{i\ell}$$

où $(E''_{i\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant \ell\leqslant r}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Démonstration

On se contente d'écrire proprement les formules du produit matriciel.

Pour $(a,b)\in[\![1\,;p]\!]\times[\![1\,;r]\!]$ on a

$$\left(E_{ij}E'_{k\ell}\right)_{ab}=\sum_{c=1}^{q}(E_{ij})_{ac}(E'_{k\ell})_{cb}=\sum_{c=1}^{q}\delta_{ia}\delta_{jc}\delta_{kc}\delta_{\ell b}=\delta_{ia}\delta_{\ell b}\underbrace{\sum_{c=1}^{q}\delta_{jc}\delta_{kc}}_{=\delta_{jk}}=\delta_{jk}(E''_{i\ell})_{ab}\,.$$

d'où l'égalité annoncée.

Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q\text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p\text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E, F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Expression analytique d'une application linéaire

Soient
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Expression analytique d'une application linéaire

Soients
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p)$
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q \text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p \text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E, F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j$ (expression analytique de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX\,.}$

Expression analytique d'une application linéaire

Soients $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Soit $x \in E$, $x = \sum\limits_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum\limits_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} x_j$ (expression analytique de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX\,.}$

Démonstration

Si $x = \sum\limits_{j=1}^{q} X_{j1} e_j$, alors : $u(x) = \sum\limits_{j=1}^{q} X_{j1} u(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{q} X_{j1} \left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} X_{j1} \right) e'_i = y$

Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q \text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p \text{, rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Soit $x \in E$, $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j$ (expression analytique de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX\,.}$

Démonstration

Si $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} X_{j1} e_j$, alors : $u(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} X_{j1} u(e_j) = \sum_{j=1}^{q} X_{j1} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} X_{j1}\right) e'_i = y$

d'où $Y_{i1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} X_{j1}$ et on reconnaît bien là l'expression du produit matriciel AX.

Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E,F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $y_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j$ (expression analytique de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX\,.}$

Remarques

1. Si A est la matrice d'une application linéaire, on peut dire pour simplifier que :
   - on lit en colonne les coordonnées des images des vecteurs de base ;
   - et on lit en ligne les coordonnées de l'image d'un vecteur (expression analytique).

Expression analytique d'une application linéaire

Soient $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q) \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ rapporté à une base } \mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_p) \\ u \in \mathscr{L}(E, F) \text{ et } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u). \end{array}\right.$

Soit $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$ et $y = u(x) \in F$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$.

Soit enfin X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$: $X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_q \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$
et Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{B}_F$: $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_p \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a alors : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ y_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j$ (<u>expression analytique</u> de u dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$)

ce qui se traduit matriciellement par : $\boxed{Y = AX\,.}$

Remarques

1. Si A est la matrice d'une application linéaire, on peut dire pour simplifier que :
   - on lit en colonne les coordonnées des images des vecteurs de base ;
   - et on lit en ligne les coordonnées de l'image d'un vecteur (expression analytique).
2. *Cas d'une forme linéaire :*
   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_q)$ et $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E. Sa matrice dans les bases $\mathscr{B}_E$ de E et $\{1\}$ de $\mathbb{K}$ est une matrice ligne, de type $(1, q)$:
   $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_q \end{pmatrix}$, avec $a_i = \varphi(e_i)$.

   Si $x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j \in E$, on a alors : $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{q} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{q} a_j x_j = AX$; c'est l'expression analytique de φ.

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

- l'**image** de A, notée $\operatorname{Im} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

- l'**image** de A, notée $\operatorname{Im} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

- l'**image** de A, notée $\operatorname{Im} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Reprenons toutes les notations précédentes : A est la matrice dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ est X, et y est un vecteur de F dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ est Y.
Alors :

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

- l'**image** de A, notée $\operatorname{Im} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Reprenons toutes les notations précédentes : A est la matrice dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ est X, et y est un vecteur de F dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ est Y.
Alors :

$$X \in \operatorname{Ker} A \Longleftrightarrow x \in \operatorname{Ker} u \quad \text{et} \quad Y \in \operatorname{Im} A \Longleftrightarrow y \in \operatorname{Im} u.$$

Image et noyau d'une matrice

Définition 8

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit :

- le **noyau** de A, noté $\operatorname{Ker} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

- l'**image** de A, notée $\operatorname{Im} A$; il s'agit de l'ensemble :

$$\operatorname{Im} A = \left\{ AX \;\middle|\; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Il est facile de vérifier que $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et que $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Reprenons toutes les notations précédentes : A est la matrice dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$, x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ est X, et y est un vecteur de F dont la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ est Y.
Alors :

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff x \in \operatorname{Ker} u \quad \text{et} \quad Y \in \operatorname{Im} A \iff y \in \operatorname{Im} u.$$

Le théorème du rang appliqué à u donne alors : $\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$ donc :

$$\boxed{\text{pour } A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \ q = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A\,.}$$

Matrices par blocs

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle <u>bloc</u> de A toute matrice $(a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, où I et J sont respectivement des parties de $[\![1\,;p]\!]$ et $[\![1\,;q]\!]$ formées d'entiers **consécutifs**.

Si on ne suppose plus ces entiers consécutifs, on obtient ce qui est appelé une <u>matrice extraite</u>.

Matrices par blocs

Proposition 3: *addition par blocs*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, décomposées en blocs **avec le même découpage** :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \Bigg\updownarrow p \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{q_1} & \qquad & \overleftrightarrow{q_j} & \qquad & \overleftrightarrow{q_m} \end{matrix} & \\ \xleftrightarrow[q]{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \end{array} \quad \text{et} \quad B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1j} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i1} & \dots & B_{ij} & \dots & B_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{\ell 1} & \dots & B_{\ell j} & \dots & B_{\ell m} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \Bigg\updownarrow p \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{q_1} & \qquad & \overleftrightarrow{q_j} & \qquad & \overleftrightarrow{q_m} \end{matrix} & \\ \xleftrightarrow[q]{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \end{array}$$

Alors, si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda A + B$ s'écrit, par blocs :

$$\lambda A + B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \lambda A_{11} + B_{11} & \dots & \lambda A_{1j} + B_{1j} & \dots & \lambda A_{1m} + B_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i1} + B_{i1} & \dots & \lambda A_{ij} + B_{ij} & \dots & \lambda A_{im} + B_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{\ell 1} + B_{\ell 1} & \dots & \lambda A_{\ell j} + B_{\ell j} & \dots & \lambda A_{\ell m} + B_{\ell m} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \Bigg\updownarrow p \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{q_1} & \qquad\qquad & \overleftrightarrow{q_j} & \qquad\qquad & \overleftrightarrow{q_m} \end{matrix} & \\ \xleftrightarrow[q]{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \end{array}$$

Théorème 2: *Produit par blocs*

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, **décomposées en blocs compatibles** comme suit :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \; \Big\updownarrow p \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{q_1} & & \overleftrightarrow{q_j} & & \overleftrightarrow{q_m} \end{matrix} & \\ \overleftrightarrow{\qquad q \qquad} & \end{array} \quad \text{et} \quad B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1k} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{j1} & \dots & B_{jk} & \dots & B_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mk} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow q_1 \\ \\ \updownarrow q_j \\ \\ \updownarrow q_m \end{matrix} \; \Big\updownarrow q \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{r_1} & & \overleftrightarrow{r_k} & & \overleftrightarrow{r_n} \end{matrix} & \\ \overleftrightarrow{\qquad r \qquad} & \end{array}$$

et soit $C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, décomposée en blocs :

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1k} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & \dots & C_{ik} & \dots & C_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{\ell 1} & \dots & C_{\ell k} & \dots & C_{\ell n} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell \end{matrix} \; \Big\updownarrow p \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{r_1} & & \overleftrightarrow{r_k} & & \overleftrightarrow{r_n} \end{matrix} & \\ \overleftrightarrow{\qquad r \qquad} & \end{array}$$

Alors : $\forall\, (i, k) \in [\![1\,;\ell]\!] \times [\![1\,;n]\!]$, on a : $C_{ik} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{jk}$.

Cas particulier : écriture par blocs du produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$, chaque L_i étant une matrice ligne de q éléments, et soit $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $B = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_r \end{bmatrix}$, chaque C_j étant une matrice colonne à q éléments.

Alors la matrice $C = AB$ est la matrice de type (p, r) dont le terme d'indice (i, j) vaut $c_{i,j} = L_i C_j$.
Illustration :

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_r \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & L_i C_j & \dots & \dots \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} = A \times B$$

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^{\top} = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Avant l'adoption regrettable de cette notation anglo-saxonne, la transposée de A était notée : ${}^tA$; cette notation est celle qui apparaît dans la plupart des anciens énoncés de concours.

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle <u>transposée</u> de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$).

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle <u>transposée</u> de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Démonstration

Seule la dernière de ces propriétés n'est pas immédiate.

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Démonstration

Soit $C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,k) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;r]\!]$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}$ et $C^\top = (c'_{ki})$ avec $c'_{ki} = c_{ik}$.

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle <u>transposée</u> de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] \ , \ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Démonstration

Soit $C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,k) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;r]\!]$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{jk}$ et $C^\top = (c'_{ki})$ avec $c'_{ki} = c_{ik}$.

Soit $D = B^\top A^\top \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Pour tout $(k,i) \in [\![1\,;r]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ on a, en posant $B' = B^\top$ et $A' = A^\top$:

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^{q} b'_{kj}a'_{ji} = \sum_{j=1}^{q} b_{jk}a_{ij} = c_{ik} = c'_{ki}$$

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Démonstration

Soit $C = AB \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,k) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;r]\!]$, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{jk}$ et $C^\top = (c'_{ki})$ avec $c'_{ki} = c_{ik}$.

Soit $D = B^\top A^\top \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Pour tout $(k,i) \in [\![1\,;r]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ on a, en posant $B' = B^\top$ et $A' = A^\top$:

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^{q} b'_{kj}a'_{ji} = \sum_{j=1}^{q} b_{jk}a_{ij} = c_{ik} = c'_{ki}$$

d'où $D = C^\top$.

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle <u>transposée</u> de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]\ ,\ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Proposition 5

L'application : $A \mapsto A^\top$ est un isomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice $A^\top = (a'_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q \\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!] \ , \ a'_{ji} = a_{ij}.$$

Proposition 4

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$ (**ou :** ${}^t({}^tA) = A$).
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ (**ou :** ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$).
3. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (**ou :** ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$).
4. Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (**ou :** ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

Proposition 5

L'application : $A \mapsto A^\top$ est un isomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration

La linéarité et la bijectivité découlent directement des propriétés vues ci-dessus.

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, décomposée en blocs :

$$A = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1m} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{im} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{\ell 1} & \dots & A_{\ell j} & \dots & A_{\ell m}
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\updownarrow p_1 \\ \\ \updownarrow p_i \\ \\ \updownarrow p_\ell
\end{array}
\left\updownarrow \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}} \right. p
\\
\begin{array}{ccccc}
\underset{q_1}{\longleftrightarrow} & \quad & \underset{q_j}{\longleftrightarrow} & \quad & \underset{q_m}{\longleftrightarrow}
\end{array}
& \\
\underset{q}{\xleftrightarrow{\hspace{8em}}} &
\end{array}$$

Alors la matrice transposée de A s'écrit, par blocs :

$$A^\top = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
A_{11}^\top & \dots & A_{i1}^\top & \dots & A_{\ell 1}^\top \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{1j}^\top & \dots & A_{ij}^\top & \dots & A_{\ell j}^\top \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{1m}^\top & \dots & A_{im}^\top & \dots & A_{\ell m}^\top
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\updownarrow q_1 \\ \\ \updownarrow q_j \\ \\ \updownarrow q_m
\end{array}
\left\updownarrow \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}} \right. q
\\
\begin{array}{ccccc}
\underset{p_1}{\longleftrightarrow} & \quad & \underset{p_i}{\longleftrightarrow} & \quad & \underset{p_\ell}{\longleftrightarrow}
\end{array}
& \\
\underset{p}{\xleftrightarrow{\hspace{8em}}} &
\end{array}$$

Cas particulier : écriture par blocs de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrite par blocs de lignes sous la forme $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$, chaque L_i étant une matrice ligne de q éléments.

Alors $A^\top$ est la matrice écrite par blocs de colonnes : $A^\top = \begin{bmatrix} L_1^\top & \dots & L_i^\top & \dots & L_p^\top \end{bmatrix}$.

L'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est une loi de composition interne.
Les propriétés précédentes sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 3

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative et non intègre dès que $n \geqslant 2$).

Le terme « $\mathbb{K}$-algèbre » sert à résumer les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- la multiplication interne des matrices est une loi associative, possédant un élément neutre et distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition ;
- enfin, on a : $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est une loi de composition interne.
Les propriétés précédentes sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 3

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative et non intègre dès que $n \geqslant 2$).

Le terme « $\mathbb{K}$-algèbre » sert à résumer les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- la multiplication interne des matrices est une loi associative, possédant un élément neutre et distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition ;
- enfin, on a : $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$

Remarque

Dire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **non intègre** signifie que l'on peut trouver des matrices A, B telles que :
$A \neq 0,\ B \neq 0$ et $AB = 0$.

Cela implique que les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas réguliers en général, c'est-à-dire qu'une égalité de la forme $AB = AC$ n'implique pas toujours $B = C$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est une loi de composition interne.
Les propriétés précédentes sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 3

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative et non intègre dès que $n \geqslant 2$).

Le terme « $\mathbb{K}$-algèbre » sert à résumer les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- la multiplication interne des matrices est une loi associative, possédant un élément neutre et distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition ;
- enfin, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \lambda.(AB) = (\lambda.A)B = A(\lambda.B)$

Remarque

Dire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **non intègre** signifie que l'on peut trouver des matrices A, B telles que :
$A \neq 0,\ B \neq 0$ et $AB = 0$.

Cela implique que les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas réguliers en général, c'est-à-dire qu'une égalité de la forme $AB = AC$ n'implique pas toujours $B = C$.

Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

On appelle <u>matrice de u dans $\mathscr{B}_E$</u> la matrice $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_E}(u)$, notée simplement $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ ou $\mathrm{M}(u; \mathscr{B}_E)$.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :
   $$\forall\,(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\ .$$

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :
   $$\forall\,(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\ .$$

Proposition 7: et définition 12

On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.

$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :

$$\forall\,(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\,.$$

Proposition 7: et définition 12

On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.

$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n.

Démonstration

Découle directement du fait que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe (voir chap. précédent).

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :
   $$\forall\,(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\ .$$

Proposition 7: et définition 12

On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.
$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n.

En particulier, on a :

Proposition 8

Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :
   $$\forall (k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\ .$$

Proposition 7: et définition 12

On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.
$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n.

En particulier, on a :

Proposition 8

Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 9: *invariance du rang par multiplication par une matrice inversible*

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Si $p = q$ et $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$, et, si $q = r$ et $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

Remarques

1. On notera I_n l'élément neutre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (pour la loi $\times$).
   On a ainsi, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et toute base $\mathscr{B}_E$ de E : $I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$.
   I_n est donc la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 0, sauf ceux de sa diagonale, qui sont égaux à 1.
2. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Une base en est la *base canonique*, formée des n^2 matrices E_{ij} pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ définies par :
$$\forall\,(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}\ .$$

Proposition 7: et définition 12

On notera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour la loi $\times$.
$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non abélien), appelé groupe linéaire d'ordre n.

En particulier, on a :

Proposition 8

Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 9: *invariance du rang par multiplication par une matrice inversible*

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
Si $p = q$ et $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$, et, si $q = r$ et $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration

cf. théorème 14 du chapitre II.

Proposition 10

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Proposition 10

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration

Il suffit de calculer :

$$(A^\top)(A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n \quad \text{et} \quad (A^{-1})^\top(A^\top) = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n.$$

Proposition 10

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration

Il suffit de calculer :

$$(A^\top)(A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n \quad \text{et} \quad (A^{-1})^\top(A^\top) = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n.$$

Théorème 4

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est inversible ;

(b) A est inversible à droite (c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$) ;

(c) A est inversible à gauche (c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$) ;

(d) $\operatorname{rg} A = n$.

Proposition 10

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration

Il suffit de calculer :

$$(A^\top)(A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n \quad \text{et} \quad (A^{-1})^\top(A^\top) = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n.$$

Théorème 4

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) A est inversible ;

(b) A est inversible à droite (c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$) ;

(c) A est inversible à gauche (c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$) ;

(d) $\operatorname{rg} A = n$.

Démonstration

C'est une conséquence directe d'une propriété similaire démontrée dans le chapitre sur les applications linéaires.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Démonstration

Notons d'abord que $r = 0 \iff A = 0$, donc, si $A \neq 0$ (ce qui est supposé ici), on aura $\operatorname{rg} A \geqslant 1$.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Démonstration

Notons d'abord que $r = 0 \iff A = 0$, donc, si $A \neq 0$ (ce qui est supposé ici), on aura $\operatorname{rg} A \geqslant 1$.

Supposons que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible B d'ordre $r \geqslant 1$. On peut, sans restreindre la généralité et pour simplifier les notations, supposer qu'il s'agit du bloc formé des r premières lignes et des r premières colonnes de A.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Démonstration

Notons d'abord que $r = 0 \iff A = 0$, donc, si $A \neq 0$ (ce qui est supposé ici), on aura $\operatorname{rg} A \geqslant 1$.

Supposons que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible B d'ordre $r \geqslant 1$. On peut, sans restreindre la généralité et pour simplifier les notations, supposer qu'il s'agit du bloc formé des r premières lignes et des r premières colonnes de A.

Soient $C_1', \dots, C_r'$ les colonnes de B. La famille $(C_1', \dots, C_r')$ est donc libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Si $C_1, \dots, C_r$ sont les r premières colonnes de A, les C_j' sont formées des r premières coordonnées des C_j. Donc, si on a $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C_j = 0$, on a aussi $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C_j' = 0$ d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_r)$ est libre donc $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Corollaire:

> Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Démonstration

Notons d'abord que $r = 0 \iff A = 0$, donc, si $A \neq 0$ (ce qui est supposé ici), on aura $\operatorname{rg} A \geqslant 1$.

Supposons que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible B d'ordre $r \geqslant 1$. On peut, sans restreindre la généralité et pour simplifier les notations, supposer qu'il s'agit du bloc formé des r premières lignes et des r premières colonnes de A.

Soient $C'_1, \ldots, C'_r$ les colonnes de B. La famille $(C'_1, \ldots, C'_r)$ est donc libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Si $C_1, \ldots, C_r$ sont les r premières colonnes de A, les C'_j sont formées des r premières coordonnées des C_j. Donc, si on a $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C_j = 0$, on a aussi $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C'_j = 0$ d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Ainsi, la famille $(C_1, \ldots, C_r)$ est libre donc $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Corollaire:

> Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

Démonstration

En effet, si on peut extraire de A une matrice carrée inversible A' d'ordre r, on pourra extraire de $A^\top$ la matrice $A'^\top$, inversible d'ordre r, donc $\operatorname{rg} A^\top \geqslant \operatorname{rg} A$.

Proposition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, non nulle.

Si l'on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre r, alors $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Démonstration

Notons d'abord que $r = 0 \iff A = 0$, donc, si $A \neq 0$ (ce qui est supposé ici), on aura $\operatorname{rg} A \geqslant 1$.

Supposons que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible B d'ordre $r \geqslant 1$. On peut, sans restreindre la généralité et pour simplifier les notations, supposer qu'il s'agit du bloc formé des r premières lignes et des r premières colonnes de A.

Soient $C'_1, \dots, C'_r$ les colonnes de B. La famille $(C'_1, \dots, C'_r)$ est donc libre dans $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Si $C_1, \dots, C_r$ sont les r premières colonnes de A, les C'_j sont formées des r premières coordonnées des C_j. Donc, si on a $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C_j = 0$, on a aussi $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C'_j = 0$ d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Ainsi, la famille $(C_1, \dots, C_r)$ est libre donc $\operatorname{rg} A \geqslant r$.

Corollaire:

> Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

Démonstration

En effet, si on peut extraire de A une matrice carrée inversible A' d'ordre r, on pourra extraire de $A^\top$ la matrice $A'^\top$, inversible d'ordre r, donc $\operatorname{rg} A^\top \geqslant \operatorname{rg} A$.
On a l'inégalité dans l'autre sens en changeant A en $A^\top$.

MATRICES CARRÉES REMARQUABLES

Matrices triangulaires

Définition 13

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>triangulaire supérieure</u> (respectivement <u>inférieure</u>) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ [j < i \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0]\ (\text{ resp. } [j > i \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0])\ .$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n.
Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Matrices triangulaires

Définition 13

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ , \ [j < i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0] \ (\text{ resp. } [j > i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0]) \ .$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n.
Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors : A est triangulaire supérieure $\Longleftrightarrow \ \forall j \in [\![1\,;n]\!] \ , \ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.

Matrices triangulaires

Définition 13

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ ,\ [j < i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0] \ (\text{ resp. } [j > i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0]) \ .$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n.
Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : A est triangulaire supérieure $\Longleftrightarrow \ \forall j \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.

Démonstration

En effet, A est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout j les $(n-j)$-èmes derniers coefficients de la j-ème colonne sont nuls, ce qui équivaut à dire que $u(e_j)$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$. Donc :

Matrices triangulaires

Définition 13

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \;,\; [j < i \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0] \;(\text{ resp. } [j > i \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0])\;.$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n.
Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors : A est triangulaire supérieure $\iff \forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.

Démonstration

En effet, A est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout j les $(n-j)$-èmes derniers coefficients de la j-ème colonne sont nuls, ce qui équivaut à dire que $u(e_j)$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$. Donc :

- Si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, pour tout j, $u(e_1), \ldots, u(e_j)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.

Matrices triangulaires

Définition 13

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \;,\; [j < i \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0] \;(\text{ resp. } [j > i \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0])\;.$$

On notera $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n.
Il est clair que : $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \iff A^\top \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors : A est triangulaire supérieure $\iff \forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.

Démonstration

En effet, A est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout j les $(n-j)$-èmes derniers coefficients de la j-ème colonne sont nuls, ce qui équivaut à dire que $u(e_j)$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$. Donc :

- Si $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, pour tout j, $u(e_1), \ldots, u(e_j)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u.
- Réciproquement, si pour tout j $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u alors on a en particulier $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ et $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

■ Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel,

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel, mais il y a bien mieux :
    Si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(v)$, alors, $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ est stable par u et par v donc par $u \circ v$.
    Ainsi, $AB = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u \circ v)$ est triangulaire supérieure.

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel, mais il y a bien mieux :
    Si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(v)$, alors, $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ est stable par u et par v donc par $u \circ v$.
    Ainsi, $AB = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u \circ v)$ est triangulaire supérieure.
- Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure, alors $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i \leqslant j} a_{ij}E_{ij}$ donc la famille $(E_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel, mais il y a bien mieux :
    Si $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(v)$, alors, $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ est stable par u et par v donc par $u \circ v$.
    Ainsi, $AB = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(u \circ v)$ est triangulaire supérieure.
- Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure, alors $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i\leqslant j} a_{ij}E_{ij}$ donc la famille $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Elle est libre puisque c'est une sous-famille de la base canonique, donc c'est une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, et elle comporte $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments.

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel, mais il y a bien mieux :
    Si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(v)$, alors, $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u et par v donc par $u \circ v$.
    Ainsi, $AB = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u \circ v)$ est triangulaire supérieure.
- Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure, alors $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i\leqslant j} a_{ij}E_{ij}$ donc la famille $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Elle est libre puisque c'est une sous-famille de la base canonique, donc c'est une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, et elle comporte $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments.

Remarques

1. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est évidemment aussi une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphe en tant qu'espace vectoriel à la précédente (par la transposition),

Théorème 6

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Le terme « sous-algèbre » signifie que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de plus **stable pour la multiplication interne** et qui contient son élément neutre, I_n.

Démonstration

- Montrons d'abord que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
  - $I_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$;
  - Si $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: car pour $i < j$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$;
  - Soient $A, B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Montrons que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. On peut faire une démonstration purement calculatoire en revenant à la définition du produit matriciel, mais il y a bien mieux :
    Si $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ et $B = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(v)$, alors, $\forall j \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u et par v donc par $u \circ v$. Ainsi, $AB = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u \circ v)$ est triangulaire supérieure.
- Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure, alors $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i \leqslant j} a_{ij}E_{ij}$ donc la famille $(E_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Elle est libre puisque c'est une sous-famille de la base canonique, donc c'est une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, et elle comporte $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments.

Remarques

1. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est évidemment aussi une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphe en tant qu'espace vectoriel à la précédente (par la transposition),
2. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont triangulaires supérieures, alors $C = AB$, triangulaire supérieure, a pour coefficients diagonaux $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\dfrac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure).

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

  Autre démonstration possible :

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

  Autre démonstration possible :

  On peut remarquer que, si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u, alors il est stable par u^{-1}, puis utiliser le résultat du théorème 5 ; en effet, si un sous-espace vectoriel F de dimension finie est stable par un automorphisme u, l'inclusion $u(F) \subset F$ et l'égalité $\dim u(F) = \dim F$ impliquent $u(F) = F$ donc $u^{-1}(F) = F$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\dfrac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

  Autre démonstration possible :

  On peut remarquer que, si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u, alors il est stable par u^{-1}, puis utiliser le résultat du théorème 5 ; en effet, si un sous-espace vectoriel F de dimension finie est stable par un automorphisme u, l'inclusion $u(F) \subset F$ et l'égalité $\dim u(F) = \dim F$ impliquent $u(F) = F$ donc $u^{-1}(F) = F$.

- Les coefficients diagonaux de AT sont les $a_{ii}t_{ii}$ d'où $a_{ii}t_{ii} = 1$ si $T = A^{-1}$. Ainsi, les a_{ii} ne sont pas nuls et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les $t_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

  Autre démonstration possible :

  On peut remarquer que, si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u, alors il est stable par u^{-1}, puis utiliser le résultat du théorème 5 ; en effet, si un sous-espace vectoriel F de dimension finie est stable par un automorphisme u, l'inclusion $u(F) \subset F$ et l'égalité $\dim u(F) = \dim F$ impliquent $u(F) = F$ donc $u^{-1}(F) = F$.

- Les coefficients diagonaux de AT sont les $a_{ii}t_{ii}$ d'où $a_{ii}t_{ii} = 1$ si $T = A^{-1}$. Ainsi, les a_{ii} ne sont pas nuls et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les $t_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$.

- Réciproquement, supposons A triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls. Alors d'après les résultats obtenus en 1ère année (méthode du pivot), A est de rang n donc est inversible.

Proposition 12

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; dans ce cas, A^{-1} est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les $\frac{1}{a_{ii}}$.

Démonstration

- Supposons $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ inversible et considérons l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ T & \longmapsto & AT \end{array} \right.$.

  φ est linéaire (facile), injective (car $AT = 0 \Longrightarrow A^{-1}AT = 0 \Longrightarrow T = 0$) et va de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure). Donc φ est bijective (endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ telle que $AT = I_n$. Ainsi $A^{-1} = T$ appartient bien à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

  Autre démonstration possible :

  On peut remarquer que, si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$ est stable par u, alors il est stable par u^{-1}, puis utiliser le résultat du théorème 5 ; en effet, si un sous-espace vectoriel F de dimension finie est stable par un automorphisme u, l'inclusion $u(F) \subset F$ et l'égalité $\dim u(F) = \dim F$ impliquent $u(F) = F$ donc $u^{-1}(F) = F$.

- Les coefficients diagonaux de AT sont les $a_{ii}t_{ii}$ d'où $a_{ii}t_{ii} = 1$ si $T = A^{-1}$. Ainsi, les a_{ii} ne sont pas nuls et les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les $t_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$.

- Réciproquement, supposons A triangulaire supérieure à éléments diagonaux non nuls. Alors d'après les résultats obtenus en 1ère année (méthode du pivot), A est de rang n donc est inversible.

  Rem pour les 5/2 : on peut aussi utiliser $\det A = \prod a_{ii}$.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite <u>triangulaire supérieure stricte</u>).

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite triangulaire supérieure stricte).

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite triangulaire supérieure stricte).

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

  Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $E_0 = \{0\}$. L'hypothèse faite sur A implique que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $u(E_k) \subset E_{k-1}$.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite triangulaire supérieure stricte).

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

  Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $E_0 = \{0\}$. L'hypothèse faite sur A implique que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $u(E_k) \subset E_{k-1}$.

  Donc $u^n(E) = u^n(E_n) \subset u^{n-1}(E_{n-1}) \subset \ldots \subset u(E_1) = E_0 = \{0\}$, ce qui prouve que $u^n = 0$, donc $A^n = 0$ et A nilpotente.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite triangulaire supérieure stricte).

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

  Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $E_0 = \{0\}$. L'hypothèse faite sur A implique que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $u(E_k) \subset E_{k-1}$.

  Donc $u^n(E) = u^n(E_n) \subset u^{n-1}(E_{n-1}) \subset \ldots \subset u(E_1) = E_0 = \{0\}$, ce qui prouve que $u^n = 0$, donc $A^n = 0$ et A nilpotente.

On dispose d'une sorte de réciproque de ce résultat :

Théorème 7: *(H.P ainsi)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. u est nilpotent si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls.

Proposition 13

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} = 0$.

Démonstration

- Supposons A triangulaire supérieure et nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or les coefficients diagonaux de A^p sont les a_{ii}^p donc $a_{ii} = 0$ pour tout i.
- Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ à éléments diagonaux nuls (une telle matrice est dite triangulaire supérieure stricte).

  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$.

  Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $E_0 = \{0\}$. L'hypothèse faite sur A implique que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $u(E_k) \subset E_{k-1}$.

  Donc $u^n(E) = u^n(E_n) \subset u^{n-1}(E_{n-1}) \subset \ldots \subset u(E_1) = E_0 = \{0\}$, ce qui prouve que $u^n = 0$, donc $A^n = 0$ et A nilpotente.

On dispose d'une sorte de réciproque de ce résultat :

Théorème 7: *(H.P ainsi)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. u est nilpotent si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure à éléments diagonaux nuls.

Rem : Ce théorème sera démontré plus tard...

Pour les 5/2 : si u est nilpotent d'indice p, il annule le polynôme X^p qui est scindé, donc u est trigonalisable. Et comme sa seule valeur propre est 0, on a le résultat.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ , \ j \neq i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ , \ j \neq i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 14

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\ ,\ j \neq i \ \Rightarrow\ a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 14

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Démonstration

Il suffit de vérifier les propriétés :

- I_n appartient à $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A,B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2,\ \lambda A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$;
- $\forall (A,B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2,\ AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$

ce qui est immédiat.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ , \ j \neq i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 14

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Démonstration

Il suffit de vérifier les propriétés :

- I_n appartient à $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2, \ \lambda A + B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2, \ AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$

ce qui est immédiat.

Dimension : toute matrice $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique : $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii}$, donc la famille $\{E_{ii} \mid i \in [\![1\,;n]\!]\}$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \;,\; j \neq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment :
$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 14

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Proposition 15

Soit $A = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; et dans ce cas, $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$.

Matrices diagonales

Définition 14

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \ , \ j \neq i \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0.$$

On note alors : $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

On notera $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n. On a évidemment : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Proposition 14

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension n.

Proposition 15

Soit $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$; et dans ce cas, $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$.

Démonstration

découle directement de la propriété similaire pour les matrices triangulaires.

Proposition 16

Soit $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dont **les éléments diagonaux sont distincts**.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si A est diagonale.

Proposition 16

Soit $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dont **les éléments diagonaux sont distincts**.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si A est diagonale.

Démonstration

Il existe une démonstration astucieuse de ce résultat (utilisant les notions de sous-espaces propres, voir plus tard) mais une simple démonstration calculatoire est possible :

Proposition 16

Soit $D = \operatorname{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont distincts.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si A est diagonale.

Démonstration

Il existe une démonstration astucieuse de ce résultat (utilisant les notions de sous-espaces propres, voir plus tard) mais une simple démonstration calculatoire est possible :

Avec les hypothèses, on a : $\forall\,(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (AD)_{ik} = (DA)_{ik}$, soit $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,d_{jk}}_{=a_{ik}\,d_{kk}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\,a_{jk}}_{=d_{ii}\,a_{ik}}$.

Proposition 16

Soit $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont distincts.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si et seulement si A est diagonale.

Démonstration

Il existe une démonstration astucieuse de ce résultat (utilisant les notions de sous-espaces propres, voir plus tard) mais une simple démonstration calculatoire est possible :

Avec les hypothèses, on a : $\forall\,(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ (AD)_{ik} = (DA)_{ik}$, soit $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{jk}}_{=a_{ik}d_{kk}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}a_{jk}}_{=d_{ii}a_{ik}}$.

Donc $\forall\,(i,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $a_{ik}(d_{kk} - d_{ii}) = 0$ d'où $a_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ (car, justement, les éléments diagonaux de A sont distincts), c'est-à-dire A diagonale.

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Démonstration

C'est immédiat car, pour toute base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) \iff \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u) = \lambda I_n = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\lambda \mathrm{Id}) \iff u = \lambda \mathrm{Id}\,.$$

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_{i} \left(\sum_{j} a_{ij} \delta_{jk} \right) E_{i\ell} = \sum_{i} a_{ik} E_{i\ell}$$

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \delta_{jk} \right) E_{i\ell} = \sum_i a_{ik} E_{i\ell}$$

$$\text{et} \qquad E_{k\ell} A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \delta \ell i \right) E_{kj} = \sum_j a_{\ell j} E_{kj}$$

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_{i} \Big(\sum_{j} a_{ij} \delta_{jk} \Big) E_{i\ell} = \sum_{i} a_{ik} E_{i\ell}$$

$$\text{et} \qquad E_{k\ell} A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_{j} \Big(\sum_{i} a_{ij} \delta \ell i \Big) E_{kj} = \sum_{j} a_{\ell j} E_{kj}$$

Les E_{ij} formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit :

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \delta_{jk} \right) E_{i\ell} = \sum_i a_{ik} E_{i\ell}$$

$$\text{et} \qquad E_{k\ell} A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \delta \ell i \right) E_{kj} = \sum_j a_{\ell j} E_{kj}$$

Les E_{ij} formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit :

- $a_{kk} = a_{\ell\ell}$ en considérant les coefficients de $E_{k\ell}$ dans les deux sommes.

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_{i} \left(\sum_{j} a_{ij} \delta_{jk} \right) E_{i\ell} = \sum_{i} a_{ik} E_{i\ell}$$

$$\text{et} \qquad E_{k\ell} A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_{j} \left(\sum_{i} a_{ij} \delta \ell i \right) E_{kj} = \sum_{j} a_{\ell j} E_{kj}$$

Les E_{ij} formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit :

- $a_{kk} = a_{\ell\ell}$ en considérant les coefficients de $E_{k\ell}$ dans les deux sommes.
- $a_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ car $E_{i\ell}$ ne figure pas dans la deuxième somme si $i \neq k$

Matrices scalaires

Définition 15

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>scalaire</u> si elle est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Proposition 17

Une matrice carrée A d'ordre n est une matrice scalaire si et seulement si c'est la matrice, dans n'importe quelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, d'une homothétie.

Proposition 18

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des matrices scalaires.

Démonstration calculatoire

$A = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} E_{ij}$ commute avec toutes les autres matrices carrées si et seulement si elle commute avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a :

$$AE_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} E_{k\ell} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{jk} E_{i\ell} = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} \delta_{jk} \Big) E_{i\ell} = \sum_i a_{ik} E_{i\ell}$$

$$\text{et} \qquad E_{k\ell} A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell i} E_{kj} = \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} \delta \ell i \Big) E_{kj} = \sum_j a_{\ell j} E_{kj}$$

Les E_{ij} formant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit :

- $a_{kk} = a_{\ell\ell}$ en considérant les coefficients de $E_{k\ell}$ dans les deux sommes.
- $a_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ car $E_{i\ell}$ ne figure pas dans la deuxième somme si $i \neq k$

Donc A est scalaire.

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \ a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{resp. } a_{ji} = -a_{ij})$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{resp. } a_{ji} = -a_{ij})$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 19

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{resp. } a_{ji} = -a_{ij})$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 19

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

- Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$.

  On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie, et l'on a :

  $$A \in \mathrm{Inv}(s) \iff A = A^\top \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in \mathrm{Opp}(s) \iff A = -A^\top \iff A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

  On obtient ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :

  $$A = \underbrace{\frac{A + A^\top}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - A^\top}{2}}_{\text{antisym.}}$$

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{resp. } a_{ji} = -a_{ij})$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 19

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. $A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum_i a_{ii}E_i + \sum_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$.

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2, \; a_{ji} = a_{ij} \quad$ (resp. $a_{ji} = -a_{ij}$).

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 19

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij} E_{ij} = \sum\limits_{i} a_{ii} E_i + \sum\limits_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$.

  Ainsi la famille formée des E_{ii} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et des $E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Il est facile de vérifier que cette famille est libre car :

$$\sum_{i} \lambda_{ii} E_i + \sum_{i<j} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = 0 \Longrightarrow \sum_{i,j} \lambda'_{ij} E_{ij} = 0 \Longrightarrow \lambda_{ij} = 0 \text{ pour tous } i, j.$$

Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 16

Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) si $A^\top = A$ (resp. $A^\top = -A$) c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ji} = a_{ij} \quad (\text{resp. } a_{ji} = -a_{ij})$.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Proposition 19

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration

- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i} a_{ii}E_i + \sum\limits_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$.

  Ainsi la famille formée des E_{ii} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et des $E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Il est facile de vérifier que cette famille est libre car :

  $$\sum_{i} \lambda_{ii}E_i + \sum_{i<j} \lambda_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = 0 \Longrightarrow \sum_{i,j} \lambda'_{ij}E_{ij} = 0 \Longrightarrow \lambda_{ij} = 0 \text{ pour tous } i,j.$$

  C'est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, et elle a justement pour cardinal $n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E, $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array} \qquad (A_1 \text{ et } A_2 \text{ matrices carrées})$$

Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E, $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array} \qquad (A_1 \text{ et } A_2 \text{ matrices carrées})$$

Il est important de remarquer que que $A_1 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(p_1 \circ u|_{E_1})$ et que $A_2 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(p_2 \circ u|_{E_2})$, où p_1 (resp. p_2) sont les projections sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1).

Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E, $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} \end{array} \qquad (A_1 \text{ et } A_2 \text{ matrices carrées})$$

Il est important de remarquer que que $A_1 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(p_1 \circ u|_{E_1})$ et que $A_2 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(p_2 \circ u|_{E_2})$, où p_1 (resp. p_2) sont les projections sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1).
On a le résultat important suivant, dont la démonstration est immédiate.

Théorème 8

❶ E_1 est stable par $u \iff B_1 = 0$; ❷ E_2 est stable par $u \iff B_2 = 0$.

Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E, $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une base de E.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} \end{array} \qquad (A_1 \text{ et } A_2 \text{ matrices carrées})$$

Il est important de remarquer que que $A_1 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(p_1 \circ u|_{E_1})$ et que $A_2 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(p_2 \circ u|_{E_2})$, où p_1 (resp. p_2) sont les projections sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1).
On a le résultat important suivant, dont la démonstration est immédiate.

Théorème 8

1. E_1 est stable par u $\iff$ $B_1 = 0$; 2. E_2 est stable par u $\iff$ $B_2 = 0$.

Définition 17

1. Ainsi, si E_1 est stable par u, A est de la forme : $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

   A est dite triangulaire supérieure par blocs. A_1 est alors la matrice dans $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme induit par u sur E_1.

Matrices par blocs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E, $\dim(E_1) = p$, $\dim(E_2) = n - p$, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E_1 et E_2 respectivement, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$, écrite par blocs sous la forme :

$$A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underleftrightarrow{\;p\;} & \underleftrightarrow{n-p} \end{array} & \end{array} \qquad (A_1 \text{ et } A_2 \text{ matrices carrées})$$

Il est important de remarquer que que $A_1 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_1}(p_1 \circ u|_{E_1})$ et que $A_2 = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_2}(p_2 \circ u|_{E_2})$, où p_1 (resp. p_2) sont les projections sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1).
On a le résultat important suivant, dont la démonstration est immédiate.

Théorème 8

1. E_1 est stable par $u \iff B_1 = 0$; 2. E_2 est stable par $u \iff B_2 = 0$.

Définition 17

1. Ainsi, si E_1 est stable par u, A est de la forme : $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

   A est dite triangulaire supérieure par blocs. A_1 est alors la matrice dans $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme induit par u sur E_1.

2. Si E_1 et E_2 sont stables par u, A est de la forme $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

   Elle est dite diagonale par blocs. A_1 et A_2 sont alors les matrices dans les bases $\mathscr{B}_i$ des endomorphismes induits u_{E_1} et u_{E_2}.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc|l} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Démonstration

On peut faire une démonstration calculatoire en utilisant les opérations sur les matrices par blocs.
On peut aussi démontrer, en considérant les endomorphismes associés, que l'ensemble des endomorphismes de E laissant stable E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ stable par $\circ$.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow[p]{} & \xleftrightarrow[n-p]{} \end{array} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow[p]{} & \xleftrightarrow[n-p]{} \end{array} & \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \xleftrightarrow[p]{} & \xleftrightarrow[n-p]{} \end{array} & \end{array}$

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{n-p} \end{array} & \end{array}$

Démonstration

- Supposons A inversible : $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ avec $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u(E_1) \subset E_1$. u étant bijective, $\dim u(E_1) = \dim E_1$ donc $u(E_1) = E_1$ d'où $u^{-1}(E_1) = E_1$:

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix} \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{matrix} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix} \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{matrix} & \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{matrix} \\ \begin{matrix} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{matrix} & \end{array}$

Démonstration

- Supposons A inversible : $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ avec $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u(E_1) \subset E_1$. u étant bijective, $\dim u(E_1) = \dim E_1$ donc $u(E_1) = E_1$ d'où $u^{-1}(E_1) = E_1$: u^{-1} laisse stable E_1, donc sa matrice dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{bmatrix} A_1' & B_2' \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}$.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$

Démonstration

- Supposons A inversible : $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ avec $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u(E_1) \subset E_1$. u étant bijective, $\dim u(E_1) = \dim E_1$ donc $u(E_1) = E_1$ d'où $u^{-1}(E_1) = E_1$: u^{-1} laisse stable E_1, donc sa matrice dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{bmatrix} A_1' & B_2' \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}$.

  Le produit par blocs donne alors : $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1' & B_2' \\ 0 & A_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1' & A_1B'2 + B_2A_2' \\ 0 & A_2A_2' \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$

Démonstration

- Supposons A inversible : $A = M_{\mathscr{B}}(u)$ avec $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u(E_1) \subset E_1$. u étant bijective, $\dim u(E_1) = \dim E_1$ donc $u(E_1) = E_1$ d'où $u^{-1}(E_1) = E_1$: u^{-1} laisse stable E_1, donc sa matrice dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{bmatrix} A_1' & B_2' \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}$.

  Le produit par blocs donne alors : $\begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1' & B_2' \\ 0 & A_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1' & A_1B'2 + B_2A_2' \\ 0 & A_2A_2' \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$

  donc $\begin{cases} A_1A_1' & = I_p \\ A_2A_2' & = I_{n-p} \\ A_1B_2' + B_2A_2' & = B_2' \end{cases}$ d'où A_1, A_2 sont inversibles d'inverses respectives A_1', A_2', et $B_2' = -A_1^{-1}B_2A_2^{-1}$.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme
$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$
est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme :
$$A^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$$

Démonstration

- Réciproquement, si A_1 et A_2 sont inversibles, on vérifie par un simple calcul que la matrice $A' = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}B_2A_2^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$ est telle que $AA' = I_n$ d'où A inversible.

Rem pour les 5/2 : plus rapidement, on peut utiliser le calcul d'un déterminant par blocs.

Proposition 20

L'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par multiplication.

Proposition 21

$A = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont.

Et, dans ce cas, A^{-1} est de la forme : $A^{-1} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc} A_1^{-1} & B_2' \\ 0 & A_2^{-1} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{n-p} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array}$

Corollaire:

$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si A_1 **et** A_2 le sont, et, dans ce cas, $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$.

Remarque

Les résultats ci-dessus se généralisent sans difficulté aux cas des matrices triangulaires supérieures par blocs, de la forme : $\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & A_{nn} \end{bmatrix}$, où les A_{ii} sont des matrices **carrées**,

et aux matrices diagonales par blocs de la forme $\begin{bmatrix} A_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_{nn} \end{bmatrix}$.

CHANGEMENTS DE BASES

Matrices de passage

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On la note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Ainsi, la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.

Matrices de passage

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On la note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Ainsi, la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.

Interprétations

- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u(e_i) = e'_i$.

Matrices de passage

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On la note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Ainsi, la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.

Interprétations

- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u(e_i) = e'_i$.
- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice, dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ de l'application Id_E, c'est-à-dire $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Matrices de passage

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On la note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Ainsi, la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.

Interprétations

- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u(e_i) = e'_i$.
- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice, dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ de l'application Id_E, c'est-à-dire $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Proposition 22

1. Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases de E, on a :

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$$

Matrices de passage

Définition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice du système $(e'_1, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On la note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ ou $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

Ainsi, la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est formée des coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.

Interprétations

- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par : $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ u(e_i) = e'_i$.
- $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est aussi la matrice, dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ de l'application Id_E, c'est-à-dire $\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Proposition 22

1. Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases de E, on a :
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$$
2. $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Démonstration

1. - **Démonstration savante :**

  On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}'') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}"'] \arrow[rr, bend right, "v\circ u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}"'] & (E,\mathscr{B}') \arrow[r, "v=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] & (E,\mathscr{B})
\end{tikzcd}$$

  et il suffit d'écrire que la matrice de $v \circ u$ est égal au produit des matrices de v et u.

Démonstration

❶

- **Démonstration savante :**

  On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
(E, \mathscr{B}'') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}"'] \arrow[rr, bend right=60, "v\circ u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}"'] & (E, \mathscr{B}') \arrow[r, "v=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] & (E, \mathscr{B})
\end{tikzcd}$$

  et il suffit d'écrire que la matrice de $v \circ u$ est égal au produit des matrices de v et u.

- **Démonstration plus élémentaire :** (mais c'est en fait la même..)

  En notant $A = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $B = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ et $C = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$, et les autres notations « évidentes », on a :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!],\ \ e_k'' = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j' = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) e_i \,.$$

Démonstration

1. - **Démonstration savante :**

   On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] (E, \mathscr{B}'') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}"'] \arrow[rr, bend right, "v\circ u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}"'] & (E, \mathscr{B}') \arrow[r, "v=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] & (E, \mathscr{B}) \end{tikzcd}$$

   et il suffit d'écrire que la matrice de $v \circ u$ est égal au produit des matrices de v et u.

   - **Démonstration plus élémentaire :** (mais c'est en fait la même..)

   En notant $A = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $B = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ et $C = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$, et les autres notations « évidentes », on a :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!],\ \ e_k'' = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j' = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) e_i\ .$$

   Ainsi la coordonnée c_{ik} de e_k'' sur e_i est-elle égale à :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

   ce qui signifie, par la formule du produit matriciel, que l'on a $C = AB$.

Démonstration

1

- **Démonstration savante :**

  On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
(E,\mathscr{B}'') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}"'] \arrow[rr, bend right=60, "v\circ u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}"'] & (E,\mathscr{B}') \arrow[r, "v=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] & (E,\mathscr{B})
\end{tikzcd}$$

  et il suffit d'écrire que la matrice de $v \circ u$ est égal au produit des matrices de v et u.

- **Démonstration plus élémentaire :** (mais c'est en fait la même..)

  En notant $A = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $B = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ et $C = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$, et les autres notations « évidentes », on a :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n]\!],\ e''_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e'_j = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) e_i \,.$$

  Ainsi la coordonnée c_{ik} de e''_k sur e_i est-elle égale à :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

  ce qui signifie, par la formule du produit matriciel, que l'on a $C = AB$.

2 On applique la relation précédente avec $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$.

Formules de changement de bases

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit x un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ et X' celle de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$. On a alors la relation :

$$\boxed{X = PX'} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathtt{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathtt{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\,\mathtt{M}_{\mathscr{B}'}(x)}$$

Formules de changement de bases

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit x un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ et X' celle de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$. On a alors la relation :

$$\boxed{X = PX'} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\, \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)}$$

Démonstration

- **Démonstration savante :** On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathscr{B}') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] & (E, \mathscr{B}) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
(x, X') \arrow[r, mapsto, "u=\mathrm{Id}_E"] & (x, X)
\end{tikzcd}$$

Formules de changement de bases

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit x un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ et X' celle de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$. On a alors la relation :

$$\boxed{X \;=\; PX'} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \; \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\; \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)}$$

Démonstration

- **Démonstration savante :** On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (E,\mathscr{B}') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] \arrow[d, squiggly, no head] & (E,\mathscr{B}) \arrow[d, squiggly, no head] \\ (x,X') \arrow[r, mapsto, "u=\mathrm{Id}_E"] & (x,X) \end{tikzcd}$$

- **Démonstration plus élémentaire :**
  En notant $P = (a_{ij})$ et avec des notations « naturelles » on a, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i$$

Formules de changement de bases

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Soit x un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ et X' celle de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$. On a alors la relation :

$$\boxed{X = PX'} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\, \mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(x)}$$

Démonstration

- **Démonstration savante :** On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathscr{B}') \arrow[r, "u=\mathrm{Id}_E", "\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}"'] \arrow[d, squiggly, no head] & (E, \mathscr{B}) \arrow[d, squiggly, no head] \\
(x, X') \arrow[r, mapsto, "u=\mathrm{Id}_E"] & (x, X)
\end{tikzcd}$$

- **Démonstration plus élémentaire :**
  En notant $P = (a_{ij})$ et avec des notations « naturelles » on a, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i$$

  donc $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ pour tout i, c'est-à-dire $X = PX'$ par la formule du produit matriciel.

Proposition 24

Soient : $\left| \begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_E \text{ et } \mathscr{B}'_E. \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}'_F. \\ P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_E \text{ à } \mathscr{B}'_E \\ Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_F \text{ à } \mathscr{B}'_F \end{array} \right.$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Proposition 24

Soient : $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_E \text{ et } \mathscr{B}'_E. \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}'_F. \\ P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_E \text{ à } \mathscr{B}'_E \\ Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_F \text{ à } \mathscr{B}'_F \end{array}\right.$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ ($A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$).

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Démonstration

- **Démonstration savante :**

  Encore un beau diagramme qui explique tout...

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathscr{B}'_E) \arrow[rr, "\mathrm{Id}_E", "P"'] \arrow[d, "u"', "A'"] \arrow[drr, "u \circ \mathrm{Id}_E\,(AP)", "(QA')\mathrm{Id}_F \circ u"'] & & (E, \mathscr{B}_E) \arrow[d, "A"', "u"] \\
(F, \mathscr{B}'_F) \arrow[rr, "Q", "\mathrm{Id}_F"'] & & (F, \mathscr{B}_F)
\end{tikzcd}$$

Proposition 24

Soient : $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q\text{, muni de deux bases } \mathscr{B}_E \text{ et } \mathscr{B}'_E. \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p\text{, muni de deux bases } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}'_F. \\ P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_E \text{ à } \mathscr{B}'_E \\ Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_F \text{ à } \mathscr{B}'_F \end{array}\right.$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Démonstration

- **Démonstration plus élémentaire :**
  Soit x un vecteur de E, et X, X' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
  Soit ensuite $y = u(x)$, et Y, Y' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$.

Proposition 24

Soient :
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, muni de deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni de deux bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$.
$P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$
$Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Démonstration

- **Démonstration plus élémentaire :**
  Soit x un vecteur de E, et X, X' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
  Soit ensuite $y = u(x)$, et Y, Y' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$.
  On a alors, d'après les résultats précédents :

$$X = PX' \quad , \quad Y = QY' \quad , \quad Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X' \,.$$

Proposition 24

Soient : $\left|\begin{array}{l} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } q, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_E \text{ et } \mathscr{B}'_E. \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel de dimension } p, \text{ muni de deux bases } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}'_F. \\ P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_E \text{ à } \mathscr{B}'_E \\ Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ la matrice de passage de } \mathscr{B}_F \text{ à } \mathscr{B}'_F \end{array}\right.$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Démonstration

- **Démonstration plus élémentaire :**

  Soit x un vecteur de E, et X, X' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
  Soit ensuite $y = u(x)$, et Y, Y' les matrices colonnes de ses coordonnées dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$.
  On a alors, d'après les résultats précédents :

  $$X = PX' \quad , \quad Y = QY' \quad , \quad Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X' \, .$$

  On en tire : $Y = AX$ et $Y = QY'$ impliquent $AX = QA'X' = QA'P^{-1}X$, et comme cela est vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ on en déduit $A = QA'P^{-1}$.

Proposition 24

Soients :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, muni de deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni de deux bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$.
- $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$
- $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{B}'_F$

Soit enfin $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}^{\mathscr{B}'_F}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Corollaire: *Cas d'un endomorphisme*

Soients :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni de deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$.
- $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_E$ à $\mathscr{B}'_E$
- $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{M}_{\mathscr{B}_E}(u)$ et $A' = \mathrm{M}_{\mathscr{B}'_E}(u)$ $(A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

On a alors la relation :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\mathrm{M}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}\, \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)\, \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, de rang r. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F$, tels que $A = M_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, de rang r. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F$, tels que $A = M_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E ($\dim S = r$ par le théorème du rang). Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de S et $(e'_{r+1}, \dots, e'_q)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. On sait alors que $\mathscr{B}'_E = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de E.

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, de rang r. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F$, tels que $A = M_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E ($\dim S = r$ par le théorème du rang). Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de S et $(e'_{r+1}, \dots, e'_q)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. On sait alors que $\mathscr{B}'_E = (e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de E.

On sait aussi que la restriction de u à S définit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Donc
$e''_1 = u(e'_1), \dots, e''_r = u(e'_r)$ forment une base de $\operatorname{Im} u$, que l'on complète en une base
$\mathscr{B}'_F = (e''_1, \dots, e''_p)$ de F.

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r \ = \ \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, de rang r. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F$, tels que $A = M_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E ($\dim S = r$ par le théorème du rang). Soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de S et $(e'_{r+1}, \ldots, e'_q)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. On sait alors que $\mathscr{B}'_E = (e'_1, \ldots, e'_q)$ est une base de E.

On sait aussi que la restriction de u à S définit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Donc $e''_1 = u(e'_1), \ldots, e''_r = u(e'_r)$ forment une base de $\operatorname{Im} u$, que l'on complète en une base $\mathscr{B}'_F = (e''_1, \ldots, e''_p)$ de F. Alors la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$ est égale à J_r, et le résultat découle des formules de changements de bases.

Théorème 9

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A = Q^{-1} J_r P}$$

avec : $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, de rang r. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, rapporté à une base $\mathscr{B}_E$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base $\mathscr{B}_F$, tels que $A = M_{\mathscr{B}_E}^{\mathscr{B}_F}(u)$.
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E ($\dim S = r$ par le théorème du rang). Soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base de S et $(e'_{r+1}, \ldots, e'_q)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. On sait alors que $\mathscr{B}'_E = (e'_1, \ldots, e'_q)$ est une base de E.

On sait aussi que la restriction de u à S définit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Donc $e''_1 = u(e'_1), \ldots, e''_r = u(e'_r)$ forment une base de $\operatorname{Im} u$, que l'on complète en une base $\mathscr{B}'_F = (e''_1, \ldots, e''_p)$ de F. Alors la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$ est égale à J_r, et le résultat découle des formules de changements de bases.

Rem : en Sup, ce résultat se démontre en utilisant la méthode du pivot. En effet, toute matrice de rang r est équivalente à J_r par une suite d'opérations élémentaires convenables sur les lignes et colonnes.
Or faire une opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible convenable, d'où le résultat.

Remarque
D'après la proposition 9, la réciproque du théorème précédent est vraie : si $A = Q^{-1} J_r P$ avec P et Q inversibles, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r$.

Remarque
D'après la proposition 9, la réciproque du théorème précédent est vraie : si $A = Q^{-1} J_r P$ avec P et Q inversibles, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r$.

Corollaire:

> Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Remarque
D'après la proposition 9, la réciproque du théorème précédent est vraie : si $A = Q^{-1} J_r P$ avec P et Q inversibles, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r$.

Corollaire:

Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration

Si A est de rang r, elle est équivalente à$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$: il existe $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $A = Q^{-1} J_r P$.

Remarque
D'après la proposition 9, la réciproque du théorème précédent est vraie : si $A = Q^{-1}J_r P$ avec P et Q inversibles, alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r$.

Corollaire:

Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration

Si A est de rang r, elle est équivalente à$J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{bmatrix}$: il existe $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $A = Q^{-1}J_r P$.
Alors $A^\top = P^\top J_r^\top (Q^{-1})^\top$ donc $A^\top$ a même rang que $J_r^\top = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{q-r,r} & 0_{q-r,p-r} \end{bmatrix}$ (invariance du rang par multiplication par une matrice inversible), et cette matrice est aussi de rang r.

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A **et** A' **sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme** u **d'un espace vectoriel de dimension** n**.**

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est <u>semblable</u> à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A **et** A' **sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme** u **d'un espace vectoriel de dimension** n**.**

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (réflexive, symétrique et transitive).

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est <u>semblable</u> à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A **et** A' **sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme** u **d'un espace vectoriel de dimension** n**.**

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (réflexive, symétrique et transitive).

Exercice

Montrer que la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A **et** A' **sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme** u **d'un espace vectoriel de dimension** n**.**

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (réflexive, symétrique et transitive).

Exercice

Montrer que la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. L'énoncé équivaut à la recherche d'une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telles que $a(e_1') = e_1'$, $a(e_2') = e_2'$ et $a(e_3') = e_2' + e_3'$.

Matrices semblables

Définition 19

On dit qu'une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Cela équivaut à dire que A **et** A' **sont les matrices, dans deux bases différentes, d'un même endomorphisme** u **d'un espace vectoriel de dimension** n**.**

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (réflexive, symétrique et transitive).

Exercice

Montrer que la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. L'énoncé équivaut à la recherche d'une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telles que $a(e'_1) = e'_1$, $a(e'_2) = e'_2$ et $a(e'_3) = e'_2 + e'_3$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors : $AX = X \iff \begin{cases} x = x \\ -6y - 4z = 0 \\ 9y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ z = -\dfrac{3}{2}y \end{cases}$.

Solution (suite)

L'ensemble des vecteurs invariants par a est donc un plan, et on peut choisir comme base de ce plan $e_1' = (1, 0, 0)$ et $e_2' = (0, 2, -3)$.

Solution (suite)

L'ensemble des vecteurs invariants par a est donc un plan, et on peut choisir comme base de ce plan $e'_1 = (1,0,0)$ et $e'_2 = (0,2,-3)$.

En notant alors $e'_3 = (x,y,z)$, la relation $a(e'_3) = e'_2 + e'_3$ équivaut alors à

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit à } \begin{cases} x = x \\ -6y - 4z = 2 \\ 9y + 6z = -3 \end{cases}$$

Solution (suite)

L'ensemble des vecteurs invariants par a est donc un plan, et on peut choisir comme base de ce plan $e'_1 = (1, 0, 0)$ et $e'_2 = (0, 2, -3)$.

En notant alors $e'_3 = (x, y, z)$, la relation $a(e'_3) = e'_2 + e'_3$ équivaut alors à

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit à } \begin{cases} x = x \\ -6y - 4z = 2 \\ 9y + 6z = -3 \end{cases}$$

On peut alors choisir $e'_3 = (0, 0, -\frac{1}{2})$, qui est bien linéairement indépendant des 2 précédents.

Solution (suite)

L'ensemble des vecteurs invariants par a est donc un plan, et on peut choisir comme base de ce plan $e_1' = (1, 0, 0)$ et $e_2' = (0, 2, -3)$.

En notant alors $e_3' = (x, y, z)$, la relation $a(e_3') = e_2' + e_3'$ équivaut alors à

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit à } \begin{cases} x = x \\ -6y - 4z = 2 \\ 9y + 6z = -3 \end{cases}$$

On peut alors choisir $e_3' = (0, 0, -\frac{1}{2})$, qui est bien linéairement indépendant des 2 précédents.

En conclusion, on a $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Solution (suite)

L'ensemble des vecteurs invariants par a est donc un plan, et on peut choisir comme base de ce plan $e_1' = (1, 0, 0)$ et $e_2' = (0, 2, -3)$.

En notant alors $e_3' = (x, y, z)$, la relation $a(e_3') = e_2' + e_3'$ équivaut alors à

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit à } \begin{cases} x = x \\ -6y - 4z = 2 \\ 9y + 6z = -3 \end{cases}$$

On peut alors choisir $e_3' = (0, 0, -\frac{1}{2})$, qui est bien linéairement indépendant des 2 précédents.

En conclusion, on a $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La méthode utilisée dans cet exercice est importante à retenir.

TRACE D'UNE MATRICE, D'UN ENDOMORPHISME

Définition 20

On appelle <u>trace</u> d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Définition 20

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Définition 20

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad , \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration

- On vérifie facilement que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. On peut aussi, plus astucieusement, remarquer que chaque application $A \mapsto a_{ii}$ est linéaire (forme linéaire coordonnée), et que tr est la somme de ces applications.

Définition 20

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration

- On vérifie facilement que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. On peut aussi, plus astucieusement, remarquer que chaque application $A \mapsto a_{ii}$ est linéaire (forme linéaire coordonnée), et que tr est la somme de ces applications.
- Avec des notations évidentes :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$$

Définition 20

On appelle <u>trace</u> d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration

- On vérifie facilement que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. On peut aussi, plus astucieusement, remarquer que chaque application $A \mapsto a_{ii}$ est linéaire (forme linéaire coordonnée), et que tr est la somme de ces applications.
- Avec des notations évidentes :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ji} b_{ij}$$

Définition 20

On appelle trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration

- On vérifie facilement que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. On peut aussi, plus astucieusement, remarquer que chaque application $A \mapsto a_{ii}$ est linéaire (forme linéaire coordonnée), et que tr est la somme de ces applications.
- Avec des notations évidentes :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$$
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ji} b_{ij}$$

d'où l'égalité (en échangeant les rôles de i et j dans les deux sommes).

Définition 20

On appelle <u>trace</u> d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le scalaire : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Théorème 10

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall\, A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration

- On vérifie facilement que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$. On peut aussi, plus astucieusement, remarquer que chaque application $A \mapsto a_{ii}$ est linéaire (forme linéaire coordonnée), et que tr est la somme de ces applications.
- Avec des notations évidentes :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_{ji} b_{ij}$$

d'où l'égalité (en échangeant les rôles de i et j dans les deux sommes).

Remarque : Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le résultat ci-dessus donne :

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$$

mais on n'a pas $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BAC)$ en général.

Théorème 11

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Théorème 11

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Démonstration

En effet, en utilisant la propriété précédente et l'associativité de la multiplication :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \operatorname{tr}\left((PP^{-1})A\right) = \operatorname{tr} A\,.$$

Théorème 11

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Démonstration

En effet, en utilisant la propriété précédente et l'associativité de la multiplication :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \operatorname{tr}\left((PP^{-1})A\right) = \operatorname{tr} A\,.$$

Définition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, le scalaire $\operatorname{tr}\left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)\right)$ ne dépend donc pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Ce scalaire s'appelle la <u>trace</u> de l'endomorphisme u, noté $\operatorname{tr} u$.

Théorème 11

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Démonstration

En effet, en utilisant la propriété précédente et l'associativité de la multiplication :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \operatorname{tr}\left((PP^{-1})A\right) = \operatorname{tr} A\,.$$

Définition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, le scalaire $\operatorname{tr}\left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)\right)$ ne dépend donc pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Ce scalaire s'appelle la <u>trace</u> de l'endomorphisme u, noté $\operatorname{tr} u$.

Propriétés :

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall\, u, v \in \mathscr{L}(E)\ ,\ \operatorname{tr}(v \circ u) = \operatorname{tr}(u \circ v)$.

Théorème 11

Deux matrices carrées semblables ont même trace.

Démonstration

En effet, en utilisant la propriété précédente et l'associativité de la multiplication :

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \operatorname{tr}\left((PP^{-1})A\right) = \operatorname{tr} A.$$

Définition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, le scalaire $\operatorname{tr}\left(\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(u)\right)$ ne dépend donc pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.

Ce scalaire s'appelle la <u>trace</u> de l'endomorphisme u, noté $\operatorname{tr} u$.

Propriétés :

1. L'application $\operatorname{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. $\forall\, u, v \in \mathscr{L}(E)\ ,\ \operatorname{tr}(v \circ u) = \operatorname{tr}(u \circ v)$.

Ces propriétés découlent directement de celles correspondantes sur les matrices.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Démonstration

- Le résultat est immédiat si $p = 0$.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Démonstration

- Le résultat est immédiat si $p = 0$.

  Sinon, soit $r = \operatorname{rg} p$, avec $r \neq 0$. On sait que $E = \operatorname{Inv}(p) \oplus \operatorname{Ker} p$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de $\operatorname{Inv}(p)$ et d'une base de $\operatorname{Ker} p$, la matrice de p dans cette base sera de la forme $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, car $r = \operatorname{rg} p = \dim \operatorname{Im} p = \dim(\operatorname{Inv}(p))$.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Démonstration

- Le résultat est immédiat si $p = 0$.

  Sinon, soit $r = \operatorname{rg} p$, avec $r \neq 0$. On sait que $E = \operatorname{Inv}(p) \oplus \operatorname{Ker} p$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de $\operatorname{Inv}(p)$ et d'une base de $\operatorname{Ker} p$, la matrice de p dans cette base sera de la forme $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, car $r = \operatorname{rg} p = \dim \operatorname{Im} p = \dim(\operatorname{Inv}(p))$.

  Et puisque l'on a évidemment $r = \operatorname{tr} J_r$, on en déduit $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} J_r = \operatorname{tr} p$ puisque la trace de p est aussi celle de sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Démonstration

- Le résultat est immédiat si $p = 0$.

  Sinon, soit $r = \operatorname{rg} p$, avec $r \neq 0$. On sait que $E = \operatorname{Inv}(p) \oplus \operatorname{Ker} p$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de $\operatorname{Inv}(p)$ et d'une base de $\operatorname{Ker} p$, la matrice de p dans cette base sera de la forme $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, car $r = \operatorname{rg} p = \dim \operatorname{Im} p = \dim(\operatorname{Inv}(p))$.

  Et puisque l'on a évidemment $r = \operatorname{tr} J_r$, on en déduit $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} J_r = \operatorname{tr} p$ puisque la trace de p est aussi celle de sa matrice dans n'importe quelle base.

- On sait que $E_1 = \operatorname{Inv}(s)$ et que $E_2 = \operatorname{Opp}(s)$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2, la matrice de s dans cette base est $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix}$, où $r = \dim E_1$ et $s = \dim E_2$, d'où le résultat.

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.
2. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et si s est la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, alors : $\operatorname{tr} s = \dim(E_1) - \dim(E_2)$.

Démonstration

- Le résultat est immédiat si $p = 0$.

  Sinon, soit $r = \operatorname{rg} p$, avec $r \neq 0$. On sait que $E = \operatorname{Inv}(p) \oplus \operatorname{Ker} p$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de $\operatorname{Inv}(p)$ et d'une base de $\operatorname{Ker} p$, la matrice de p dans cette base sera de la forme $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, car $r = \operatorname{rg} p = \dim \operatorname{Im} p = \dim(\operatorname{Inv}(p))$.

  Et puisque l'on a évidemment $r = \operatorname{tr} J_r$, on en déduit $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} J_r = \operatorname{tr} p$ puisque la trace de p est aussi celle de sa matrice dans n'importe quelle base.

- On sait que $E_1 = \operatorname{Inv}(s)$ et que $E_2 = \operatorname{Opp}(s)$ donc, en prenant une base de E formée de la réunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2, la matrice de s dans cette base est $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix}$, où $r = \dim E_1$ et $s = \dim E_2$, d'où le résultat.

  Rem : il était aussi possible d'écrire $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et utiliser la linéarité de la trace...

FIN DU CHAPITRE IV