Chapitre V : Déterminants

PSI*

Septembre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

APPLICATIONS p-LINÉAIRES

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f : E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall\,(a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_p) \end{array}\right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : *f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f: E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall\,(a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1,\ldots,a_{j-1},x,a_{j+1},\ldots,a_p) \end{array}\right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : f *est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

On notera $\mathscr{L}_p(E,F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p,F)$.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f\colon E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall\,(a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j\colon \left\{\begin{array}{ccl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1,\ldots,a_{j-1},x,a_{j+1},\ldots,a_p)\end{array}\right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : *f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

On notera $\mathscr{L}_p(E,F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p,F)$.

Définition 2

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathscr{L}_p(E)$.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f : E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall (a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_p) \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : *f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

On notera $\mathscr{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p, F)$.

Définition 2

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathscr{L}_p(E)$.

Exemples

1. Dans un espace préhilbertien E, le produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire (voir cours de 1ère année et chapitre suivant).

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f\colon E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall\,(a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}}\ \text{l'application partielle}\ f_j\colon \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1,\ldots,a_{j-1},x,a_{j+1},\ldots,a_p) \end{array}\right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : *f est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

On notera $\mathscr{L}_p(E,F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p,F)$.

Définition 2

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathscr{L}_p(E,\mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathscr{L}_p(E)$.

Exemples

1. Dans un espace préhilbertien E, le produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire (voir cours de 1ère année et chapitre suivant).
2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel est une application bilinéaire.

Définition 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une application p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est une application $f : E^p \to F$ telle que :

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!]\ ,\ \forall (a_i)_{i\in[\![1;p]\!]-\{j\}} \text{ l'application partielle } f_j : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_p) \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

Plus simplement, on dit que : f *est linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

On notera $\mathscr{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E dans F. Il est facile de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^p, F)$.

Définition 2

Une forme p-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application p-linéaire de E^p dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ des formes p-linéaires sur E se note simplement $\mathscr{L}_p(E)$.

Exemples

1. Dans un espace préhilbertien E, le produit scalaire est, par définition, une forme bilinéaire (voir cours de 1ère année et chapitre suivant).
2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, le produit vectoriel est une application bilinéaire.
3. Si les $(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont des formes linéaires sur E, l'application $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \varphi_1(x_1) \times \cdots \times \varphi_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E.

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) = f\big(\lambda.(x_1, \ldots, x_p)\big) = \lambda f(x_1, \ldots, x_p)$$

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) = f\big(\lambda.(x_1, \ldots, x_p)\big) = \lambda f(x_1, \ldots, x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, \ldots, x_p).$$

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = f\big(\lambda.(x_1, \dots, x_p)\big) = \lambda f(x_1, \dots, x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_p).$$

Définition 3

Une application p-linéaire $f \in \mathscr{L}_p(E, F)$ est dite :

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = f\big(\lambda.(x_1, \dots, x_p)\big) = \lambda f(x_1, \dots, x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_p).$$

Définition 3

Une application p-linéaire $f \in \mathscr{L}_p(E, F)$ est dite :

1. symétrique si, pour tout $(i, j) \in [\![1 ; p]\!]^2$ avec $i < j$, pour tout $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

(c'est-à-dire que la valeur de f est inchangée lorsque l'on permute deux arguments).

Ne pas confondre **application p-linéaire sur E** et **application linéaire sur E^p** !

Par exemple, si f est linéaire de E^p dans F on a :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) = f\big(\lambda.(x_1, \ldots, x_p)\big) = \lambda f(x_1, \ldots, x_p)$$

alors que si f est p-linéaire, on a :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) = \lambda^p f(x_1, \ldots, x_p).$$

Définition 3

Une application p-linéaire $f \in \mathscr{L}_p(E, F)$ est dite :

1. symétrique si, pour tout $(i, j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ avec $i < j$, pour tout $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$,

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$

(c'est-à-dire que la valeur de f est inchangée lorsque l'on permute deux arguments).

2. antisymétrique si, pour tout $(i, j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ avec $i < j$, pour tout $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$,

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$

(c'est-à-dire que la valeur de f est transformée en son opposée lorsque l'on permute deux arguments)

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Démonstration

Soit f une forme p-linéaire antisymétrique, et soient i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$.

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Démonstration

Soit f une forme p-linéaire antisymétrique, et soient i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$.
Alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$:

$$f(x_1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i\text{-ème place}}, \ldots, \underbrace{x_j}_{j\text{-ème place}}, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i\text{-ème place}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j\text{-ème place}}, \ldots, x_p).$$

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Démonstration

Soit f une forme p-linéaire antisymétrique, et soient i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant p$.
Alors, pour toute famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in E^p$:

$$f(x_1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i\text{-ème place}}, \ldots, \underbrace{x_j}_{j\text{-ème place}}, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i\text{-ème place}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j\text{-ème place}}, \ldots, x_p).$$

En particulier, si $x_i = x_j$ on obtient : $f(x_1, \ldots, \underbrace{x_i}_{i\text{-ème place}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j\text{-ème place}}, \ldots, x_p) = 0$, cqfd.

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\Longrightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des **autres**.

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\Longrightarrow \; f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des **autres**.

Démonstration

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Pour simplifier l'écriture, supposons que ça soit x_1 : $x_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$.

Proposition 1

Si f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\Longrightarrow$ $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des **autres**.

Démonstration

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Pour simplifier l'écriture, supposons que ça soit x_1 : $x_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$. Alors, en utilisant la linéarité par rapport à la 1ère variable :

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_p\right) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \underbrace{f(x_i, x_2, \dots, x_p)}_{\substack{=0 \\ \text{car 2 vecteurs égaux} \\ \text{et } f \text{ antisymétrique}}} = 0.$$

Proposition 1

Si f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1,\dots,x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1,\dots,x_p)$ liée $\Longrightarrow$ $f(x_1,\dots,x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1,\dots,x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des **autres**.

Démonstration

1. Si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée, un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Pour simplifier l'écriture, supposons que ça soit x_1 : $x_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$. Alors, en utilisant la linéarité par rapport à la 1ère variable :

$$f(x_1,\dots,x_p) = f\left(\sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i, x_2,\dots,x_p\right) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \underbrace{f(x_i,x_2,\dots,x_p)}_{\substack{=0 \\ \text{car 2 vecteurs égaux} \\ \text{et } f \text{ antisymétrique}}} = 0.$$

2. Supposons, pour simplifier l'écriture, que l'on ajoute à x_1 un vecteur y qui est combinaison linéaire de $x_2,\dots,x_p$.

Proposition 1

S i f est une application p-linéaire antisymétrique alors, pour toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in E^p$, on a :

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ dès qu'il existe deux indices } i \neq j \text{ tels que } x_i = x_j.$$

Corollaire:

Si f est une application p-linéaire antisymétrique, alors :

1. $(x_1, \dots, x_p)$ liée $\Longrightarrow$ $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(x_1, \dots, x_p)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des **autres**.

Démonstration

1. Si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée, un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres. Pour simplifier l'écriture, supposons que ça soit x_1 : $x_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$. Alors, en utilisant la linéarité par rapport à la 1ère variable :

$$f(x_1, \dots, x_p) = f\Big(\sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_p\Big) = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \underbrace{f(x_i, x_2, \dots, x_p)}_{\substack{=0 \\ \text{car 2 vecteurs égaux} \\ \text{et } f \text{ antisymétrique}}} = 0.$$

2. Supposons, pour simplifier l'écriture, que l'on ajoute à x_1 un vecteur y qui est combinaison linéaire de $x_2, \dots, x_p$. Alors $f(x_1 + y, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p) + f(y, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p)$ puisque la famille $(y, x_2, \dots, x_p)$ est liée.

DÉTERMINANT D'UN SYSTÈME DE VECTEURS DANS UNE BASE

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

Le théorème suivant est admis dans le cas général :

Théorème 1

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

Le théorème suivant est admis dans le cas général :

Théorème 1

1. Étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, il existe une et une seule forme n-linéaire antisymétrique φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

Le théorème suivant est admis dans le cas général :

Théorème 1

1. Étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, il existe une et une seule forme n-linéaire antisymétrique φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

   Elle s'appelle le <u>déterminant dans la base $\mathscr{B}$</u> et est notée $\det_{\mathscr{B}}$:

$$\det_{\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{rcl} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{array} \right.$$

- E désigne par la suite un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$).
- $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E.
- $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne une famille de vecteurs de E.

Le théorème suivant est admis dans le cas général :

Théorème 1

1. Étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, il existe une et une seule forme n-linéaire antisymétrique φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

   Elle s'appelle le <u>déterminant dans la base $\mathscr{B}$</u> et est notée $\det_{\mathscr{B}}$:

$$\det_{\mathscr{B}} : \left\{ \begin{array}{rcl} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{array} \right.$$

2. Pour toute forme n-linéaire antisymétrique φ sur E, il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$ (ou, en termes savants, l'ensemble des formes n-linéaires antisymétriques est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathscr{B}}$).

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).
Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 3} e_{i_3}\right) = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in [\![1;3]\!]^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).
Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 3} e_{i_3}\right) = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in [\![1;3]\!]^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Or dans la somme ci-dessus (qui comporte 27 termes), le nombre $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul dès que deux des indices i_j sont égaux (car φ antisymétrique). Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).
Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 3} e_{i_3}\right) = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in [\![1;3]\!]^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Or dans la somme ci-dessus (qui comporte 27 termes), le nombre $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul dès que deux des indices i_j sont égaux (car φ antisymétrique). Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Il y a exactement $3! = 6$ triplets $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2, 3\}^3$ d'éléments distincts. De plus, en utilisant l'antisymétrie de φ on a :

$$\varphi(e_2, e_1, e_3) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_1, e_3, e_2) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et

$$\varphi(e_2, e_3, e_1) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = +\varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).
Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 3} e_{i_3}\right) = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in [\![1;3]\!]^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Or dans la somme ci-dessus (qui comporte 27 termes), le nombre $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul dès que deux des indices i_j sont égaux (car φ antisymétrique). Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Il y a exactement $3! = 6$ triplets $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2, 3\}^3$ d'éléments distincts. De plus, en utilisant l'antisymétrie de φ on a :

$$\varphi(e_2, e_1, e_3) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_1, e_3, e_2) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et

$$\varphi(e_2, e_3, e_1) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = +\varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \Big((a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{21} a_{12} a_{33} + a_{31} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23})\Big) \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Démonstration (dans le cas $n = 3$)

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient v_1, v_2, v_3 des vecteurs de E et $A = (a_{ij})$ leur matrice dans la base $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire que les $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j}$ sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ de v_j).
Si φ est une forme 3-linéaire antisymétrique quelconque sur E on a alors, en développant par multilinéarité :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{i_2 2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 3} e_{i_3}\right) = \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in [\![1;3]\!]^3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Or dans la somme ci-dessus (qui comporte 27 termes), le nombre $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul dès que deux des indices i_j sont égaux (car φ antisymétrique). Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}).$$

Il y a exactement $3! = 6$ triplets $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2, 3\}^3$ d'éléments distincts. De plus, en utilisant l'antisymétrie de φ on a :

$$\varphi(e_2, e_1, e_3) = \varphi(e_3, e_2, e_1) = \varphi(e_1, e_3, e_2) = -\varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et

$$\varphi(e_2, e_3, e_1) = \varphi(e_3, e_1, e_2) = +\varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Il reste donc :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \Big((a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{21} a_{12} a_{33} + a_{31} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23}) \Big) \varphi(e_1, e_2, e_3).$$

Donc si l'on impose $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$, φ est unique et vaut :

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, v_3) = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}) - (a_{21} a_{12} a_{33} + a_{31} a_{22} a_{13} + a_{11} a_{32} a_{23})$$

et pour toute autre forme 3-linéaire antisymétrique on a

$$\varphi = \varphi(e_1, e_2, e_3).\det_{\mathscr{B}} .$$

Remarque

En anticipant un peu sur les définitions qui vont suivre, on vient ici de démontrer que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\right) - \left(a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}\right).$$

On en déduit la « règle de Sarrus » (voir détails plus loin).

Remarque

En anticipant un peu sur les définitions qui vont suivre, on vient ici de démontrer que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}).$$

On en déduit la « règle de Sarrus » (voir détails plus loin).

Cas général

Dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathscr{B}$ est une base de E et si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la même démonstration permet de montrer que $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ est une somme de $n!$ termes, tous de la forme

$$\pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

où $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une permutation de $[\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire une somme (avec des signes $\pm$) de produits de n termes de la matrice, où l'on a pris un terme dans chaque colonne avec des indices de lignes 2 à 2 distincts.

Remarque

En anticipant un peu sur les définitions qui vont suivre, on vient ici de démontrer que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23}).$$

On en déduit la « règle de Sarrus » (voir détails plus loin).

Cas général

Dans le cas d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, si $\mathscr{B}$ est une base de E et si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille de vecteurs de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la même démonstration permet de montrer que $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ est une somme de $n!$ termes, tous de la forme

$$\pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

où $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une permutation de $[\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire une somme (avec des signes $\pm$) de produits de n termes de la matrice, où l'on a pris un terme dans chaque colonne avec des indices de lignes 2 à 2 distincts.

Puisque le déterminant est une forme n-linéaire antisymétrique, on en déduit immédiatement les propriétés suivantes (toujours avec les notations précédentes).

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, on a

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \ldots, v_n)$, le déterminant change de signe.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i<j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1,\ldots,v_n)$, le déterminant change de signe.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_n)$.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \ldots, v_n)$, le déterminant change de signe.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.

3. Si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée, le déterminant est nul.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i < j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \dots, v_n)$, le déterminant change de signe.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$.
3. Si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée, le déterminant est nul.
4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des ***autres***.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i<j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1,\dots,v_n)$, le déterminant change de signe.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1,\dots,\lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$.

3. Si la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est liée, le déterminant est nul.

4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des ***autres***.

Proposition 2

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

1. $\forall\,(v_1,\dots,v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}'}(v_1,\dots,v_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$.
2. $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i<j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1,\ldots,v_n)$, le déterminant change de signe.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_n)$.
3. Si la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est liée, le déterminant est nul.
4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des ***autres***.

Proposition 2

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

1. $\forall\,(v_1,\ldots,v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}'}(v_1,\ldots,v_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_n)$.
2. $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$.

Démonstration

1. $\det_{\mathscr{B}'}$ est une forme n-linéaire antisymétrique, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathscr{B}'} = \lambda.\det_{\mathscr{B}}$.
En particulier, on aura : $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \lambda.\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \lambda$.

Propriétés :

1. Pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i < j$, on a
$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$
Autrement dit, si l'on échange deux vecteurs dans la famille $(v_1, \ldots, v_n)$, le déterminant change de signe.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathscr{B}}(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.

3. Si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée, le déterminant est nul.

4. On ne change pas le déterminant d'un système de vecteurs si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des ***autres***.

Proposition 2

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

1. $\forall (v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, $\det_{\mathscr{B}'}(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.
2. $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$.

Démonstration

2. La relation précédente appliquée aux vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ donne :
$$\underbrace{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}')}_{=1} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}).\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').$$

Théorème 2

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

Théorème 2

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

Démonstration

- On a déjà vu que $(v_1, \dots, v_n)$ liée $\implies \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = 0$ puisque $\det_{\mathscr{B}}$ est antisymétrique. Par contraposition, on obtient :

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \implies (v_1, \dots, v_n) \text{ libre} \implies (v_1, \dots, v_n) \text{ base}.$$

Théorème 2

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors :

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

Démonstration

- On a déjà vu que $(v_1, \ldots, v_n)$ liée $\implies \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = 0$ puisque $\det_{\mathscr{B}}$ est antisymétrique. Par contraposition, on obtient :

$$\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0 \implies (v_1, \ldots, v_n) \text{ libre} \implies (v_1, \ldots, v_n) \text{ base.}$$

- Réciproquement, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base $\mathscr{B}'$de E, la relation $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$ implique que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
   $$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) \;=\; \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1), \ldots, u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1), \ldots, u(v_n)\right)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).
  Donc il existe $\lambda_{\mathscr{B}}$ tel que $\varphi_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}$, soit
$$\forall (v_1, \ldots, v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
   $$\det_{\mathscr{B}} \big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big) \;=\; \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}} \big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).

  Donc il existe $\lambda_{\mathscr{B}}$ tel que $\varphi_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}$, soit
  $$\forall\,(v_1, \dots, v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}} \big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big) \;=\; \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$$
  En particulier, puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, on a $\lambda_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big)$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).
  Donc il existe $\lambda_{\mathscr{B}}$ tel que $\varphi_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}$, soit
$$\forall\,(v_1, \ldots, v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$
  En particulier, puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, on a $\lambda_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$.
- Il reste à vérifier que $\lambda_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le déterminant de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\ldots,u(v_n)\big) \;=\; \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1,\ldots,v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\ldots,u(v_n)\big)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).
  Donc il existe $\lambda_{\mathscr{B}}$ tel que $\varphi_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}$, soit
$$\forall\,(v_1,\ldots,v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\ldots,u(v_n)\big) \;=\; \lambda_{\mathscr{B}} . \det_{\mathscr{B}}(v_1,\ldots,v_n)$$
  En particulier, puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, on a $\lambda_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$.
- Il reste à vérifier que $\lambda_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a, par définition de $\lambda_{\mathscr{B}}$: $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B}')\big) = \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\dots,u(v_n)\big) \;=\; \det u.\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$$

Démonstration

- L'application $\varphi_{\mathscr{B}} : (v_1,\dots,v_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\dots,u(v_n)\big)$ est une forme n-linéaire (car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire) et antisymétrique (car on change son signe en échangeant deux des vecteurs).
  Donc il existe $\lambda_{\mathscr{B}}$ tel que $\varphi_{\mathscr{B}} = \lambda_{\mathscr{B}}.\det_{\mathscr{B}}$, soit
$$\forall\,(v_1,\dots,v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1),\dots,u(v_n)\big) \;=\; \lambda_{\mathscr{B}}.\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$$
  En particulier, puisque $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, on a $\lambda_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$.
- Il reste à vérifier que $\lambda_{\mathscr{B}}$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a, par définition de $\lambda_{\mathscr{B}}$: $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B}')\big) = \lambda_{\mathscr{B}}\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$
  Or $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B}')\big) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}').\underbrace{\det_{\mathscr{B}'}\big(u(\mathscr{B}')\big)}_{=\lambda_{\mathscr{B}'}}$, d'où $\lambda_{\mathscr{B}'} = \lambda_{\mathscr{B}}$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1),\dots,u(v_n)\right) \;=\; \det u.\det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1),\dots,u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}} \big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) \;=\; \det u.\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

En effet, $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de E, ce qui équivaut à $\det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big) \neq 0$ en vertu du théorème 2.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}} \big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}} \big(u(v_1), \ldots, u(v_n)\big) \;=\; \det u.\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\big(u(\mathscr{B})\big)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(v_1), \dots, u(v_n)\big) \;=\; \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

En effet, $\det(u \circ v) = \det_{\mathscr{B}}\big(u \circ v(\mathscr{B})\big) = \det_{\mathscr{B}}\big(u[v(\mathscr{B})]\big) = \det u . \det_{\mathscr{B}}\big(v(\mathscr{B})\big) = \det u . \det v$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1), \ldots, u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
4. Si $u \in GL(E)$, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$:
$$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1), \dots, u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
4. Si $u \in GL(E)$, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Car $u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et on applique les deux résultats précédents.

Théorème 3

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}\left(u(\mathscr{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathscr{B}$ choisie.
   Ce scalaire s'appelle le <u>déterminant</u> de l'endomorphisme u, noté $\det u$.
2. On a alors : pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille de vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$:
   $$\det_{\mathscr{B}}\left(u(v_1), \ldots, u(v_n)\right) = \det u . \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Propriétés

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ (car $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = 1$)
2. $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.
3. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Alors : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.
4. Si $u \in GL(E)$, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.
5. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.

DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration

Les 5 premières propriétés découlent directement de celles concernant le déterminant d'un endomorphisme. Démontrons la dernière.

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration

Les 5 premières propriétés découlent directement de celles concernant le déterminant d'un endomorphisme. Démontrons la dernière.

- Si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\det A = \det u = \det A'$.

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration

Les 5 premières propriétés découlent directement de celles concernant le déterminant d'un endomorphisme. Démontrons la dernière.

- Si A et A' sont semblables, elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes, donc $\det A = \det u = \det A'$.
- On peut aussi utiliser la relation $A' = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}). \det A. \det P = \det A$.

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}_E$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = M_{\mathscr{B}_E}(u)$.
Soit $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, telle que A est la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$.
Alors, par définition :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) = \det u.$$

Propriétés

1. $\det I_n = 1$
2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$
4. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Notation : le déterminant de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note aussi : $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Démonstration

On peut supposer T triangulaire supérieure, le raisonnement est identique pour une matrice triangulaire inférieure.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Démonstration

On peut supposer T triangulaire supérieure, le raisonnement est identique pour une matrice triangulaire inférieure.

Soit donc $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. Alors $\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Démonstration

On peut supposer T triangulaire supérieure, le raisonnement est identique pour une matrice triangulaire inférieure.

Soit donc $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. Alors $\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne.

Puis en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j} C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient $\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition 3

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Démonstration

On peut supposer T triangulaire supérieure, le raisonnement est identique pour une matrice triangulaire inférieure.

Soit donc $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. Alors $\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$, en utilisant la linéarité par rapport à la première colonne.

Puis en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j} C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient $\det T = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$. On a ensuite $\det T = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$, en utilisant la linéarité par rapport à la seconde colonne, etc... jusqu'à arriver à $\det T = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \det(I_n)$.

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^t A) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).
Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1 E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).

Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.

Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det({}^tT{}^tQ) = \det({}^tT) \det({}^tQ) = \det T . \det Q = \det A$.

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).
Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.
Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det({}^tT{}^tQ) = \det({}^tT)\det({}^tQ) = \det T.\det Q = \det A$.

Précisions et rappels sur la méthode du pivot :

- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + \lambda E_{ij}$.
- Si A' la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- Si A' est la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, on a : $A' = PA$, où $P = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).
Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1 E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.
Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det({}^tT{}^tQ) = \det({}^tT)\det({}^tQ) = \det T . \det Q = \det A$.

Précisions et rappels sur la méthode du pivot :

- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + \lambda E_{ij}$.
- Si A' la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- Si A' est la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, on a : $A' = PA$, où $P = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Remarque : La proposition ci-dessus permet, pour calculer un déterminant, d'utiliser les mêmes opérations sur les lignes que sur les colonnes. En particulier :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant change de signe ;

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).
Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.
Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det({}^tT{}^tQ) = \det({}^tT)\det({}^tQ) = \det T . \det Q = \det A$.

Précisions et rappels sur la méthode du pivot :

- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + \lambda E_{ij}$.
- Si A' la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- Si A' est la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, on a : $A' = PA$, où $P = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Remarque : La proposition ci-dessus permet, pour calculer un déterminant, d'utiliser les mêmes opérations sur les lignes que sur les colonnes. En particulier :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant change de signe ;
- si l'on multiplie une ligne d'une matrice par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ ;

Proposition 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det A$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, le résultat est vrai si la matrice A est triangulaire (car le déterminant est le produit des éléments diagonaux).
Dans le cas général, on sait, d'après la méthode du pivot de Gauss, que A peut s'écrire $A = QT$ où Q est une matrice (inversible) produit de matrices d'opérations élémentaires et où T est triangulaire supérieure. Notons $Q = E_1 E_2 \dots E_p$ où les E_i sont des matrices d'opérations élémentaires.
Or toute matrice d'opération élémentaire est soit symétrique (échange de lignes) soit triangulaire supérieure (transvection et dilatation). On aura donc $\det E_i = \det {}^tE_i$ pour tout i d'où l'on tire $\det Q = \det {}^tQ$. Puisque l'on a aussi $\det T = \det {}^tT$, on aura $\det {}^tA = \det({}^tT\,{}^tQ) = \det({}^tT)\det({}^tQ) = \det T . \det Q = \det A$.

Précisions et rappels sur la méthode du pivot :

- Si A' est la matrice obtenue à partir de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + \lambda E_{ij}$.
- Si A' la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$, on a $A' = PA$, où $P = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- Si A' est la matrice obtenue à partie de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$, on a : $A' = PA$, où $P = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Remarque : La proposition ci-dessus permet, pour calculer un déterminant, d'utiliser les mêmes opérations sur les lignes que sur les colonnes. En particulier :

- si on échange deux lignes d'une matrice, le déterminant change de signe ;
- si l'on multiplie une ligne d'une matrice par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ ;
- on ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'une de ses lignes une combinaison linéaire des **autres** lignes.

CALCULS DE DÉTERMINANTS

Lemme

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

Lemme

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

Démonstration

D'abord, en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j} C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Lemme

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

Démonstration

D'abord, en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j}C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Alors, en notant $C'_2, \dots, C'_n$ les colonnes de A', il est clair que l'application $(C'_2, \dots, C'_n) \mapsto \det A$ sera une forme $(n-1)$-linéaire antisymétrique :

Lemme

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

Démonstration

D'abord, en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j}C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{A'} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Alors, en notant $C'_2, \dots, C'_n$ les colonnes de A', il est clair que l'application $(C'_2, \dots, C'_n) \mapsto \det A$ sera une forme $(n-1)$-linéaire antisymétrique :
(en effet, par exemple si on multiplie C'_2 par λ, cela revient à multiplier C_2 par λ donc le déterminant est multiplié par λ, et si $C'_i = C'_j$ avec $i \neq j$, on a aussi $C_i = C_j$ dont $\det A$ est nul)..

Lemme

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est écrite par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$, alors $\det A = \det A'$.

Démonstration

D'abord, en effectuant les opérations élémentaires $C_j \longleftarrow C_j - a_{1j} C_1$, qui ne changent pas le déterminant, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Alors, en notant $C_2', \dots, C_n'$ les colonnes de A', il est clair que l'application $(C_2', \dots, C_n') \mapsto \det A$ sera une forme $(n-1)$-linéaire antisymétrique :
(en effet, par exemple si on multiplie C_2' par λ, cela revient à multiplier C_2 par λ donc le déterminant est multiplié par λ, et si $C_i' = C_j'$ avec $i \neq j$, on a aussi $C_i = C_j$ dont $\det A$ est nul)..
Il résulte alors du théorème 1 page 26 qu'il existe un scalaire λ indépendant de A' tel que $\det A = \lambda \det A'$.
En prenant ensuite $A' = I_{n-1}$, on trouve $\lambda = 1$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}\left(C_1, \ldots, C_n\right).$$

Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1,\dots,C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}\left(C_1,\dots,C_n\right).$$

Soit $j\in [\![1\,;n]\!]$. On peut écrire $C_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_i$ où les E_i sont les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n} \left(C_1, \dots, C_n\right).$$

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. On peut écrire $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$ où les E_i sont les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j-ème variable on obtient :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n} \left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_{\mathscr{B}_n} \left(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right).$$

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A ($\in \mathbb{K}^n$), et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}\left(C_1, \dots, C_n\right).$$

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. On peut écrire $C_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$ où les E_i sont les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j-ème variable on obtient :

$$\det A = \det_{\mathscr{B}_n}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det_{\mathscr{B}_n}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right).$$

Ainsi : $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (*)$, où A_{ij} est la matrice :

$$\begin{array}{cc} A_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ C_1 & \cdots & C_{j-1} & 1 & C_{j+1} & \cdots & C_n \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} & \leftarrow i^{\text{ème}}\text{ligne} \\ \uparrow & \\ j^{\text{ème}}\ \text{colonne} & \end{array}$$

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le <u>mineur</u> d'indice (i, j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le <u>cofacteur</u> d'indice (i, j).

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le <u>mineur</u> d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le <u>cofacteur</u> d'indice (i,j).

Démonstration

Dans A_{ij}, on effectue les $j-1$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$, $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$,..., $C_2 \leftrightarrow C_1$. Le déterminant obtenu est celui de $(E_i, C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n)$, et il est égal à $(-1)^{j-1}\det(A_{ij})$ puisque l'on a effectué $j-1$ échanges de colonnes.

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i, j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i, j).

Démonstration

Dans A_{ij}, on effectue les $j-1$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$, $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$,..., $C_2 \leftrightarrow C_1$. Le déterminant obtenu est celui de $(E_i, C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n)$, et il est égal à $(-1)^{j-1}\det(A_{ij})$ puisque l'on a effectué $j-1$ échanges de colonnes.
Soient $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ les lignes de la matrice obtenue.
Si on effectue maintenant sur les lignes de cette matrice $i-1$ transpositions de façon similaire à la précédente, on obtient le déterminant de la matrice dont les lignes sont $(L_i, L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_n)$.

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le <u>mineur</u> d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le <u>cofacteur</u> d'indice (i,j).

Démonstration

Dans A_{ij}, on effectue les $j-1$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$, $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$,..., $C_2 \leftrightarrow C_1$. Le déterminant obtenu est celui de $(E_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$, et il est égal à $(-1)^{j-1}\det(A_{ij})$ puisque l'on a effectué $j-1$ échanges de colonnes.
Soient $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de la matrice obtenue.
Si on effectue maintenant sur les lignes de cette matrice $i-1$ transpositions de façon similaire à la précédente, on obtient le déterminant de la matrice dont les lignes sont $(L_i, L_1, \dots, L_{i-1}, L_{i+1}, \dots, L_n)$.

Ce déterminant est en fait égal à $\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$, où A'_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i,j).

Démonstration

Dans A_{ij}, on effectue les $j-1$ transpositions $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$, $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$,..., $C_2 \leftrightarrow C_1$. Le déterminant obtenu est celui de $(E_i, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$, et il est égal à $(-1)^{j-1}\det(A_{ij})$ puisque l'on a effectué $j-1$ échanges de colonnes.
Soient $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de la matrice obtenue.
Si on effectue maintenant sur les lignes de cette matrice $i-1$ transpositions de façon similaire à la précédente, on obtient le déterminant de la matrice dont les lignes sont $(L_i, L_1, \dots, L_{i-1}, L_{i+1}, \dots, L_n)$.

Ce déterminant est en fait égal à $\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$, où A'_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.
En utilisant le lemme précédent, on obtient $\det(A_{ij}) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\det(A'_{ij}) = (-1)^{i+j}det(A'_{ij})$.

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le <u>mineur</u> d'indice (i, j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le <u>cofacteur</u> d'indice (i, j).

La formule $(*)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\det A \ = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}\,.}$$

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i,j).

La formule $(*)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}\,.}$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $j^{ème}$ colonne .

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i,j).

La formule $(*)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\det A \ = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}\,.}$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $j^{\text{ème}}$ colonne .

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne, que l'on écrit $L_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$ où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur ligne de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient de la même façon :

$$\det A \ = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$

Proposition 5

On a : $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A.

Δ_{ij} s'appelle le mineur d'indice (i,j) de la matrice A, et $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur d'indice (i,j).

La formule $(*)$ s'écrit donc :

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}\,.}$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $j^{ème}$ colonne .

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $i^{ème}$ ligne, que l'on écrit $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$ où e_j est le $j^{ème}$ vecteur ligne de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient de la même façon :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$

Cette formule s'appelle le développement de $\det A$ selon la $i^{ème}$ ligne.

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

- Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

- Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

- et en développant par rapport à la 2ème ligne par exemple on a :

$$\Delta = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

- Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

- et en développant par rapport à la 2ème ligne par exemple on a :

$$\Delta = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- Dans les deux cas on trouve $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, ce qui peut être illustré par le schéma :

Exemple : calcul d'un déterminant 3×3 et règle de Sarrus

Soit à calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

- Si l'on développe par rapport à la 1ère colonne, on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

- et en développant par rapport à la 2ème ligne par exemple on a :

$$\Delta = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- Dans les deux cas on trouve $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, ce qui peut être illustré par le schéma :

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

Théorème 4: calcul d'un déterminant par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underset{p}{\longleftrightarrow} & \underset{n-p}{\longleftrightarrow} \end{array} & \end{array}$

Alors : $\det A = \det A_1 \times \det A_2$

Théorème 4: calcul d'un déterminant par blocs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, écrite par blocs sous la forme $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \underleftrightarrow{p} & \underleftrightarrow{n-p} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow n-p \end{array}$

Alors : $\det A \;=\; \det A_1 \times \det A_2$

Démonstration

En faisant un produit par blocs, on remarque que : $\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$ donc, en prenant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}.$$

Puis $\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_2$ en développant p fois le déterminant selon la première colonne, et $\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = \det A_1$ en développant $n-p$ fois selon la dernière colonne.

On en déduit facilement par récurrence que, si A s'écrit par blocs sous la forme $\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & A_{pp} \end{bmatrix}$, où les A_{ii} sont des matrices **carrées**, alors $\det A = \prod_{i=1}^{p} \det(A_{ii})$.

Exemple 1 : *calcul du déterminant d'une matrice tridiagonale*

Il s'agit de calculer, pour $n \geqslant 2$, le déterminant d'ordre n : $D_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Exemple 1 : *calcul du déterminant d'une matrice tridiagonale*

Il s'agit de calculer, pour $n \geqslant 2$, le déterminant d'ordre n : $D_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 \\ b & a & c & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b & a & c \\ 0 & 0 & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

La méthode consiste ici à développer ce déterminant selon la première colonne (par exemple). On obtient ainsi la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

ce qui permet de calculer D_n en fonction de n (*Rem :* pour la résolution de la récurrence, il peut être intéressant de poser $D_0 = 1$ et $D_1 = a$).

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

1. *1ère solution : par récurrence*

   À chaque ligne on soustrait la précédente, et on obtient : $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b-a & a-b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b-a & a-b \end{vmatrix}$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

1. *1ère solution : par récurrence*

   À chaque ligne on soustrait la précédente, et on obtient : $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b-a & a-b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b-a & a-b \end{vmatrix}$

   puis en développant selon la dernière colonne :

$$D_n = (-1)^{n+1}(b-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

1. *1ère solution : par récurrence*

   À chaque ligne on soustrait la précédente, et on obtient : $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b-a & a-b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b-a & a-b \end{vmatrix}$

   puis en développant selon la dernière colonne :

   $$D_n = (-1)^{n+1}(b-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

   Lorsque $a = b$, D_n est nul et sinon, en divisant l'égalité précédente par $(a-b)^{n-1}$ et en posant $u_n = \frac{D_n}{(a-b)^{n-1}}$ on se ramène à une suite arithmétique :

   $$u_n = b + u_{n-1}.$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

1. *1ère solution : par récurrence*

À chaque ligne on soustrait la précédente, et on obtient : $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b-a & a-b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b-a & a-b \end{vmatrix}$

puis en développant selon la dernière colonne :

$$D_n = (-1)^{n+1}(b-a)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

Lorsque $a = b$, D_n est nul et sinon, en divisant l'égalité précédente par $(a-b)^{n-1}$ et en posant $u_n = \frac{D_n}{(a-b)^{n-1}}$ on se ramène à une suite arithmétique :

$$u_n = b + u_{n-1}.$$

On en déduit $u_n = a + (n-1)b$ d'où $D_n = \big(a + (n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$ (cette formule restant valable lorsque $a = b$).

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

2. *2ème solution : une astuce à retenir*

   On remarque que la somme des coefficients de chaque ligne est la même. On effectue donc l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, qui donne :

$$D_n = \big(a + (n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

2. *2ème solution : une astuce à retenir*

   On remarque que la somme des coefficients de chaque ligne est la même. On effectue donc l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, qui donne :

$$D_n = \big(a + (n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

   En soustrayant alors la 1ère ligne à toutes les autres, on se ramène au déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, et c'est fini.

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

3. *3ème solution : utilisation de la multilinéarité*

   Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ notons E_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U le vecteur colonne $U = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

3. *3ème solution : utilisation de la multilinéarité*

   Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ notons E_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U le vecteur colonne $U = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

   Alors : $D_n = \det\big((a-b)E_1 + bU,\ (a-b)E_2 + bU, \dots, (a-b)E_n + bU\big)$..

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

3. *3ème solution : utilisation de la multilinéarité*

   Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ notons E_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U le vecteur colonne $U = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

   Alors : $D_n = \det\big((a-b)E_1 + bU,\ (a-b)E_2 + bU, \dots, (a-b)E_n + bU\big)..$

   En développant ce déterminant par multilinéarité, puisque un déterminant est nul dès qu'il y a deux colonnes proportionnelles, il reste seulement :

$$\begin{aligned} D_n = &\det\big((a-b)E_1,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n\big) \\ &+ \det\big(bU,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n\big) + \det\big((a-b)E_1,\ bU, (a-b)E_3, \dots, (a-b)E_n\big) \\ &+ \dots + \det\big((a-b)E_1,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_{n-1}, bU\big). \end{aligned}$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

3. *3ème solution : utilisation de la multilinéarité*

   Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ notons E_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et U le vecteur colonne $U = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$.

   Alors : $D_n = \det\big((a-b)E_1 + bU,\ (a-b)E_2 + bU, \dots, (a-b)E_n + bU\big)$..

   En développant ce déterminant par multilinéarité, puisque un déterminant est nul dès qu'il y a deux colonnes proportionnelles, il reste seulement :

$$\begin{aligned} D_n = &\det\big((a-b)E_1,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n\big) \\ &+ \det\big(bU,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_n\big) + \det\big((a-b)E_1,\ bU, (a-b)E_3, \dots, (a-b)E_n\big) \\ &+ \dots + \det\big((a-b)E_1,\ (a-b)E_2, \dots, (a-b)E_{n-1}, bU\big). \end{aligned}$$

   Or en développant le déterminant $\det\big((a-b)E_1, \dots,\ (a-b)E_{i-1}, bU, (a-b)E_{i+1}, \dots, (a-b)E_n\big)$ selon la i-ème ligne on trouve qu'il est égal à $b(a-b)^{n-1}$ donc finalement :

$$D_n = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}\big((a-b)+nb\big) = \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}.$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

4. *4ème solution : une astuce pas à retenir*

   On introduit le déterminant d'ordre n : $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & c+X \\ & a+X & \\ & & \ddots & \\ b+X & & & a+X \end{vmatrix}$.

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

4. *4ème solution : une astuce pas à retenir*

   On introduit le déterminant d'ordre n : $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & c+X \\ & a+X & \\ & \ddots & \\ b+X & & a+X \end{vmatrix}$.

   En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres puis en développant selon la 1ère ligne, il est facile de voir que $\Delta_{a,b,c}(X)$ est un polynôme en X de degré $\leqslant 1$.

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

4. *4ème solution : une astuce pas à retenir*

   On introduit le déterminant d'ordre n : $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & c+X \\ & a+X & \\ b+X & \ddots & \\ & & a+X \end{vmatrix}$.

   En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres puis en développant selon la 1ère ligne, il est facile de voir que $\Delta_{a,b,c}(X)$ est un polynôme en X de degré $\leqslant 1$.

   Donc il existe α, β tels que $\Delta_{a,b,c}(X) = \alpha X + \beta$; on connaît $\Delta_{a,b,c}(-b) = (a-b)^n$ et $\Delta_{a,b,c}(-c) = (a-c)^n$ donc un calcul rapide donne, pour $b \neq c$:

   $$\alpha = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}\,.$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

4. *4ème solution : une astuce pas à retenir*

On introduit le déterminant d'ordre n : $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & & \\ & a+X & & c+X \\ b+X & & \ddots & \\ & & & a+X \end{vmatrix}$.

En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres puis en développant selon la 1ère ligne, il est facile de voir que $\Delta_{a,b,c}(X)$ est un polynôme en X de degré $\leqslant 1$.

Donc il existe α, β tels que $\Delta_{a,b,c}(X) = \alpha X + \beta$; on connaît $\Delta_{a,b,c}(-b) = (a-b)^n$ et $\Delta_{a,b,c}(-c) = (a-c)^n$ donc un calcul rapide donne, pour $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

On a ensuite, en utilisant la continuité du déterminant par rapport à ses coefficients :

$$D_n = \Delta_{a,b,b}(0) = \lim_{c \to b} \Delta_{a,b,c}(0) = \lim_{c \to b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

Exemple 2 : *un grand classique*

Il s'agit ici de calculer le déterminant d'ordre $n \geqslant 2$: $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & b & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Solution

4. *4ème solution : une astuce pas à retenir*

On introduit le déterminant d'ordre n : $\Delta_{a,b,c}(X) = \begin{vmatrix} a+X & & c+X \\ & a+X & \\ & & \ddots & \\ b+X & & & a+X \end{vmatrix}$.

En soustrayant la 1ère ligne à toutes les autres puis en développant selon la 1ère ligne, il est facile de voir que $\Delta_{a,b,c}(X)$ est un polynôme en X de degré $\leqslant 1$.

Donc il existe α, β tels que $\Delta_{a,b,c}(X) = \alpha X + \beta$; on connaît $\Delta_{a,b,c}(-b) = (a-b)^n$ et $\Delta_{a,b,c}(-c) = (a-c)^n$ donc un calcul rapide donne, pour $b \neq c$:

$$\alpha = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{b-c} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

On a ensuite, en utilisant la continuité du déterminant par rapport à ses coefficients :

$$D_n = \Delta_{a,b,b}(0) = \lim_{c \to b} \Delta_{a,b,c}(0) = \lim_{c \to b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

Cette limite n'est autre que la dérivée en b de la fonction $c \mapsto c(a-b)^n - b(a-c)^n$; après calcul, on retrouve le résultat précédent.

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

1. *1ère façon :* en faisant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ pour i variant de n à 2 on obtient :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

1. *1ère façon :* en faisant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ pour i variant de n à 2 on obtient :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

soit : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) V(a_2, \dots, a_n)$,

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

1. *1ère façon :* en faisant les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ pour i variant de n à 2 on obtient :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

soit : $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) V(a_2, \dots, a_n)$, et il ne reste plus qu'à faire une récurrence sur $n \geqslant 2$ jusqu'à $V(a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}$.

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

2. *2ème façon :*
   En considérant $V(a_1, \ldots, a_n)$ comme une fonction en a_n, on voit, en développant (fictivement) le déterminant par rapport à la dernière ligne, qu'il s'agit d'un polynôme en a_n, de degré $\leqslant n-1$ et de coefficient dominant $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

2. *2ème façon :*

   En considérant $V(a_1, \ldots, a_n)$ comme une fonction en a_n, on voit, en développant (fictivement) le déterminant par rapport à la dernière ligne, qu'il s'agit d'un polynôme en a_n, de degré $\leqslant n-1$ et de coefficient dominant $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

   Or ce polynôme est nul dès que $a_n = a_i$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$ (car la matrice de Vandermonde a alors 2 lignes égales), donc les a_i ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) sont racines de $V(a_1, \ldots, a_n)$ considéré comme polynôme en a_n.

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

2. *2ème façon :*

   En considérant $V(a_1, \ldots, a_n)$ comme une fonction en a_n, on voit, en développant (fictivement) le déterminant par rapport à la dernière ligne, qu'il s'agit d'un polynôme en a_n, de degré $\leqslant n-1$ et de coefficient dominant $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

   Or ce polynôme est nul dès que $a_n = a_i$ pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$ (car la matrice de Vandermonde a alors 2 lignes égales), donc les a_i ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) sont racines de $V(a_1, \ldots, a_n)$ considéré comme polynôme en a_n.

   Si l'on suppose les a_i distincts, on a ainsi obtenu $n-1$ racines distinctes d'un polynôme de degré $\leqslant n-1$ donc, par factorisation de ce polynôme :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$$

Exemple 3 : *déterminant de VanderMonde*

Il s'agit du déterminant (d'ordre $n \geqslant 2$) : $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$. Nous allons montrer que :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Solution

2. *2ème façon :*

   En considérant $V(a_1, \ldots, a_n)$ comme une fonction en a_n, on voit, en développant (fictivement) le déterminant par rapport à la dernière ligne, qu'il s'agit d'un polynôme en a_n, de degré $\leqslant n-1$ et de coefficient dominant $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

   Or ce polynôme est nul dès que $a_n = a_i$ pour $i \in [\![1 ; n-1]\!]$ (car la matrice de Vandermonde a alors 2 lignes égales), donc les a_i ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) sont racines de $V(a_1, \ldots, a_n)$ considéré comme polynôme en a_n.

   Si l'on suppose les a_i distincts, on a ainsi obtenu $n-1$ racines distinctes d'un polynôme de degré $\leqslant n-1$ donc, par factorisation de ce polynôme :

   $$V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i)$$

   et là encore on conclut par récurrence (pour être complet, il faut ajouter que la formule reste vraie lorsque les a_i ne sont pas distincts, car alors le déterminant est nul).

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donnés $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $n+1$ scalaires (non nécessairement distincts) $b_0, b_1, \dots, b_n$, on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donnés $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $n+1$ scalaires (non nécessairement distincts) $b_0, b_1, \ldots, b_n$, on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Si l'on écrit ce polynôme dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, sous la forme

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j X^j \,,$$

déterminer P revient à résoudre le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les λ_j) suivant :

$$\forall\, i \in [\![0\,;n+1]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_i^j = b_i \,.$$

Lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange

Étant donnés $n+1$ scalaires **deux à deux distincts** $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $n+1$ scalaires (non nécessairement distincts) $b_0, b_1, \dots, b_n$, on sait qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Si l'on écrit ce polynôme dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, sous la forme

$$P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j X^j \,,$$

déterminer P revient à résoudre le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les λ_j) suivant :

$$\forall\, i \in [\![0\,;n+1]\!],\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_i^j = b_i \,.$$

Or la matrice de ce système n'est autre que la matrice de Vandermonde $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$; puisque cette matrice est inversible, le système possède une et une seule solution, ce qui redémontre l'existence et l'unicité du polynôme P.

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2 \, .$$

Solution

1ère façon (déjà vue) :

On applique bêtement les formules vues dans le chapitre 2 : on écrit les polynômes d'interpolation de Lagrange élémentaires pour les points $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ et $a_3 = -1$:

$$L_0 = \frac{(X-2)(X+2)(X+1)}{(-2)\times 2\times 1} = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + X + 1$$

$$L_1 = \frac{X(X+2)(X+1)}{2\times 4\times 3} = \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{12}X$$

$$L_2 = \frac{X(X-2)(X+1)}{(-2)\times [-4)\times (-1)} = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{4}X$$

$$L_3 = \frac{X(X-2)(X+2)}{(-1)\times (-3)\times 1} = \frac{1}{3}X^3 - \frac{4}{3}X$$

Donc $P = -L_0 + L_1 + L_2 + 2L_3 = \dfrac{5}{6}X^3 + \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{10}{3}X - 1.$

Exercice

Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1 \quad , \quad P(2) = 1 \quad , \quad P(-2) = 1 \quad \text{et} \quad P(-1) = 2\,.$$

Solution (suite)

2ème façon, résolution d'un système

On écrit le polynôme cherché sous la forme $P = x + yX + zX^2 + tX^3$. Les quatre égalités données sont équivalentes au système :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + 4z + 8t = 1 \\ x - 2y + 4z - 8t = 1 \\ x - y + z - t = 2 \end{cases}$$

qui est ici très facile à résoudre.

ORIENTATION D'UN $\mathbb{R}$-ESPACE VECTORIEL

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5

Dans l'ensemble des bases de E, on définit une relation binaire par :

$$\mathscr{B} \,\mathfrak{R}\, \mathscr{B}' \iff \det\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} > 0\,.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement **deux** classes d'équivalence.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5

Dans l'ensemble des bases de E, on définit une relation binaire par :

$$\mathscr{B}\,\mathfrak{R}\,\mathscr{B}' \iff \det\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} > 0\,.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement **deux** classes d'équivalence.

Démonstration

1.
- La réflexivité est évidente : on a $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}$ pour toute base $\mathscr{B}$ puisque $P = I_n$ dans ce cas.
- La relation est symétrique : si $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}'$ alors $\mathscr{B}'\mathfrak{R}\mathscr{B}$ puisque $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}$.
- La relation est transitive : si $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'\mathfrak{R}\mathscr{B}''$ alors $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}''$ puisque $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$.

Donc $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5

Dans l'ensemble des bases de E, on définit une relation binaire par :

$$\mathscr{B}\,\mathfrak{R}\,\mathscr{B}' \iff \det\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} > 0\,.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement **deux** classes d'équivalence.

Démonstration

1.
   - La réflexivité est évidente : on a $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}$ pour toute base $\mathscr{B}$ puisque $P = I_n$ dans ce cas.
   - La relation est symétrique : si $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}'$ alors $\mathscr{B}'\mathfrak{R}\mathscr{B}$ puisque $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}$.
   - La relation est transitive : si $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'\mathfrak{R}\mathscr{B}''$ alors $\mathscr{B}\mathfrak{R}\mathscr{B}''$ puisque $\mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$.

   Donc $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

2. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base, $\mathscr{B}$ est en relation avec elle-même mais pas avec $\mathscr{B}' = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

   Donc il y a au moins 2 classes d'équivalence. Et si $\mathscr{B}''$ est une autre base, si elle n'est pas en relation avec $\mathscr{B}$ elle est forcément en relation avec $\mathscr{B}'$ (car $\mathrm{P}_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$).
   Il n'y a donc que ces deux classes d'équivalence.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$), et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Puisque P est une matrice inversible, on a $\det P \neq 0$, et puisque le corps de base est $\mathbb{R}$, on a forcément $\det P > 0$ ou $\det P < 0$. Cela conduit à la notion suivante :

Théorème 5

Dans l'ensemble des bases de E, on définit une relation binaire par :

$$\mathscr{B} \,\mathfrak{R}\, \mathscr{B}' \iff \det \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} > 0\,.$$

Cette relation est une relation d'équivalence ; de plus, il y a exactement **deux** classes d'équivalence.

Définition 5

Orienter l'espace vectoriel E, c'est choisir une des deux classes d'équivalence, que l'on appelle classe des bases directes, l'autre étant alors appelée classe des bases indirectes. (il n'y a que deux orientations possibles).

FIN DU CHAPITRE V