

DÉTERMINANTS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désigne un entier naturel non nul.

I. Applications p-linéaires

Déf 1:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F est une application $f: E^p \rightarrow F$ telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall (a_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket - \{j\}} \text{ l'application partielle } f_j: \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p) \end{cases}$$

est une application linéaire.

On notera $\mathcal{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F . Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p, F)$.

Déf 2:

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathcal{L}_p(E)$.

Exemples

1. Dans un espace préhilbertien E , le produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire.
2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel est une application bilinéaire.
3. Si les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des formes linéaires sur E , l'application $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \varphi_1(x_1) \times \dots \times \varphi_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E .

Rem : Ne pas confondre *application p-linéaire sur E* et *application linéaire sur E^p* !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = f(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p)) = \lambda f(x_1, \dots, x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_p)$$

Déf 3:

Une application p-linéaire $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$ est dite :

- symétrique si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ avec $i < j$, pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

(c'est-à-dire que la valeur de f est inchangée lorsque l'on permute deux arguments).

- antisymétrique si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ avec $i < j$, pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

(c'est-à-dire que la valeur de f est transformée en son opposée lorsque l'on permute deux arguments)

Prop 1:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

 Démonstration:

Soit f une forme p -linéaire antisymétrique, et soient i, j tels que $1 \leq i < j \leq p$. Alors, pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$:

$$f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i\text{-ème place}}, \dots, \underbrace{x_j}_{j\text{-ème place}}, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i\text{-ème place}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j\text{-ème place}}, \dots, x_p).$$

En particulier, si $x_i = x_j$ on obtient : $f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i\text{-ème place}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j\text{-ème place}}, \dots, x_p) = 0$, cqfd.

Corollaire 1.1:

Si f est une application p -linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\implies f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

 Démonstration:

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Pour simplifier l'écriture, supposons que ça soit x_1 : $x_1 = \sum_{i=2}^p \lambda_i x_i$. Alors

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i=2}^p \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = \sum_{i=2}^p \lambda_i \underbrace{f(x_i, x_2, \dots, x_p)}_{=0} = 0$$

car 2 vecteurs égaux
et f antisymétrique

2. Supposons, pour simplifier l'écriture, que l'on ajoute à x_1 un vecteur y qui est combinaison linéaire de $x_2, \dots, x_p$. Alors $f(x_1 + y, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p) + f(y, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p)$ puisque la famille $(y, x_2, \dots, x_p)$ est liée.

II. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E .
- $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne une famille de vecteurs de E .

Le théorème suivant est admis :

Théorème 1:

1. Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , il existe une et une seule forme n -linéaire antisymétrique φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Elle s'appelle le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et est notée $\det_{\mathcal{B}}$:

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{cases}$$

2. Pour toute forme n -linéaire antisymétrique φ sur E , il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ (ou, en termes savants, l'ensemble des formes n -linéaires antisymétriques est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$).

 Démonstration: dans le cas $n = 3$

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de v_j).

Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2, v_3) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^3 a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^3 a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^3 a_{i_3 3} e_{i_3}\right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}). \end{aligned}$$

Or dans la somme ci-dessus (qui comporte 27 termes), le nombre $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul dès que deux des indices i_j sont égaux (car φ antisymétrique). Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Il y a exactement 6 triplets $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2, 3\}^3$ d'éléments distincts. De plus, en utilisant l'antisymétrie de φ on a :

$$\varphi(e_2, e_1, e_3) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_1, e_3, e_2) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et

$$\varphi(e_2, e_3, e_1) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = +\varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Il reste donc

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \left((a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}) \right) \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Donc si l'on impose $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$ φ est unique et vaut :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

et pour toute autre forme 3-linéaire antisymétrique on a

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, e_3) \cdot \det_{\mathcal{B}}.$$

Remarque : en anticipant un peu sur les définitions qui vont suivre, on vient ici de démontrer que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}).$$

On en déduit la « règle de Sarrus » (voir détails plus loin).

Généralisation : Dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la même démonstration permet de montrer que $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ est une somme de $n!$ termes, tous de la forme

$$\pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

où $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ est une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire une somme (avec des signes $\pm$) de produits de n termes de la matrice, où l'on a pris un terme dans chaque colonne avec des indices de lignes 2 à 2 distincts.

Puisque le déterminant est une forme n -linéaire antisymétrique, on en déduit immédiatement les propriétés suivantes (toujours avec les notations précédentes).

Propriétés:

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i < j$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \dots, v_n)$, le déterminant change de signe.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.
3. Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée, le déterminant est nul.
4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des *autres*.

Prop 2:

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors :

1. $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$ c'est-à-dire

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

2. $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

Démonstration:

1. $\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme n -linéaire antisymétrique, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}$.
En particulier, on aura : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$.
2. La relation précédente appliquée aux vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ donne :

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}')}_{=1} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Théorème 2:

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n , et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors :

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

 Démonstration:

- On a déjà vu que $(v_1, \dots, v_n)$ liée $\implies \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = 0$ puisque $\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique. Par contraposition, on obtient :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \implies (v_1, \dots, v_n) \text{ libre} \implies (v_1, \dots, v_n) \text{ base.}$$

- Réciproquement, si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base $\mathcal{B}'$ de E , la relation $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ implique que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

III. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 3:

E désigne toujours un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.
Ce scalaire s'appelle le déterminant de l'endomorphisme u , noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n)) = \det u \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

 Démonstration:

- L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n))$ est une forme n -linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).
Donc il existe $\lambda_{\mathcal{B}}$ tel que $\varphi_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{B}} \cdot \det_{\mathcal{B}}$, soit

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n)) = \lambda_{\mathcal{B}} \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$$
 En particulier, puisque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, on a $\lambda_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$.
- Il reste à vérifier que $\lambda_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E , on a, par définition de $\lambda_{\mathcal{B}} : \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \lambda_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$
 Or $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(u(\mathcal{B}'))}_{=\lambda_{\mathcal{B}'}}$, d'où $\lambda_{\mathcal{B}'} = \lambda_{\mathcal{B}}$.

Propriétés:

1. $\det \text{Id}_E = 1$
2. $u \in \text{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
En effet, $u \in \text{GL}(E)$ si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de E , ce qui équivaut à $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \neq 0$ en vertu du théorème 2.
3. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
En effet, $\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}(u \circ v(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(u[v(\mathcal{B})]) = \det u \cdot \det_{\mathcal{B}}(v(\mathcal{B})) = \det u \cdot \det v$.
4. Si $u \in \text{GL}(E)$, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$.
Car $u \circ u^{-1} = \text{Id}_E$ et on applique les deux résultats précédents.
5. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.

IV. Déterminant d'une matrice carrée

Déf 4:

- Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}_E$ une base de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- Soit $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E , telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$.
- Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Notation : le déterminant de A se note aussi :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Propriétés:

Les 5 premières propriétés ci-dessous découlent directement de celles concernant le déterminant d'un endomorphisme.

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

En effet, si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\det A = \det u = \det A'$.

On peut aussi utiliser la relation $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = \det A$.

Prop 3:

| Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

 Démonstration:

On peut supposer T triangulaire supérieure, le raisonnement est identique pour une matrice triangulaire inférieure.

$$\text{Soit donc } T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par linéarité par rapport à la première colonne, on a } \det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Puis en effectuant les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\text{Par linéarité par rapport à la seconde colonne, on a ensuite } \det T = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ etc...}$$

Prop 4:

| Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^\top) = \det A$.

 Démonstration:

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).

Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (invertible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.

Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det ({}^tQT) = \det ({}^tT) \det ({}^tQ) = \det T \cdot \det Q = \det A$.

Précisions et rappels sur la méthode du pivot :

- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($i \neq j$), on a $A' = PA$, où $P = I_n + \lambda E_{ij}$.
- Si A' la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$), on a $A' = PA$, où $P = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, on a : $A' = PA$, où $P = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Rem: La proposition ci-dessus permet, pour calculer un déterminant, d'utiliser les mêmes opérations sur les lignes que sur les colonnes. En particulier :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant change de signe ;
- si l'on multiplie une ligne d'une matrice par un scalaire λ , le déterminant est multiplié par λ ;
- on ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'une de ses lignes une combinaison linéaire des autres lignes.

V. Calculs de déterminants

Lemme:

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & A' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

 **Démonstration:**

D'abord, en effectuant les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & A' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Alors, en notant $C'_2, \dots, C'_n$ les colonnes de A' , il est clair que l'application $(C'_2, \dots, C'_n) \mapsto \det A$ sera une forme $(n-1)$ -linéaire antisymétrique.

Il résulte alors du théorème 1 qu'il existe un scalaire λ indépendant de A' tel que $\det A = \lambda \det A'$. En prenant ensuite $A' = I_{n-1}$, on trouve $\lambda = 1$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n).$$

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On peut écrire $C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}E_i$ où les E_i sont les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j -ème variable on obtient :

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij}E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Ainsi : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A_{ij})$ (*), où A_{ij} est la matrice :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ C_1 & \dots & C_{j-1} & 1 & C_{j+1} & \dots & C_n \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$\uparrow$
 $j^{\text{ème}} \text{ colonne}$

Prop 5:

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A .

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i, j) de la matrice A , et $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i, j) .

Démonstration:

Dans A_{ij} , on effectue les $j - 1$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$, $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}, \dots$, $C_2 \leftrightarrow C_1$. Le déterminant obtenu est celui de $(E_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$, et il est égal à $(-1)^{j-1} \det(A_{ij})$ puisque l'on a effectué $j - 1$ échanges de colonnes.

Soient $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de la matrice obtenue.

Si on effectue maintenant sur les lignes de cette matrice $i - 1$ transpositions de façon similaire à la précédente, on obtient le

déterminant de la matrice dont les lignes sont $(L_i, L_1, \dots, L_{i-1}, L_{i+1}, \dots, L_n)$. Ce déterminant est en fait égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{vmatrix},$$

où A'_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

En utilisant le lemme précédent, on obtient $\det(A_{ij}) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \det(A'_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$.

La formule (*) s'écrit donc :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $j^{\text{ème}}$ colonne.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne, que l'on écrit $L_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur ligne de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient de la même façon :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Exemple

Calcul d'un déterminant d'ordre 3 et règle de Sarrus.

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

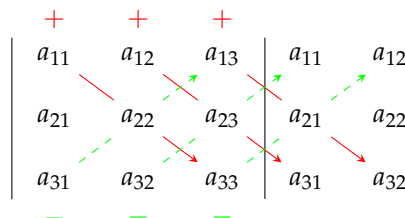
– Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

– et en développant par rapport à la 2ème ligne par exemple on a :

$$\Delta = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

– Dans les deux cas on trouve $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, ce qui peut être illustré par le schéma :

**Théorème 4: calcul d'un déterminant par blocs**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ où $\begin{matrix} \uparrow \downarrow p \\ \uparrow \downarrow n-p \end{matrix}$

Alors : $\det A = \det A_1 \times \det A_2$

$\xleftarrow{p} \quad \xleftarrow{n-p}$

 Démonstration:

En faisant un produit par blocs, on remarque que :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

donc, en considérant les déterminants :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}$$

Puis $\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_2$ en développant p fois le déterminant selon la première colonne, et $\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = \det A_1$ en développant $n - p$ fois selon la dernière colonne.

Rem: On en déduit facilement par récurrence que, si A s'écrit par blocs sous la forme

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{pp} \end{bmatrix},$$

où les A_{ii} sont des matrices carrées, alors $\det A = \prod_{i=1}^p \det(A_{ii})$.

Exemples à connaître**1. Matrices tridiagonales**

Il s'agit de calculer, pour $n \geq 2$, le déterminant d'ordre n : $D_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

 Solution:

La méthode consiste ici à développer ce déterminant selon la première colonne (par exemple). On obtient ainsi la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

ce qui permet de calculer D_n en fonction de n (Rem : pour la résolution de la récurrence, il peut être intéressant de poser $D_0 = 1$ et $D_1 = a$).

2. Un grand classique

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geq 2$: $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Plusieurs méthodes sont possibles :

- par récurrence...
- en utilisant la multilinéarité...
- en additionnant les $n - 1$ dernières colonnes à la première...

- On calcule le déterminant $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & & & \\ & a+X & & c+X & \\ & & \ddots & & \\ b+X & & & & a+X \end{vmatrix}$, en remarquant qu'il s'agit d'un polynôme en X de degré ≤ 1 ...

 Solution:

- 1ère solution

En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres, puis en développant le déterminant obtenu selon la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}(b-a) \begin{vmatrix} b & b & \dots & \dots & b \\ a-b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \end{vmatrix}$$

Puis on développe le dernier déterminant (d'ordre $n-1$) selon la dernière colonne et on obtient :

$$D_n = (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}(b-a)(-1)^nb(a-b)^{n-2} = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}.$$

En supposant $a \neq b$ cette relation s'écrit :

$$\frac{D_n}{(a-b)^{n-1}} = \frac{D_{n-1}}{(a-b)^{n-2}} + b,$$

autrement dit la suite de terme général $\frac{D_n}{(a-b)^{n-1}}$ est arithmétique de raison b .

On en déduit : $\frac{D_n}{(a-b)^{n-1}} = \frac{D_2}{(a-b)} + (n-2)b = (a+b) + (n-2)b = a + (n-1)b$ et finalement :

$$\forall n \geq 2, D_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1},$$

la formule restant valable pour $a = b$ car dans ce cas le déterminant est trivialement nul.

• 2ème solution

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ notons E_i le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U le vecteur colonne $U = {}^t(1 \ 1 \ \dots \ 1)$.

Alors :

$$D_n = \det((a-b)E_1 + bU, (a-b)E_2 + bU, \dots, (a-b)E_n + bU).$$

En développant ce déterminant par multilinéarité, puisque un déterminant est nul dès qu'il y a deux colonnes proportionnelles, il reste seulement :

$$\begin{aligned} D_n &= \det((a-b)E_1, (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n) \\ &\quad + \det(bU, (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n) + \det((a-b)E_1, bU, (a-b)E_3, \dots, (a-b)E_n) \\ &\quad + \dots + \det((a-b)E_1, (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_{n-1}, bU). \end{aligned}$$

Or en développant le déterminant $\det((a-b)E_1, \dots, (a-b)E_{i-1}, bU, (a-b)E_{i+1}, \dots, (a-b)E_n)$ selon la i -ème ligne on trouve qu'il est égal à $b(a-b)^{n-1}$ donc finalement :

$$D_n = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}((a-b) + nb) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

• 3ème solution (la plus rapide ici)

L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ donne :

$$D_n = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

En soustrayant alors la 1ère ligne à toutes les autres, on se ramène au déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, et c'est fini.

• 4ème solution

En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres puis en développant selon la 1ère ligne, il est facile de voir que $\Delta_{a,b,c}(X)$ est un polynôme en X de degré ≤ 1 .

Donc il existe α, β tels que $\Delta_{a,b,c}(X) = \alpha X + \beta$; on connaît $\Delta_{a,b,c}(-b) = (a-b)^n$ et $\Delta_{a,b,c}(-c) = (a-c)^n$ donc un calcul rapide donne, pour $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

On a, en utilisant la continuité du déterminant par rapport à ses coefficients :

$$D_n = \Delta_{a,b,b}(0) = \lim_{c \rightarrow b} \Delta_{a,b,c}(0) = \lim_{c \rightarrow b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

Cette limite n'est autre que la dérivée en b de la fonction $c \mapsto c(a-b)^n - b(a-c)^n$; après calcul, on retrouve le résultat précédent.

Remarque : la même méthode permet de calculer plus généralement le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & c & \dots & \dots & c \\ b & x_2 & c & \dots & c \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & x_{n-1} & c \\ b & b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

3. Déterminant de Vandermonde

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geq 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) =$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Prop 6:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

 **Solution:**

• 1ère solution

En faisant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ pour i variant de n à 2 on obtient :

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{j=2}^n (a_j - a_1) V(a_2, \dots, a_n), \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à faire une récurrence sur $n \geq 2$.

• 2ème solution

En considérant $V(a_1, \dots, a_n)$ comme une fonction en a_n , on voit, en développant (fictivement) le déterminant par rapport à la dernière ligne, qu'il s'agit d'un polynôme en a_n , de degré $\leq n-1$ et de coefficient dominant $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.

Or ce polynôme est nul dès que $a_n = a_i$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ (car la matrice de Vandermonde a alors 2 lignes égales), donc les a_i ($1 \leq i \leq n-1$) sont racines de $V(a_1, \dots, a_n)$ considéré comme polynôme en a_n .

Si l'on suppose les a_i distincts, on a ainsi obtenu $n-1$ racines distinctes d'un polynôme de degré $\leq n-1$ donc, par factorisation de ce polynôme :

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$$

et là encore on conclut par récurrence (pour être complet, il faut ajouter que la formule reste vraie lorsque les a_i ne sont pas distincts, car alors le déterminant est nul).

On en déduit en particulier que :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0 \iff \text{les } a_i \text{ sont deux à deux distincts.}$$

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donnés $n+1$ scalaires deux à deux distincts $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $n+1$ scalaires (non nécessairement distincts) $b_0, b_1, \dots, b_n$, on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .

Si l'on écrit ce polynôme dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, sous la forme

$$P = \sum_{j=0}^n \lambda_j X^j,$$

déterminer P revient à résoudre le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les λ_j) suivant :

$$\forall i \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j a_i^j = b_i.$$

Or la matrice de ce système n'est autre que la matrice de Vandermonde $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$; puisque cette matrice est inversible, le système possède une et une seule solution, ce qui redémontre l'existence et l'unicité du polynôme P .

Exemple

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1, \quad P(2) = 1, \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2.$$

 **Solution:**

– 1ère méthode (déjà vue)

On écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2) \times 2 \times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2 \times 4 \times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2) \times (-4) \times (-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1) \times (-3) \times 1} = \frac{1}{3}X^3 - \frac{4}{3}X$$

$$\text{Donc } P = -L_0 + L_1 + L_2 + 2L_3 = \frac{5}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{10}{3}X - 1.$$

– 2ème méthode, résolution d'un système

On écrit le polynôme cherché sous la forme $P = x + yX + zX^2 + tX^3$. Les quatre égalités données sont équivalentes au système :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + 4z + 8t = 1 \\ x - 2y + 4z - 8t = 1 \\ x - y + z - t = 2 \end{cases}$$

qui est ici très facile à résoudre.

VI. Orientation d'un espace vectoriel réel

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5:

Dans l'ensemble des bases de E , on définit une relation binaire par :

$$\mathcal{B} \mathfrak{R} \mathcal{B}' \iff \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement deux classes d'équivalence.

 **Démonstration:**

1. – La réflexivité est évidente : on a $\mathcal{B} \mathfrak{R} \mathcal{B}$ pour toute base $\mathcal{B}$ puisque $P = I_n$ dans ce cas.

– La relation est symétrique : si $\mathcal{B} \mathfrak{R} \mathcal{B}'$ alors $\mathcal{B}' \mathfrak{R} \mathcal{B}$ puisque $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$.

– La relation est transitive : si $\mathcal{B} \mathfrak{R} \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \mathfrak{R} \mathcal{B}''$ alors $\mathcal{B} \mathfrak{R} \mathcal{B}''$ puisque $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.
Donc $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base, $\mathcal{B}$ est en relation avec elle-même mais pas avec $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Donc il y a au moins 2 classes d'équivalence. Et si $\mathcal{B}''$ est une autre base, si elle n'est pas en relation avec $\mathcal{B}$ elle est forcément en relation avec $\mathcal{B}'$ (car $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Il n'y a donc que ces deux classes d'équivalence.

Déf 5:

Orientier l'espace vectoriel E , c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle classe des bases directes, l'autre étant alors appelée classe des bases indirectes. (il n'y a que deux orientations possibles).

VII. Annexe : rappels de Sup sur les suites récurrentes linéaires

Les suites arithmético-géométriques ou les suites récurrentes linéaires peuvent apparaître dans plusieurs types d'exercices (calculs de déterminants, calculs de probabilités...). Il est donc important d'apprendre les méthodes et formules rappelées ci-après.

VII.1. Suites arithmético-géométriques

On considère ici l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$.

- Si $a = 1$, la suite est tout simplement arithmétique de raison b et l'on a alors $u_n = u_0 + nb$ pour tout entier n .
- Si $a \neq 1$, la suite constante égale à $\ell = \frac{b}{1-a}$ vérifie bien la relation de récurrence (il suffit de résoudre l'équation $\ell = a\ell + b$). Si l'on pose alors $v_n = u_n - \ell$ pour tout n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n,$$

de sorte que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . On aura donc $v_n = a^n v_0$ pour tout n , d'où l'on tire finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \ell = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

Remarques

1. Il ne faut bien sûr pas retenir cette dernière formule par cœur mais seulement la méthode ; les calculs sont alors faciles à refaire.
2. Il faut savoir adapter les résultats dans le cas où la suite n'est définie qu'à partir d'un rang n_0 .
Pour cela, il suffit de se rappeler que les formules deviennent :
 - $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)b$ pour une suite arithmétique de raison b ;
 - $v_n = a^{n-n_0}v_{n_0}$ pour une suite géométrique de raison a .

VII.2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère ici l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui vérifient une relation de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad (L)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

On « sait » alors que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2.

On peut alors chercher des éléments particuliers de $\mathcal{S}$: une suite géométrique $n \mapsto r^n$ avec $r \in \mathbb{K}^*$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = 0 \quad \text{soit} \quad ar^2 + br + c = 0.$$

L'équation $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence.

On étudie alors ses solutions. Il faut distinguer deux cas, selon que le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En notant Δ le discriminant de l'équation caractéristique, on a les résultats suivants.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
 - Si $\Delta \neq 0$, (E_c) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 ; dans ce cas, les suites $n \mapsto r_1^n$ et $n \mapsto r_2^n$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L) . L'ensemble des solutions de (L) est donc l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, (E_c) possède une racine double r ; dans ce cas, les suites $n \mapsto r^n$ et $n \mapsto nr^n$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L) . L'ensemble des solutions de (L) est alors l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = (\lambda n + \mu)r^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si $\Delta \geq 0$, on a les mêmes résultats que ci-dessus (mais avec ici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ et μ réels).
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E_c) admet deux racines complexes non réelles conjuguées $re^{\pm i\theta}$, et alors les suites $n \mapsto r^n \cos n\theta$ et $n \mapsto r^n \sin n\theta$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (L) . L'ensemble des solutions de (L) est ici l'ensemble des suites de la forme :

$$u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)r^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

