

Chapitre VI : Espaces préhilbertiens réels

PSI*

Octobre 2022

Lycée d'Arsonval

Dans ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$.

PRODUIT SCALAIRE

Définitions - Exemples

Définition 1

Une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune des deux variables, c'est-à-dire telle que :

- a) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .
- b) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .

Définitions - Exemples

Définition 1

Une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune des deux variables, c'est-à-dire telle que :

- a) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .
- b) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .

Pour vérifier qu'une application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, il faut donc vérifier :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

(linéarité par rapport à la 1ère variable), et :

Définitions - Exemples

Définition 1

Une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune des deux variables, c'est-à-dire telle que :

- a) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .
- b) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E .

Pour vérifier qu'une application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, il faut donc vérifier :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$$

(linéarité par rapport à la 1ère variable), et :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

(linéarité par rapport à la 2ème variable).

Définition 2

Une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Définition 2

Une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque : Si φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, symétrique et linéaire d'un côté, elle est bilinéaire.

Définition 2

Une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque : Si φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, symétrique et linéaire d'un côté, elle est bilinéaire.

Définition 3

On appelle produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E une forme bilinéaire symétrique φ qui est de plus :

- positive, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$.
- et définie, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$.

Dire que φ est définie positive peut aussi s'écrire : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$.

Définition 2

Une application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque : Si φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, symétrique et linéaire d'un côté, elle est bilinéaire.

Définition 3

On appelle produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E une forme bilinéaire symétrique φ qui est de plus :

- positive, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$.
- et définie, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$.

Dire que φ est définie positive peut aussi s'écrire : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$.

Définition 4

Si φ est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , le couple (E, φ) s'appelle un espace préhilbertien réel.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y se note en général : $\varphi(x, y) = (x|y)$ ou $\langle x | y \rangle$ ou $\langle x, y \rangle$.

Exemples de référence

❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Exemples de référence

❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Démonstration

- L'application $\varphi: (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est bien définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Démonstration

- L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est bien définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Il est clair que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$: φ est symétrique.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Démonstration

- L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est bien définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Il est clair que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$: φ est symétrique.
- À y fixé, chaque application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ (forme linéaire coordonnée) donc l'application partielle $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire comme combinaison linéaire de formes linéaires. Puisqu'elle est symétrique, φ est donc bilinéaire.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Démonstration

- L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est bien définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Il est clair que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$: φ est symétrique.
- À y fixé, chaque application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ (forme linéaire coordonnée) donc l'application partielle $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire comme combinaison linéaire de formes linéaires.
Puisqu'elle est symétrique, φ est donc bilinéaire.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est un nombre réel positif, donc φ est positive.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration du fait qu'il s'agit bien d'un produit scalaire est élémentaire.

Démonstration

- L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est bien définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Il est clair que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$: φ est symétrique.
- À y fixé, chaque application $x \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ (forme linéaire coordonnée) donc l'application partielle $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire comme combinaison linéaire de formes linéaires.
Puisqu'elle est symétrique, φ est donc bilinéaire.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est un nombre réel positif, donc φ est positive.
- Enfin, φ est définie puisque, si $\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ alors tous les x_i sont nuls (ce sont des réels !), donc x est nul.

Exemples de référence

❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : En notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(x_1 \dots x_n)^\top$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(y_1 \dots y_n)^\top$, on a aussi : $\langle x | y \rangle = X^\top Y = Y^\top X$.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : En notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(x_1 \ \dots \ x_n)^\top$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(y_1 \ \dots \ y_n)^\top$, on a aussi : $\boxed{\langle x | y \rangle = X^\top Y = Y^\top X.}$

- ❷ De façon plus générale, si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans cette base, on définit un produit scalaire sur E en posant : $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : En notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(x_1 \dots x_n)^\top$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(y_1 \dots y_n)^\top$, on a aussi : $\langle x | y \rangle = X^\top Y = Y^\top X$.

- ❷ De façon plus générale, si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans cette base, on définit un produit scalaire sur E en posant : $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- ❸ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples de référence

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : En notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(x_1 \dots x_n)^\top$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne $(y_1 \dots y_n)^\top$, on a aussi : $\langle x | y \rangle = X^\top Y = Y^\top X$.

- ❷ De façon plus générale, si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si x et y sont deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans cette base, on définit un produit scalaire sur E en posant : $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- ❸ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La démonstration du fait qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de temps en temps demandée aux concours, il faut donc la connaître.

8 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

8 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

• Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

- 8 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

- Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

$$\text{d'où : } \text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki},$$

8 Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

• Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

d'où : $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$, ce qui après changement d'indices donne la formule annoncée.

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

- Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

d'où : $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$, ce qui après changement d'indices donne la formule annoncée.

- L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, et est symétrique puisque $\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top A)$ (on peut aussi utiliser l'égalité démontrée précédemment).

- ➊ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

- Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

d'où : $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$, ce qui après changement d'indices donne la formule annoncée.

- L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, et est symétrique puisque $\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top A)$ (on peut aussi utiliser l'égalité démontrée précédemment).
- L'application partielle $A \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est linéaire, par linéarité de la transposition et de la trace (ceux qui ne sont pas convaincus calculeront $\text{tr}((\lambda A + A')^\top B) = \dots$)

Étant linéaire à gauche et symétrique, elle est bilinéaire.

- ➊ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

- Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

d'où : $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$, ce qui après changement d'indices donne la formule annoncée.

- L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, et est symétrique puisque $\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top A)$ (on peut aussi utiliser l'égalité démontrée précédemment).
- L'application partielle $A \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est linéaire, par linéarité de la transposition et de la trace (ceux qui ne sont pas convaincus calculeront $\text{tr}((\lambda A + A')^\top B) = \dots$)

Étant linéaire à gauche et symétrique, elle est bilinéaire.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A | A \rangle = \text{tr}(A^\top A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$ est un réel positif, et s'il est nul, on a $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j)

donc $A = O_n$.

L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est donc définie positive, et finalement, c'est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ➊ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit un produit scalaire par :

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Démonstration

- Déjà on a, en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, (A^\top B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

d'où : $\text{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^n (A^\top B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}$, ce qui après changement d'indices donne la formule annoncée.

- L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$, et est symétrique puisque $\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top A)$ (on peut aussi utiliser l'égalité démontrée précédemment).
- L'application partielle $A \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est linéaire, par linéarité de la transposition et de la trace (ceux qui ne sont pas convaincus calculeront $\text{tr}((\lambda A + A')^\top B) = \dots$)

Étant linéaire à gauche et symétrique, elle est bilinéaire.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A | A \rangle = \text{tr}(A^\top A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$ est un réel positif, et s'il est nul, on a $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j)

donc $A = O_n$.

L'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$ est donc définie positive, et finalement, c'est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Plus rapidement, on pouvait remarquer que, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, les a_{ij} sont les coordonnées de A dans la base canonique (E_{ij}) , donc la définition ci-dessus est la même que celle de l'exemple 2 (somme des produits deux à deux des coordonnées, avec ici un espace vectoriel de dimension n^2).

Exemples de référence (suite)

❖ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemples de référence (suite)

✱ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration

Démonstration tout à fait similaire à celle pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Exemples de référence (suite)

- ④ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

- ⑤ Dans l'ensemble $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ on peut définir un produit scalaire par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Exemples de référence (suite)

- ❖ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

- ❖ Dans l'ensemble $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ on peut définir un produit scalaire par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Démonstration

Le caractère bilinéaire symétrique ne pose pas de problème.

Exemples de référence (suite)

- ④ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

- ⑤ Dans l'ensemble $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ on peut définir un produit scalaire par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Démonstration

Le caractère bilinéaire symétrique ne pose pas de problème.

Le caractère positif non plus.

Exemples de référence (suite)

❖ Dans $\mathbb{R}[X]$, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$, on pose : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{\min(n,p)} a_k b_k$.

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$.

❖ Dans l'ensemble $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ on peut définir un produit scalaire par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Démonstration

Le caractère bilinéaire symétrique ne pose pas de problème.

Le caractère positif non plus.

Enfin, si f est une application continue telle que $\int_a^b f^2 = 0$ alors f est nulle sur $[a; b]$, puisque l'intégrale d'une fonction positive continue et non identiquement nulle est strictement positive (cf. théorème dans un chapitre d'intégration).

Norme associée à un produit scalaire

Définition 5

Si E est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on appelle norme (euclidienne) associée l'application :

$$N : x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

(cela a bien un sens car $\langle x | x \rangle \geq 0$).

Norme associée à un produit scalaire

Définition 5

Si E est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on appelle norme (euclidienne) associée l'application :

$$N : x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

(cela a bien un sens car $\langle x | x \rangle \geq 0$).

Exemples

❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Norme associée à un produit scalaire

Définition 5

Si E est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on appelle norme (euclidienne) associée l'application :

$$N : x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

(cela a bien un sens car $\langle x | x \rangle \geq 0$).

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- ❷ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a : $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$.

Norme associée à un produit scalaire

Définition 5

Si E est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$, on appelle norme (euclidienne) associée l'application :

$$N : x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

(cela a bien un sens car $\langle x | x \rangle \geq 0$).

Exemples

❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ on a : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

❷ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a :

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}.$$

❸ Dans l'ensemble $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ muni du produit scalaire vu ci-dessus, on aura : $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$.

Propriétés

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$$

Propriétés

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E .$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| .$$

Propriétés

- ❶ $\forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$
- ❷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
- ❸ Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Propriétés

❶ $\forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$

❷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

❸ Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Si x est un vecteur non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Propriétés

❶ $\forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$

❷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

❸ Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Si x est un vecteur non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

❹ $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$

Propriétés

❶ $\forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$

❷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

❸ Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Si x est un vecteur non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

❹ $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$

❺ **Identité de polarisation :** $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$

Propriétés

❶ $\forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$

❷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

❸ Un vecteur x est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Si x est un vecteur non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

❹ $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$

❺ **Identité de polarisation :** $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$

❻ $\forall (x, y) \in E^2, \langle x + y | x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$

Propriétés

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in E, \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E.$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Un vecteur } x \text{ est dit unitaire si } \|x\| = 1.$$

Si x est un vecteur non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

$$\textcircled{4} \quad \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2.$$

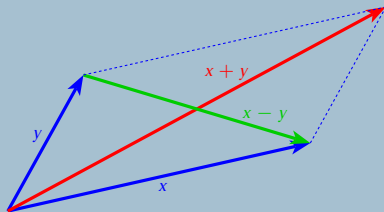
$$\textcircled{5} \quad \textbf{Identité de polarisation : } \forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

$$\textcircled{6} \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle x + y | x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

$$\textcircled{7} \quad \textbf{Identité du parallélogramme :}$$

$$\forall (x, y) \in E^2,$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- 1ère démonstration

Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- 1^{ère} démonstration

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.

Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- **1ère démonstration**

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- 1^{ère} démonstration

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Or $\|x + ty\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|x\|^2$. Il s'agit là d'un trinôme en t (car le coefficient de t^2 , $\|y\|^2$ est ici non nul);

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **1ère démonstration**

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Or $\|x + ty\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|x\|^2$. Il s'agit là d'un trinôme en t (car le coefficient de t^2 , $\|y\|^2$ est ici non nul); puisque ce trinôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif; cela donne : $\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, d'où l'inégalité cherchée.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **1ère démonstration**

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Or $\|x + ty\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|x\|^2$. Il s'agit là d'un trinôme en t (car le coefficient de t^2 , $\|y\|^2$ est ici non nul); puisque ce trinôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif; cela donne : $\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, d'où l'inégalité cherchée.

- Supposons qu'il y ait égalité :
 - si $y = 0$, la famille $\{x, y\}$ est bien liée.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **1ère démonstration**

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Or $\|x + ty\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|x\|^2$. Il s'agit là d'un trinôme en t (car le coefficient de t^2 , $\|y\|^2$ est ici non nul); puisque ce trinôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif; cela donne :

$$\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0, \text{ d'où l'inégalité cherchée.}$$

- Supposons qu'il y ait égalité :
 - si $y = 0$, la famille $\{x, y\}$ est bien liée.
 - sinon, cela signifie que le trinôme précédent a un discriminant nul, donc possède une racine double t_0 ; on aura alors $\|x + t_0 y\|^2 = 0$, d'où $x + t_0 y = 0$ et x est bien colinéaire à y .

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

● 1ère démonstration

- Si $y = 0$, le résultat est immédiat.
- Sinon, on écrit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le réel $\|x + ty\|^2$ est positif.

Or $\|x + ty\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + \|x\|^2$. Il s'agit là d'un trinôme en t (car le coefficient de t^2 , $\|y\|^2$ est ici non nul); puisque ce trinôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif; cela donne : $\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$, d'où l'inégalité cherchée.

- Supposons qu'il y ait égalité :
 - si $y = 0$, la famille $\{x, y\}$ est bien liée.
 - sinon, cela signifie que le trinôme précédent a un discriminant nul, donc possède une racine double t_0 ; on aura alors $\|x + t_0 y\|^2 = 0$, d'où $x + t_0 y = 0$ et x est bien colinéaire à y .
- Pour terminer, il est facile de vérifier directement que, si la famille $\{x, y\}$ est liée, il y a bien égalité.

Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- 2ème démonstration

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration

- 2ème démonstration

Dans le cas non trivial où x et y sont non nuls, on écrit que : $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ et en développant on trouve les deux inégalités voulues. Par exemple :

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **2ème démonstration**

Dans le cas non trivial où x et y sont non nuls, on écrit que : $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ et en développant on trouve les deux inégalités voulues. Par exemple :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{x}{\|x\|} \middle| \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 2 \left(1 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **2ème démonstration**

Dans le cas non trivial où x et y sont non nuls, on écrit que : $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ et en développant on trouve les deux inégalités voulues. Par exemple :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{x}{\|x\|} \left| \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 2 \left(1 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

donc la relation $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ implique $\langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\|$.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **2ème démonstration**

Dans le cas non trivial où x et y sont non nuls, on écrit que : $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ et en développant on trouve les deux inégalités voulues. Par exemple :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{x}{\|x\|} \left| \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 2 \left(1 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

donc la relation $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ implique $\langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\|$.

De la même façon, la relation $\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ implique $-\langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\|$, et en réunissant les deux résultats, on obtient l'inégalité cherchée.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Démonstration● **2ème démonstration**

Dans le cas non trivial où x et y sont non nuls, on écrit que : $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ et en développant on trouve les deux inégalités voulues. Par exemple :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 - 2 \left\langle \frac{x}{\|x\|} \left| \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = 2 \left(1 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$$

donc la relation $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ implique $\langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\|$.

De la même façon, la relation $\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \geq 0$ implique $-\langle x | y \rangle \leq \|x\| \|y\|$, et en réunissant les deux résultats, on obtient l'inégalité cherchée.

Et ce qui précède montre qu'il y a égalité si et seulement si $\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 0$, ce qui entraîne $\frac{x}{\|x\|} = \pm \frac{y}{\|y\|}$ donc $\{x, y\}$ lié.

Théorème 1: *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: *Inégalité triangulaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Démonstration

$$\bullet \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2 \leq \underbrace{\|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2}_{\text{C.S}} = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Démonstration

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2 \underset{\text{C.S}}{\leq} \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$
- Il y a égalité si et seulement si $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$, ce qui équivaut à dire qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz **et que** le produit scalaire $\langle x | y \rangle$ est positif, d'où le résultat.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Corollaire:

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Corollaire:

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

Démonstration

En appliquant l'inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$ on obtient :

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|,$$

soit : $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Corollaire:

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

Démonstration

En appliquant l'inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$ on obtient :

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|,$$

soit : $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$.

De la même façon, en échangeant les rôles de x et y , on obtient : $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$.

Théorème 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si le système $\{x, y\}$ est lié.

Corollaire: Inégalité triangulaire

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

et il y a égalité si et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée (c'est-à-dire qu'il existe un réel λ **positif** tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Corollaire:

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tous x, y dans E on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

Démonstration

En appliquant l'inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$ on obtient :

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|,$$

soit : $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$

De la même façon, en échangeant les rôles de x et y , on obtient : $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|.$

La juxtaposition de ces deux résultats donne bien l'inégalité voulue.

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

- ❷ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$|\operatorname{tr}(A^T B)| \leq \sqrt{A^T A} \sqrt{B^T B}.$$

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

- ❷ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$|\operatorname{tr}(A^T B)| \leq \sqrt{A^T A} \sqrt{B^T B}.$$

- ❸ Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur le segment $[a; b]$ muni du produit scalaire usuel, si $f, g \in E$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

ORTHOGONALITÉ

Orthogonal d'une partie

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Définition 7

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à **tous** les vecteurs de A .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A , noté $A^\perp$. Ainsi :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Définition 7

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à **tous** les vecteurs de A .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A , noté $A^\perp$. Ainsi :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

Théorème 2

Si x est un vecteur non nul de E , alors $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E .

Un supplémentaire en est la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$.

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Définition 7

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à **tous** les vecteurs de A .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A , noté $A^\perp$. Ainsi :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

Théorème 2

Si x est un vecteur non nul de E , alors $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E .

Un supplémentaire en est la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$.

Démonstration

- L'application $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire (par définition du produit scalaire euclidien ou hermitien),
 $y \longmapsto \langle x | y \rangle$
 non nulle (car $\varphi_x(x) = \|x\|^2 \neq 0$).

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Définition 7

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à **tous** les vecteurs de A .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A , noté $A^\perp$. Ainsi :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

Théorème 2

Si x est un vecteur non nul de E , alors $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E .

Un supplémentaire en est la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$.

Démonstration

- L'application $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire (par définition du produit scalaire euclidien ou hermitien),
 $y \longmapsto \langle x | y \rangle$
 non nulle (car $\varphi_x(x) = \|x\|^2 \neq 0$). $\{x\}^\perp$ en est le noyau, c'est donc un hyperplan.

Orthogonal d'une partie

Définition 6

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, lorsque $\langle x | y \rangle = 0$.

Remarque : $\langle x | y \rangle = 0 \iff \langle y | x \rangle = 0$. La relation d'orthogonalité est donc symétrique.

Définition 7

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

Un vecteur x de E est dit orthogonal à A si il est orthogonal à **tous** les vecteurs de A .

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A s'appelle l'orthogonal de A , noté $A^\perp$. Ainsi :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

Théorème 2

Si x est un vecteur non nul de E , alors $\{x\}^\perp$ est un hyperplan de E .

Un supplémentaire en est la droite vectorielle $\mathbb{K}.x$.

Démonstration

- L'application $\varphi_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire (par définition du produit scalaire euclidien ou hermitien),
 $y \longmapsto \langle x | y \rangle$
 non nulle (car $\varphi_x(x) = \|x\|^2 \neq 0$). $\{x\}^\perp$ en est le noyau, c'est donc un hyperplan.
- La droite vectorielle $\mathbb{K}.x$ n'est pas incluse dans $\{x\}^\perp$ (car x orthogonal à x implique $x = 0$), donc en est un supplémentaire d'après le cours sur les hyperplans.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration

- $0_E \in A^\perp$ puisque $\langle 0 | a \rangle = 0$ pour tout $a \in A$;

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration

- $0_E \in A^\perp$ puisque $\langle 0 | a \rangle = 0$ pour tout $a \in A$;
- Si x et y appartiennent à $A^\perp$, alors pour tout $a \in A$, $\langle x | a \rangle = \langle y | a \rangle = 0$ donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + y | a \rangle = 0$ d'où $\lambda x + y \in A^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration

- $0_E \in A^\perp$ puisque $\langle 0 | a \rangle = 0$ pour tout $a \in A$;
- Si x et y appartiennent à $A^\perp$, alors pour tout $a \in A$, $\langle x | a \rangle = \langle y | a \rangle = 0$ donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x + y | a \rangle = 0$ d'où $\lambda x + y \in A^\perp$.

On pouvait aussi écrire : $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$ et utiliser le théorème précédent puisque l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;

Démonstration

• Soit $y \in E^\perp$; alors pour tout $x \in E$ on a $\langle y | x \rangle = 0$; en particulier, on a $\langle y | y \rangle = 0$ d'où $y = 0$; cela montre l'inclusion $E^\perp \subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;

Démonstration

- Soit $y \in E^\perp$; alors pour tout $x \in E$ on a $\langle y | x \rangle = 0$; en particulier, on a $\langle y | y \rangle = 0$ d'où $y = 0$; cela montre l'inclusion $E^\perp \subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente.
- Tout vecteur x est orthogonal à 0, donc $E \subset \{0\}^\perp \subset E$, d'où la deuxième égalité.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;

Démonstration

Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Soit alors $x \in B^\perp$. Pour tout $b \in B$, $\langle x | b \rangle = 0$. En particulier, pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $\langle x | a \rangle = 0$. D'où $x \in A^\perp$ et l'inclusion s'ensuit.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Démonstration

- Soit $F = \text{Vect}(A)$. $A \subset F$ donc d'après la propriété n°2, $F^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Démonstration

- Soit $F = \text{Vect}(A)$. $A \subset F$ donc d'après la propriété n°2, $F^\perp \subset A^\perp$.
- Réciproquement, soit $x \in A^\perp$ et $y \in F$. Puisque $F = \text{Vect}(A)$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Démonstration

- Soit $F = \text{Vect}(A)$. $A \subset F$ donc d'après la propriété n°2, $F^\perp \subset A^\perp$.
- Réciproquement, soit $x \in A^\perp$ et $y \in F$. Puisque $F = \text{Vect}(A)$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$. On a alors $\langle x | y \rangle = \left\langle x \left| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x | a_i \rangle$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Démonstration

- Soit $F = \text{Vect}(A)$. $A \subset F$ donc d'après la propriété n°2, $F^\perp \subset A^\perp$.
- Réciproquement, soit $x \in A^\perp$ et $y \in F$. Puisque $F = \text{Vect}(A)$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$. On a alors $\langle x | y \rangle = \left\langle x \left| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x | a_i \rangle$. Or $\langle x | a_i \rangle = 0$ pour tout i puisque $a_i \in A$ et $x \in A^\perp$. Donc $\langle x | y \rangle = 0$ et ce pour tout $y \in F$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;

Démonstration

- Soit $F = \text{Vect}(A)$. $A \subset F$ donc d'après la propriété n°2, $F^\perp \subset A^\perp$.
- Réciproquement, soit $x \in A^\perp$ et $y \in F$. Puisque $F = \text{Vect}(A)$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$. On a alors $\langle x | y \rangle = \left\langle x \left| \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x | a_i \rangle$. Or $\langle x | a_i \rangle = 0$ pour tout i puisque $a_i \in A$ et $x \in A^\perp$. Donc $\langle x | y \rangle = 0$ et ce pour tout $y \in F$. Ainsi, $x \in F^\perp$, ce qui prouve l'inclusion $A^\perp \subset F^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;
- ❹ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset (A^\perp)^\perp$;

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;
- ❹ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset (A^\perp)^\perp$;

Démonstration

Soit $a \in A$. Pour tout $b \in A^\perp$, $\langle a | b \rangle = 0$ donc $a \perp b$ donc $a \in (A^\perp)^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;
- ❹ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset (A^\perp)^\perp$;
- ❺ Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;
- ❹ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset (A^\perp)^\perp$;
- ❺ Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Démonstration

- Déjà, les inclusions $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ impliquent d'après la propriété n°2, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Proposition 1

Si A est une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Propriétés

- ❶ $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$;
- ❷ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$;
- ❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$; il en résulte que, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F , un vecteur x appartient à $F^\perp$ si et seulement si pour tout $i \in I$ on a $\langle x | f_i \rangle = 0$;
- ❹ $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset (A^\perp)^\perp$;
- ❺ Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Démonstration

- Déjà, les inclusions $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ impliquent d'après la propriété n°2, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
- Ensuite, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors x est orthogonal à tout vecteur de F et de G , donc par linéarité il est orthogonal à tout vecteur de $F + G$, ce qui donne l'inclusion réciproque.

Définition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

Cela équivaut à : $F \subset G^\perp$ et/ou $G \subset F^\perp$.

Définition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

Cela équivaut à : $F \subset G^\perp$ et/ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . On suppose que l'on dispose d'une base $(f_i)_{i \in I}$ de F et d'une base $(g_j)_{j \in J}$ de G .

Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(i, j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.

Définition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

Cela équivaut à : $F \subset G^\perp$ et/ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . On suppose que l'on dispose d'une base $(f_i)_{i \in I}$ de F et d'une base $(g_j)_{j \in J}$ de G .

Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(i, j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.

Démonstration

- Si $F \perp G$ alors tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G , donc en particulier les f_i sont orthogonaux aux g_j .

Définition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

Cela équivaut à : $F \subset G^\perp$ et/ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . On suppose que l'on dispose d'une base $(f_i)_{i \in I}$ de F et d'une base $(g_j)_{j \in J}$ de G .

Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(i, j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.

Démonstration

- Si $F \perp G$ alors tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G , donc en particulier les f_i sont orthogonaux aux g_j .
- Réciproquement, si les f_i sont orthogonaux aux g_j , alors pour toutes familles de réels (λ_i) et (μ_j) à support fini on a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i f_i \mid \sum_{j \in J} \mu_j g_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_i \mu_j \langle f_i | g_j \rangle = 0$$

Définition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E .

On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et on note $F \perp G$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad \langle x | y \rangle = 0,$$

autrement dit lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G .

Cela équivaut à : $F \subset G^\perp$ et/ou $G \subset F^\perp$.

Proposition 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . On suppose que l'on dispose d'une base $(f_i)_{i \in I}$ de F et d'une base $(g_j)_{j \in J}$ de G .

Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(i, j) \in I \times J$, $f_i \perp g_j$.

Démonstration

- Si $F \perp G$ alors tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G , donc en particulier les f_i sont orthogonaux aux g_j .
- Réciproquement, si les f_i sont orthogonaux aux g_j , alors pour toutes familles de réels (λ_i) et (μ_j) à support fini on a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i f_i \mid \sum_{j \in J} \mu_j g_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_i \mu_j \langle f_i | g_j \rangle = 0$$

donc tout vecteur de $F = \text{Vect}(\{f_i, i \in I\})$ est orthogonal à tout vecteur de $G = \text{Vect}(\{g_j, j \in J\})$.

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.

Exemples

❶ Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.

Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, mais seulement $F^\perp \supset H$.

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.
Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, , mais seulement $F^\perp \supset H$.
- ❷ Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_2 + e_3)$. On n'a pas $F \perp G$ mais par contre $F^\perp \perp G^\perp$.
Les deux plans F et G sont alors dits **perpendiculaires**.

Exemples

- ① Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.
Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, mais seulement $F^\perp \supset H$.
- ② Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_2 + e_3)$. On n'a pas $F \perp G$ mais par contre $F^\perp \perp G^\perp$.
Les deux plans F et G sont alors dits **perpendiculaires**.



Les exemples précédents montrent qu'il faut faire attention à la terminologie employée. Ainsi, dire que F et G sont orthogonaux ne veut PAS dire que l'un est l'orthogonal de l'autre !

Exemples

- ① Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.
Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, mais seulement $F^\perp \supset H$.
- ② Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_2 + e_3)$. On n'a pas $F \perp G$ mais par contre $F^\perp \perp G^\perp$.
Les deux plans F et G sont alors dits **perpendiculaires**.



Les exemples précédents montrent qu'il faut faire attention à la terminologie employée. Ainsi, dire que F et G sont orthogonaux ne veut PAS dire que l'un est l'orthogonal de l'autre !

Proposition 3

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E , alors $F \cap G = \{0\}$.

Exemples

- ① Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit la droite $F = \mathbb{R}.e_3$ et le plan $G = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + 2e_2)$. Alors $F \perp G$. En fait, ici, $F^\perp = G$.
Si $H = \mathbb{R}.e_1$, on a aussi $F \perp H$, mais seulement $F^\perp \supset H$.
- ② Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3, e_2 + e_3)$. On n'a pas $F \perp G$ mais par contre $F^\perp \perp G^\perp$.
Les deux plans F et G sont alors dits **perpendiculaires**.



Les exemples précédents montrent qu'il faut faire attention à la terminologie employée. Ainsi, dire que F et G sont orthogonaux ne veut PAS dire que l'un est l'orthogonal de l'autre !

Proposition 3

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E , alors $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration

Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ est orthogonal à $x \in G$, donc $\langle x | x \rangle = 0$, donc $x = 0$.

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Définition 9

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Définition 9

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

Elle est dite orthonormée si, **en plus**, $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Définition 9

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

Elle est dite orthonormée si, **en plus**, $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Remarque : Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors la famille des vecteurs

$$\left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right)_{i \in I} \text{ est orthonormée.}$$

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Définition 9

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

Elle est dite orthonormée si, **en plus**, $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Remarque : Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors la famille des vecteurs

$$\left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right)_{i \in I} \text{ est orthonormée.}$$

Proposition 4: Relation de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel, alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2.$$

Familles orthogonales, orthonormales (ou orthonormées)

Définition 9

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E est dite orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i | x_j \rangle = 0.$$

Elle est dite orthonormée si, **en plus**, $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Remarque : Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors la famille des vecteurs

$$\left(\frac{x_i}{\|x_i\|} \right)_{i \in I} \text{ est orthonormée.}$$

Proposition 4: Relation de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale d'un espace préhilbertien réel, alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2.$$

Démonstration

En effet : $\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^p x_i \mid \sum_{i=1}^p x_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{i=1}^p \langle x_i | x_i \rangle$, puisque $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Découle directement de la relation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Découle directement de la relation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Théorème 4

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors cette famille est libre.

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Découle directement de la relation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Théorème 4

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors cette famille est libre.

Démonstration

En effet, si l'on a $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ (avec λ_i scalaires tous nuls sauf un nombre fini), alors, pour tout $j \in I$,

$$\left\langle x_j \left| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right. \right\rangle = 0, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i | x_j \rangle = 0 \text{ donc } \lambda_j \langle x_j | x_j \rangle = 0 \text{ d'où } \lambda_j = 0 \text{ puisque } \|x_j\| \neq 0.$$

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Découle directement de la relation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Théorème 4

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors cette famille est libre.

Démonstration

En effet, si l'on a $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ (avec λ_i scalaires tous nuls sauf un nombre fini), alors, pour tout $j \in I$,

$$\left\langle x_j \left| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right. \right\rangle = 0, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i | x_j \rangle = 0 \text{ donc } \lambda_j \langle x_j | x_j \rangle = 0 \text{ d'où } \lambda_j = 0 \text{ puisque } \|x_j\| \neq 0.$$

Corollaire:

| Toute famille orthonormée est libre.

Théorème 3: de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $x, y \in E$. Alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Découle directement de la relation : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$.

Théorème 4

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls**, alors cette famille est libre.

Démonstration

En effet, si l'on a $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ (avec λ_i scalaires tous nuls sauf un nombre fini), alors, pour tout $j \in I$,

$$\left\langle x_j \left| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right. \right\rangle = 0, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_j | x_i \rangle = 0 \text{ donc } \lambda_j \langle x_j | x_j \rangle = 0 \text{ d'où } \lambda_j = 0 \text{ puisque } \|x_j\| \neq 0.$$

Corollaire:

| Toute famille orthonormée est libre.

Exemple

Dans $E = \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle f | g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t) dt$, la famille de fonctions $f_n : t \mapsto \cos nt$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est orthonormée.

Orthogonalité en dimension finie

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$:

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- si $n = 1$, E est une droite vectorielle, et si $\{x\}$ en est une base, alors $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ en sera une base orthonormée.

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- si $n = 1$, E est une droite vectorielle, et si $\{x\}$ en est une base, alors $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ en sera une base orthonormée.
- Supposons le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $n - 1$, et soit E euclidien de dimension n .

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- si $n = 1$, E est une droite vectorielle, et si $\{x\}$ en est une base, alors $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ en sera une base orthonormée.

- Supposons le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $n - 1$, et soit E euclidien de dimension n .

Il existe dans E un vecteur unitaire e_n ; d'après le théorème 2, le sous-espace vectoriel $H = \{e_n\}^\perp$ est un hyperplan de E .

Orthogonalité en dimension finie

Définition 10

On appelle espace vectoriel euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Si E est un espace euclidien, on appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est aussi une famille orthonormée.

Remarque : En vertu du théorème 4, pour qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien forme une base orthonormée, il faut et il suffit que :

- la famille soit orthonormée, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j}$
- et que $n = \dim E$.

Théorème 5

Tout espace euclidien (non réduit à $\{0\}$) possède une base orthonormée.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- si $n = 1$, E est une droite vectorielle, et si $\{x\}$ en est une base, alors $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ en sera une base orthonormée.
- Supposons le résultat acquis pour tout espace euclidien de dimension $n - 1$, et soit E euclidien de dimension n .

Il existe dans E un vecteur unitaire e_n ; d'après le théorème 2, le sous-espace vectoriel $H = \{e_n\}^\perp$ est un hyperplan de E . D'après l'hypothèse de récurrence, H possède une base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n-1})$. Il est clair alors que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ sera orthonormée, donc sera une base orthonormée de E , ce qui achève la récurrence.

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, défini par :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

la base canonique est une base orthonormée.

Exemples

- ❶ Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, défini par :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

la base canonique est une base orthonormée.

- ❷ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par :

$$\text{si } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base orthonormée.

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 5

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E .

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $x_i = \langle e_i \mid x \rangle$.

Ainsi : $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle e_i \mid x \rangle e_i$.

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 5

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E .

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $x_i = \langle e_i \mid x \rangle$.

Ainsi : $\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i \mid x \rangle e_i.$

Démonstration

On a par définition des coordonnées : $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, compte tenu de la linéarité à droite du produit scalaire :

$$\langle e_i \mid x \rangle = \left\langle e_i \mid \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{\langle e_i \mid e_k \rangle}_{=\delta_{i,k}} = x_i.$$

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 5

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E .

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

Ainsi : $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$.

Soit E un espace euclidien muni d'une base **orthonormée** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et x, y deux vecteurs de E :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On notera aussi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes formées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y .

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 5

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E .

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

Ainsi : $\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i.$

Soit E un espace euclidien muni d'une base **orthonormée** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et x, y deux vecteurs de E :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On notera aussi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes formées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y .

$$\text{Par bilinéarité du produit scalaire : } \langle x | y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \left| \sum_{j=1}^n y_j e_j \right. \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{= \delta_{i,j}}$$

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée

Proposition 5

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E .

Les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'un vecteur x dans cette base sont données par : $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

Ainsi : $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$.

Soit E un espace euclidien muni d'une base **orthonormée** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et x, y deux vecteurs de E :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On notera aussi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes formées des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs x et y .

$$\text{Par bilinéarité du produit scalaire : } \langle x | y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}}$$

$$\text{donc : } \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y = Y^T X \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|x\|^2 = X^T X.$$

PROJECTIONS ORTHOGONALES

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

- $\textcircled{1}$ Le résultat étant évident si $F = \{0\}$, on supposera F de dimension $n \geqslant 1$. F possède alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

- $\textcircled{1}$ Le résultat étant évident si $F = \{0\}$, on supposera F de dimension $n \geq 1$. F possède alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $x \in E$. On cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, donc on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + z$.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

- $\textcircled{1}$ Le résultat étant évident si $F = \{0\}$, on supposera F de dimension $n \geq 1$. F possède alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $x \in E$. On cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, donc on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + z$.

Or $z \in F^\perp$ si et seulement si pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\langle e_j | z \rangle = 0$ ce qui équivaut à :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \left\langle e_j \left| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right. \right\rangle = 0 \text{ soit : } \langle e_j | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\langle e_j | e_i \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j.$$

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

- $\textcircled{1}$ Le résultat étant évident si $F = \{0\}$, on supposera F de dimension $n \geq 1$. F possède alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $x \in E$. On cherche à écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, donc on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + z$.

Or $z \in F^\perp$ si et seulement si pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\langle e_j | z \rangle = 0$ ce qui équivaut à :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \left\langle e_j \left| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right. \right\rangle = 0 \text{ soit : } \langle e_j | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\langle e_j | e_i \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j.$$

Ce qui précède démontre l'existence et l'unicité de la décomposition cherchée :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i \right)}_{\in F^\perp}.$$

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

$$\textcircled{2} \quad \text{On a déjà vu l'inclusion : } F \subset (F^\perp)^\perp.$$

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

$\textcircled{2}$ On a déjà vu l'inclusion : $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Réciproquement, soit $x \in (F^\perp)^\perp$. D'après le résultat précédent, x s'écrit de façon unique sous la forme

$x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

$\textcircled{2}$ On a déjà vu l'inclusion : $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Réciproquement, soit $x \in (F^\perp)^\perp$. D'après le résultat précédent, x s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Puisque $x \in (F^\perp)^\perp$ et $z \in F^\perp$, on a $\langle x | z \rangle = 0$ soit $\langle y | z \rangle + \langle z | z \rangle = 0$.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Démonstration

$\textcircled{2}$ On a déjà vu l'inclusion : $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Réciproquement, soit $x \in (F^\perp)^\perp$. D'après le résultat précédent, x s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Puisque $x \in (F^\perp)^\perp$ et $z \in F^\perp$, on a $\langle x | z \rangle = 0$ soit $\langle y | z \rangle + \langle z | z \rangle = 0$. Mais $\langle z | y \rangle = 0$ puisque $y \in F$ et $z \in F^\perp$ donc on en déduit $\langle z | z \rangle = 0$, d'où $z = 0$ et $x = y$ appartient à F , ce qui démontre l'inclusion $(F^\perp)^\perp \subset F$.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Corollaire:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien de dimension finie E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Corollaire:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien de dimension finie E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Démonstration

On a vu (propriétés de l'orthogonal d'une partie) que, si F' et G' sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $(F' + G')^\perp = F'^\perp \cap G'^\perp$. Il suffit d'appliquer ce résultat avec $F' = F^\perp$ et $G' = G^\perp$, en utilisant le deuxième résultat du théorème précédent.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$\textcircled{1} \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$\textcircled{2} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Corollaire:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien de dimension finie E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Théorème 7: Théorème de la base orthonormée incomplète

Si E est un espace préhilbertien de dimension finie, toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée.

Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E . Alors :

$$① \quad E = F \oplus F^\perp.$$

$$② \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.
 $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Corollaire:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien de dimension finie E on a :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Théorème 7: Théorème de la base orthonormée incomplète

Si E est un espace préhilbertien de dimension finie, toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée.

Démonstration

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée dans E , soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Il suffit alors de la compléter par une base orthonormée dans $F^\perp$ (il en existe d'après le théorème 5).

Projection orthogonale

Définition 12

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E . On appelle :

- projection orthogonale sur F , notée p_F , la projection sur F de direction $F^\perp$.
- symétrie orthogonale par rapport à F , notée s_F , la symétrie par rapport à F et de direction $F^\perp$.

Rappel : $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$.

Projection orthogonale

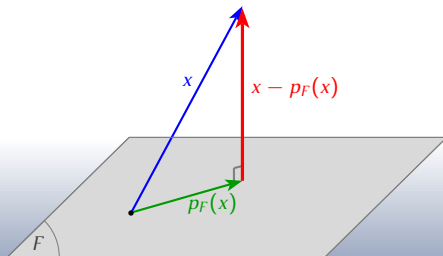
Définition 12

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E . On appelle :

- projection orthogonale sur F , notée p_F , la projection sur F de direction $F^\perp$.
- symétrie orthogonale par rapport à F , notée s_F , la symétrie par rapport à F et de direction $F^\perp$.

Rappel : $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$.

- On a, pour tout $x \in E$: $p_F(x) \perp x - p_F(x)$.
- Par définition d'une projection, $y = p_F(x)$ est l'unique vecteur de E vérifiant $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.



Théorème 8

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i .$$

Théorème 8

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i .$$

Démonstration

En effet on a vu dans la démonstration du théorème 6 que pour tout $x \in E$ on a :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i \right)}_{\in F^\perp} .$$

Le résultat découle alors de la définition de la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Théorème 8

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i .$$

Remarque : Si l'on connaît seulement une base **orthogonale** $(e_1, \dots, e_n)$ de F , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i | x \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

Théorème 8

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i .$$

Remarque : Si l'on connaît seulement une base **orthogonale** $(e_1, \dots, e_n)$ de F , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i | x \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

Remarque : Dans le cas particulier où H est un hyperplan, et si n est un vecteur orthogonal à H , la formule précédente donne le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathbb{K}.n$: $p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle n | x \rangle}{\|n\|^2} n$ d'où :

Théorème 8

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a, pour tout $x \in E$:

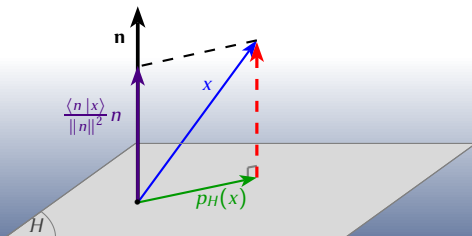
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i .$$

Remarque : Si l'on connaît seulement une base **orthogonale** $(e_1, \dots, e_n)$ de F , on a, pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle e_i | x \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

Remarque : Dans le cas particulier où H est un hyperplan, et si n est un vecteur orthogonal à H , la formule précédente donne le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathbb{K}.n$: $p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle n | x \rangle}{\|n\|^2} n$ d'où :

$$p_H(x) = x - \frac{\langle n | x \rangle}{\|n\|^2} n$$



Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Solution

Soit p la projection orthogonale sur le plan P et $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ celle sur la droite D orthogonale à P . D a pour base $n = (1, 1, 1)$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Solution

Soit p la projection orthogonale sur le plan P et $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ celle sur la droite D orthogonale à P . D a pour base $n = (1, 1, 1)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $q(u) = (x', y', z')$ son image par q . Trouver la matrice de q revient à trouver son expression analytique, c'est-à-dire à exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z .

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Solution

Soit p la projection orthogonale sur le plan P et $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ celle sur la droite D orthogonale à P . D a pour base $n = (1, 1, 1)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $q(u) = (x', y', z')$ son image par q . Trouver la matrice de q revient à trouver son expression analytique, c'est-à-dire à exprimer x' , y' et z' en fonction de x , y et z . D'après les formules ci-dessus :

$$q(u) = \frac{\langle n | u \rangle}{\|n\|^2} n = \frac{x + y + z}{3} n$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Solution

Soit p la projection orthogonale sur le plan P et $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ celle sur la droite D orthogonale à P . D a pour base $n = (1, 1, 1)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $q(u) = (x', y', z')$ son image par q . Trouver la matrice de q revient à trouver son expression analytique, c'est-à-dire à exprimer x' , y' et z' en fonction de x , y et z . D'après les formules ci-dessus :

$$q(u) = \frac{\langle n | u \rangle}{\|n\|^2} n = \frac{x + y + z}{3} n$$

donc on a

$$x' = \frac{x + y + z}{3} \quad ; \quad y' = \frac{x + y + z}{3} \quad ; \quad z' = \frac{x + y + z}{3}$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Solution

Soit p la projection orthogonale sur le plan P et $q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$ celle sur la droite D orthogonale à P . D a pour base $n = (1, 1, 1)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $q(u) = (x', y', z')$ son image par q . Trouver la matrice de q revient à trouver son expression analytique, c'est-à-dire à exprimer x' , y' et z' en fonction de x , y et z . D'après les formules ci-dessus :

$$q(u) = \frac{\langle n | u \rangle}{\|n\|^2} n = \frac{x + y + z}{3} n$$

donc on a

$$x' = \frac{x + y + z}{3} \quad ; \quad y' = \frac{x + y + z}{3} \quad ; \quad z' = \frac{x + y + z}{3}$$

Par suite la matrice de q est : $M(q) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et celle de p est

$$M(p) = I_3 - M(q) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Solution

- On remarque déjà que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (intersection d'hyperplans), et que c'est un plan (car le système d'équations est de rang 2, voir cours sur les formes linéaires).

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Solution

- On remarque déjà que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (intersection d'hyperplans), et que c'est un plan (car le système d'équations est de rang 2, voir cours sur les formes linéaires).
- Si s est la symétrie orthogonale par rapport au plan F , on a $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ où p est la projection orthogonale sur F . Il suffit donc de trouver la matrice de p .

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Solution

- On remarque déjà que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (intersection d'hyperplans), et que c'est un plan (car le système d'équations est de rang 2, voir cours sur les formes linéaires).
- Si s est la symétrie orthogonale par rapport au plan F , on a $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ où p est la projection orthogonale sur F . Il suffit donc de trouver la matrice de p .

En soustrayant les deux lignes, on trouve que le système définissant F est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases} . \text{ En choisissant } (x_3, x_4) = (1, 0) \text{ on trouve qu'un vecteur de } F \text{ est } u_1 = (1, -2, 1, 0).$$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Solution

- On remarque déjà que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (intersection d'hyperplans), et que c'est un plan (car le système d'équations est de rang 2, voir cours sur les formes linéaires).
- Si s est la symétrie orthogonale par rapport au plan F , on a $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ où p est la projection orthogonale sur F . Il suffit donc de trouver la matrice de p .

En soustrayant les deux lignes, on trouve que le système définissant F est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases} . \text{ En choisissant } (x_3, x_4) = (1, 0) \text{ on trouve qu'un vecteur de } F \text{ est } u_1 = (1, -2, 1, 0).$$

Pour trouver une base orthogonale de F il reste à trouver un vecteur $u_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de F qui est de plus orthogonal à u_1 donc qui vérifie les deux équations précédentes ainsi que l'équation $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Cela conduit à $6x_3 + 8x_4 = 0$. En prenant $x_4 = 3$ et $x_3 = -4$ on obtient $u_2 = (2, -1, -4, 3)$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F donné par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 .$$

Solution

- On remarque déjà que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (intersection d'hyperplans), et que c'est un plan (car le système d'équations est de rang 2, voir cours sur les formes linéaires).
- Si s est la symétrie orthogonale par rapport au plan F , on a $s = 2p - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ où p est la projection orthogonale sur F . Il suffit donc de trouver la matrice de p .

En soustrayant les deux lignes, on trouve que le système définissant F est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 \end{cases} . \text{ En choisissant } (x_3, x_4) = (1, 0) \text{ on trouve qu'un vecteur de } F \text{ est } u_1 = (1, -2, 1, 0).$$

Pour trouver une base orthogonale de F il reste à trouver un vecteur $u_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de F qui est de plus orthogonal à u_1 donc qui vérifie les deux équations précédentes ainsi que l'équation $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Cela conduit à $6x_3 + 8x_4 = 0$. En prenant $x_4 = 3$ et $x_3 = -4$ on obtient $u_2 = (2, -1, -4, 3)$.

On a ainsi trouvé une base orthogonale du plan F . Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ et si l'on note $p(x) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, les formules du cours donnent ;

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\langle u_1 | x \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2 | x \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} u_1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} u_2 \\ &= \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} (1, -2, 1, 0) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} (2, -1, -4, 3) . \end{aligned}$$

Solution (suite)

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\langle u_1 | x \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2 | x \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} u_1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} u_2 \\ &= \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} (1, -2, 1, 0) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} (2, -1, -4, 3). \end{aligned}$$

Solution (suite)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{\langle u_1 | x \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2 | x \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} u_1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} u_2 \\
 &= \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} (1, -2, 1, 0) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} (2, -1, -4, 3).
 \end{aligned}$$

On en tire les coordonnées de $p(x)$:

$$\begin{cases}
 x'_1 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 2 & = \frac{9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4}{30} \\
 x'_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot (-2) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-1) & = \frac{-12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4}{30} \\
 x'_3 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-4) & = \frac{-3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4}{30} \\
 x'_4 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 0 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 3 & = \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{10}
 \end{cases}$$

Solution (suite)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{\langle u_1 | x \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2 | x \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} u_1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} u_2 \\
 &= \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} (1, -2, 1, 0) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} (2, -1, -4, 3).
 \end{aligned}$$

On en tire les coordonnées de $p(x)$:

$$\begin{cases}
 x'_1 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 2 & = \frac{9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4}{30} \\
 x'_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot (-2) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-1) & = \frac{-12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4}{30} \\
 x'_3 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-4) & = \frac{-3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4}{30} \\
 x'_4 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 0 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 3 & = \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{10}
 \end{cases}$$

d'où la matrice de p : $M(p) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Solution (suite)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{\langle u_1 | x \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle u_2 | x \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} u_1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} u_2 \\
 &= \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} (1, -2, 1, 0) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} (2, -1, -4, 3).
 \end{aligned}$$

On en tire les coordonnées de $p(x)$:

$$\begin{cases}
 x'_1 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 2 & = \frac{9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4}{30} \\
 x'_2 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot (-2) + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-1) & = \frac{-12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4}{30} \\
 x'_3 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 1 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot (-4) & = \frac{-3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4}{30} \\
 x'_4 = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{6} \cdot 0 + \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{30} \cdot 3 & = \frac{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4}{10}
 \end{cases}$$

d'où la matrice de p : $M(p) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

et enfin celle de s : $M(s) = 2M(p) - I_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

Définition 13

Soit E un espace préhilbertien réel.

On appelle distance entre deux vecteurs x et y de E le réel

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Définition 13

Soit E un espace préhilbertien réel.

On appelle distance entre deux vecteurs x et y de E le réel

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Définition 14

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

si x est un vecteur de E , on appelle distance de x à A le réel :

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) , a \in A \} = \inf \{ \|x - a\| , a \in A \}$$

(cette borne inférieure existe bien car c'est celle d'une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$).

Définition 13

Soit E un espace préhilbertien réel.

On appelle distance entre deux vecteurs x et y de E le réel

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Définition 14

Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E .

si x est un vecteur de E , on appelle distance de x à A le réel :

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) , a \in A \} = \inf \{ \|x - a\| , a \in A \}$$

(cette borne inférieure existe bien car c'est celle d'une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$).

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, on a le résultat suivant :

Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Démonstration

- Déjà, cela a bien un sens de parler de la projection orthogonale p_F sur F : puisque F est de dimension finie, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

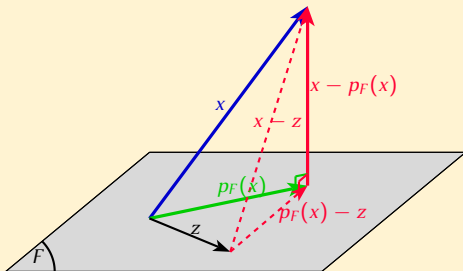
Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
 Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
 Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Démonstration

- Déjà, cela a bien un sens de parler de la projection orthogonale p_F sur F : puisque F est de dimension finie, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
- Soit z un vecteur quelconque de F . Puisque $x - p_F(x)$ appartient à $F^\perp$ (par définition de p_F) et que $p_F(x) - z$ appartient à F (car F sous-espace vectoriel), ces deux vecteurs sont orthogonaux donc d'après la relation de Pythagore :

$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2 \quad (*)$$



Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
 Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
 Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Démonstration

- Déjà, cela a bien un sens de parler de la projection orthogonale p_F sur F : puisque F est de dimension finie, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
- Soit z un vecteur quelconque de F . Puisque $x - p_F(x)$ appartient à $F^\perp$ (par définition de p_F) et que $p_F(x) - z$ appartient à F (car F sous-espace vectoriel), ces deux vecteurs sont orthogonaux donc d'après la relation de Pythagore :

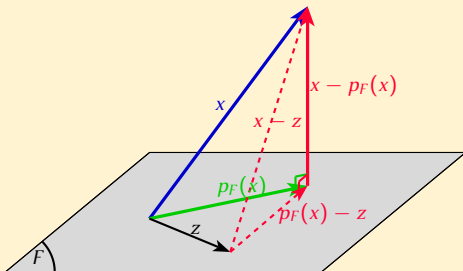
$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2 \quad (*)$$

On en déduit :

$$\forall z \in F, \|x - z\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

donc

$$\|x - p_F(x)\| \leq \inf \{\|x - z\|, z \in F\} = d(x, F).$$



Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
 Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
 Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Démonstration

- Déjà, cela a bien un sens de parler de la projection orthogonale p_F sur F : puisque F est de dimension finie, F et $F^\perp$ sont supplémentaires.
- Soit z un vecteur quelconque de F . Puisque $x - p_F(x)$ appartient à $F^\perp$ (par définition de p_F) et que $p_F(x) - z$ appartient à F (car F sous-espace vectoriel), ces deux vecteurs sont orthogonaux donc d'après la relation de Pythagore :

$$\|x - z\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - z\|^2 \quad (*)$$

On en déduit :

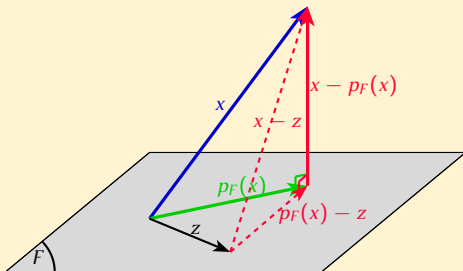
$$\forall z \in F, \|x - z\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

donc

$$\|x - p_F(x)\| \leq \inf \{ \|x - z\|, z \in F \} = d(x, F).$$

Mais comme $z = p_F(x)$ est aussi élément de F , cela implique $\|x - p_F(x)\| = \inf \{ \|x - z\|, z \in F \} = d(x, F)$.

- **Unicité** : S'il existe $z \in F$ tel que $d(x, z) = d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, alors la relation (*) implique $\|p_F(x) - z\|^2 = 0$ d'où $z = p_F(x)$.



Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Remarques

- ① En reprenant les mêmes notations, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on sait que
- $$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i.$$

Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .
 Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.
 Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Remarques

- ① En reprenant les mêmes notations, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on sait que
 $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$. On a donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle^2$ puis, d'après la relation de Pythagore (les vecteurs $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ étant orthogonaux),

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2,$$

Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .

Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Remarques

① En reprenant les mêmes notations, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on sait que

$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$. On a donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle^2$ puis, d'après la relation de Pythagore (les vecteurs $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ étant orthogonaux),

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2,$$

ce qui donne la formule :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle^2.$$

Théorème 9

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .

Pour tout $x \in E$ il existe un et un seul vecteur $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

Ce vecteur y est le projeté orthogonal de x sur F .

Remarques

① En reprenant les mêmes notations, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on sait que

$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$. On a donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle^2$ puis, d'après la relation de Pythagore (les vecteurs $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ étant orthogonaux),

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2,$$

ce qui donne la formule :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle^2.$$

② Dans le cas particulier où F est un hyperplan H , et si n est un vecteur orthogonal à H , on a vu que le projeté orthogonal de x sur la droite $\mathbb{K}.n$ est : $p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle n | x \rangle}{\|n\|^2} n$ d'où :

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_{H^\perp}(x)\| = \frac{|\langle n | x \rangle|}{\|n\|}.$$

(voir figure sur une page précédente).

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit le vecteur $u = (1, 1, 1, 3)$ et P le plan dont un système d'équations est :
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la distance de u à P .

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit le vecteur $u = (1, 1, 1, 3)$ et P le plan dont un système d'équations est :
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la distance de u à P .

Solution

Le système d'équations définissant P est équivalent à $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$ donc facilement, une base orthonormée de P est formée des vecteurs $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit le vecteur $u = (1, 1, 1, 3)$ et P le plan dont un système d'équations est :
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la distance de u à P .

Solution

Le système d'équations définissant P est équivalent à $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$ donc facilement, une base orthonormée de P est formée des vecteurs $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$.
Inutile ici de chercher la matrice de la projection orthogonale sur P ; on se contente d'appliquer bêtement la formule précédente :

$$d(x, P) = \sqrt{\|u\|^2 - \langle e_1 | u \rangle^2 - \langle e_2 | u \rangle^2} = \sqrt{12 - 1 - 1} = \sqrt{10}.$$

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Solution

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Solution

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Notons f l'application : $x \in]0; 1] \mapsto x \ln x$, prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et $f_{a,b,c}$ l'application : $x \in [0; 1] \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$.

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Solution

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Notons f l'application : $x \in]0; 1] \mapsto x \ln x$, prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et $f_{a,b,c}$ l'application : $x \in [0; 1] \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$.

Alors $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx = \|f - f_{a,b,c}\|^2$. Le minimum cherché est donc la distance au carré de la fonction f au sous-espace vectoriel F des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ (c'est bien un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, car engendré par les trois fonctions $x \mapsto x^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$).

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Solution

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Notons f l'application : $x \in]0; 1] \mapsto x \ln x$, prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et $f_{a,b,c}$ l'application : $x \in [0; 1] \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$.

Alors $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx = \|f - f_{a,b,c}\|^2$. Le minimum cherché est donc la distance au carré de la fonction f au sous-espace vectoriel F des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ (c'est bien un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, car engendré par les trois fonctions $x \mapsto x^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$). D'après le théorème 9, ce minimum existe et est atteint lorsque $f_{a,b,c}$ est le projeté orthogonal de la fonction f sur F .

Exercice

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx$ soit minimum, et calculer la valeur de ce minimum.

Solution

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Notons f l'application : $x \in]0; 1] \mapsto x \ln x$, prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et $f_{a,b,c}$ l'application : $x \in [0; 1] \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$.

Alors $\int_0^1 x^2 (\ln x - ax^2 - bx - c)^2 dx = \|f - f_{a,b,c}\|^2$. Le minimum cherché est donc la distance au carré de la fonction f au sous-espace vectoriel F des fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ (c'est bien un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, car engendré par les trois fonctions $x \mapsto x^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$). D'après le théorème 9, ce minimum existe et est atteint lorsque $f_{a,b,c}$ est le projeté orthogonal de la fonction f sur F .

Il ne reste plus qu'à chercher ce projeté. Nous n'allons pas ici utiliser la formule du cours, qui exige de connaître une base orthonormée de F . Il est plus rapide de revenir à la définition de la projection orthogonale, c'est-à-dire d'écrire que $f - f_{a,b,c}$ est orthogonal à F , donc orthogonal aux trois fonctions $x \mapsto x^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. Cela conduit aux équations :

Solution (suite)

$$\int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^3 \, dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^2 \, dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x \, dx = 0.$$

Solution (suite)

$$\int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^3 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^2 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x dx = 0.$$

On calcule d'abord, en intégrant par parties et par une récurrence simple :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Solution (suite)

$$\int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^3 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^2 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x dx = 0.$$

On calcule d'abord, en intégrant par parties et par une récurrence simple :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Le système des trois équations précédentes s'écrit alors :

$$\frac{a}{7} + \frac{b}{6} + \frac{c}{5} = -\frac{1}{25}, \quad \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = -\frac{1}{16}, \quad \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = -\frac{1}{9}.$$

On trouve après quelques calculs : $a = -\frac{7}{4}$, $b = 4$, $c = -\frac{137}{60}$.

Solution (suite)

$$\int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^3 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x^2 dx = \int_0^1 (x \ln x - ax^3 - bx^2 - cx)x dx = 0.$$

On calcule d'abord, en intégrant par parties et par une récurrence simple :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Le système des trois équations précédentes s'écrit alors :

$$\frac{a}{7} + \frac{b}{6} + \frac{c}{5} = -\frac{1}{25}, \quad \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = -\frac{1}{16}, \quad \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = -\frac{1}{9}.$$

On trouve après quelques calculs : $a = -\frac{7}{4}$, $b = 4$, $c = -\frac{137}{60}$.

Le minimum cherché vaut alors δ^2 où

$$\delta^2 = \|f - f_{a,b,c}\|^2 = \langle f - f_{a,b,c} | f - f_{a,b,c} \rangle \underbrace{=}_{\text{astuce!}} \langle f | f - f_{a,b,c} \rangle \text{ (car } f - f_{a,b,c} \in F^\perp \text{ donc est } \perp \text{ à } f_{a,b,c})$$

$$= \int_0^1 x \ln x (x \ln x - ax^3 - bx^2 + cx) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 (\ln x)^2 dx - a \int_0^1 x^4 \ln x dx - b \int_0^1 x^3 \ln x dx - c \int_0^1 x^2 \ln x dx = \frac{2}{27} + \frac{a}{25} + \frac{b}{16} + \frac{c}{9} = \frac{1}{2700}.$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Démonstration

On construit la suite $(e_k)_{k \in I}$ par récurrence sur k . Pour cela, on notera pour $k \in I$, $F_k = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$. On remarque que, puisque la famille (a_k) est libre, on a $\dim F_k = k$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Démonstration

On construit la suite $(e_k)_{k \in I}$ par récurrence sur k . Pour cela, on notera pour $k \in I$, $F_k = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$. On remarque que, puisque la famille (a_k) est libre, on a $\dim F_k = k$.

● La propriété est trivialement réalisée pour $k = 1$: e_1 est nécessairement égal à $\frac{a_1}{\|a_1\|}$ (ce qui est possible car $a_1 \neq 0$).

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Démonstration

On construit la suite $(e_k)_{k \in I}$ par récurrence sur k . Pour cela, on notera pour $k \in I$, $F_k = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$. On remarque que, puisque la famille (a_k) est libre, on a $\dim F_k = k$.

- La propriété est trivialement réalisée pour $k = 1$: e_1 est nécessairement égal à $\frac{a_1}{\|a_1\|}$ (ce qui est possible car $a_1 \neq 0$).
- Supposons construits $e_1, \dots, e_{k-1}$, famille orthonormée vérifiant les conditions du théorème jusqu'à l'ordre $k - 1$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Démonstration

On construit la suite $(e_k)_{k \in I}$ par récurrence sur k . Pour cela, on notera pour $k \in I$, $F_k = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$. On remarque que, puisque la famille (a_k) est libre, on a $\dim F_k = k$.

● La propriété est trivialement réalisée pour $k = 1$: e_1 est nécessairement égal à $\frac{a_1}{\|a_1\|}$ (ce qui est possible car $a_1 \neq 0$).

● Supposons construits $e_1, \dots, e_{k-1}$, famille orthonormée vérifiant les conditions du théorème jusqu'à l'ordre $k - 1$.

- La condition « $\{e_1, \dots, e_k\}$ est une famille orthogonale » est équivalente à e_k orthogonal à $e_1, \dots, e_{k-1}$ puisque l'on sait déjà $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ orthonormée, c'est-à-dire à $e_k \in F_{k-1}^\perp$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est important de pouvoir connaître une base orthonormée d'un espace euclidien. Le théorème ci-dessous en fournit un procédé de construction.

Théorème 10: Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien et $(a_k)_{k \in I}$ une famille **libre** de vecteurs de E , où I désigne $\mathbb{N}$ ou un intervalle d'entiers de la forme $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors il existe une et une seule famille **orthonormée** $(e_k)_{k \in I}$ telle que :

- Pour tout $k \in I$, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$;
- $\forall k \in I$, $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ (cette condition assure l'unicité).

Démonstration

On construit la suite $(e_k)_{k \in I}$ par récurrence sur k . Pour cela, on notera pour $k \in I$, $F_k = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$. On remarque que, puisque la famille (a_k) est libre, on a $\dim F_k = k$.

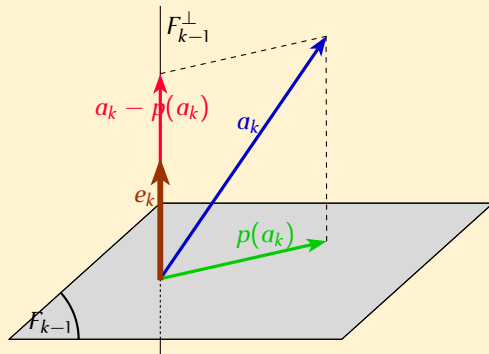
● La propriété est trivialement réalisée pour $k = 1$: e_1 est nécessairement égal à $\frac{a_1}{\|a_1\|}$ (ce qui est possible car $a_1 \neq 0$).

● Supposons construits $e_1, \dots, e_{k-1}$, famille orthonormée vérifiant les conditions du théorème jusqu'à l'ordre $k - 1$.

- La condition « $\{e_1, \dots, e_k\}$ est une famille orthogonale » est équivalente à e_k orthogonal à $e_1, \dots, e_{k-1}$ puisque l'on sait déjà $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ orthonormée, c'est-à-dire à $e_k \in F_{k-1}^\perp$.
- La condition « $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\} = F_k$ » est équivalente à $e_k \in F_k$ puisque l'on sait déjà que $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\} = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$.

Démonstration (suite)

e_k appartient donc à l'orthogonal de F_{k-1} dans F_k ; cet orthogonal est une droite, celle de base le vecteur $a_k - p(a_k)$, où $p(a_k)$ est le projeté orthogonal de a_k sur F_{k-1} .

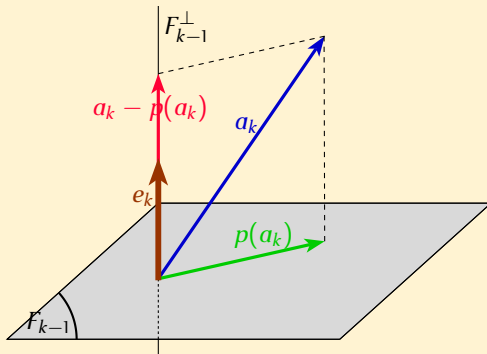


Démonstration (suite)

e_k appartient donc à l'orthogonal de F_{k-1} dans F_k ; cet orthogonal est une droite, celle de base le vecteur $a_k - p(a_k)$, où $p(a_k)$ est le projeté orthogonal de a_k sur F_{k-1} .

($e_1, \dots, e_{k-1}$) étant une base orthonormée de F_{k-1} , la formule du théorème 8 donne :

$$p(a_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i .$$



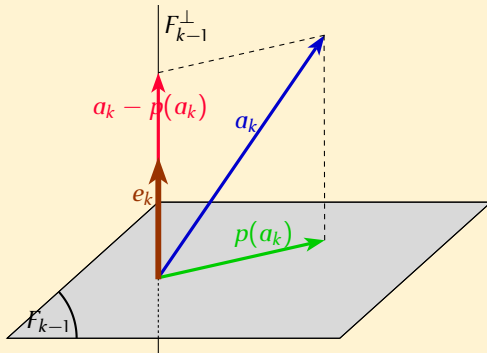
Démonstration (suite)

e_k appartient donc à l'orthogonal de F_{k-1} dans F_k ; cet orthogonal est une droite, celle de base le vecteur $a_k - p(a_k)$, où $p(a_k)$ est le projeté orthogonal de a_k sur F_{k-1} .

$(e_1, \dots, e_{k-1})$ étant une base orthonormée de F_{k-1} , la formule du théorème 8 donne :

$$p(a_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i .$$

En notant $b_k = a_k - p(a_k) = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$, on doit donc avoir e_k colinéaire à b_k .



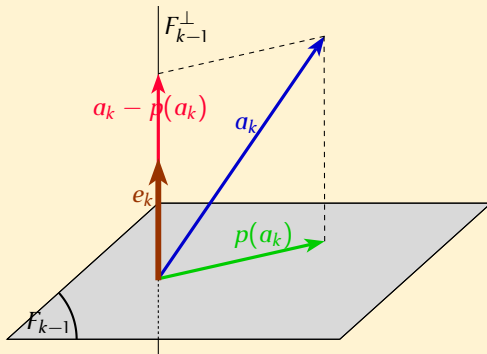
Démonstration (suite)

e_k appartient donc à l'orthogonal de F_{k-1} dans F_k ; cet orthogonal est une droite, celle de base le vecteur $a_k - p(a_k)$, où $p(a_k)$ est le projeté orthogonal de a_k sur F_{k-1} .

($e_1, \dots, e_{k-1}$) étant une base orthonormée de F_{k-1} , la formule du théorème 8 donne :

$$p(a_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i .$$

En notant $b_k = a_k - p(a_k) = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$, on doit donc avoir e_k colinéaire à b_k .



- La condition « e_k unitaire » conduit ensuite à $e_k = \varepsilon \frac{b_k}{\|b_k\|}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ (le vecteur b_k ne peut pas être nul, sinon on aurait $a_k = p(a_k) \in F_{k-1}$ ce qui est impossible puisque la famille $(a_1, \dots, a_k)$ est libre).

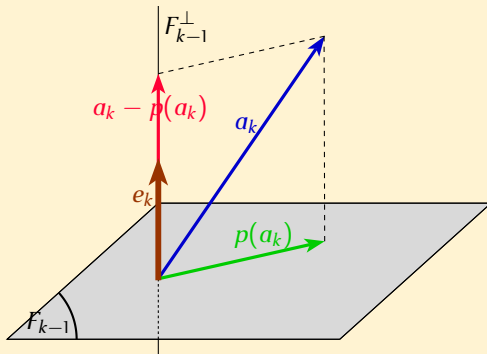
Démonstration (suite)

e_k appartient donc à l'orthogonal de F_{k-1} dans F_k ; cet orthogonal est une droite, celle de base le vecteur $a_k - p(a_k)$, où $p(a_k)$ est le projeté orthogonal de a_k sur F_{k-1} .

$(e_1, \dots, e_{k-1})$ étant une base orthonormée de F_{k-1} , la formule du théorème 8 donne :

$$p(a_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i.$$

En notant $b_k = a_k - p(a_k) = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$, on doit donc avoir e_k colinéaire à b_k .



- La condition « e_k unitaire » conduit ensuite à $e_k = \varepsilon \frac{b_k}{\|b_k\|}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ (le vecteur b_k ne peut pas être nul, sinon on aurait $a_k = p(a_k) \in F_{k-1}$ ce qui est impossible puisque la famille $(a_1, \dots, a_k)$ est libre).
- Enfin, la condition $\langle e_k | a_k \rangle > 0$ permet de choisir ε , c'est-à-dire détermine e_k de façon unique.
En effet, $\langle e_k | a_k \rangle = \langle e_k | a_k - p(a_k) \rangle + \underbrace{\langle e_k | p(a_k) \rangle}_{=0} = \langle e_k | b_k \rangle = \varepsilon \|b_k\|$, donc il faut $\varepsilon = +1$.

Remarques

- ① Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$ puis $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k , sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues.)

Remarques

- ① Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$ puis $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k , sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues.)
- ② Si l'on veut seulement construire une famille **orthogonale** à partir des a_k , il suffit de ne pas normer les b_k à la fin du calcul, donc d'utiliser la formule

$$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i | a_k \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

Remarques

- ① Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$ puis $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k , sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues.)
- ② Si l'on veut seulement construire une famille **orthogonale** à partir des a_k , il suffit de ne pas normer les b_k à la fin du calcul, donc d'utiliser la formule

$$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i | a_k \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

- ③ Si E est un espace euclidien, $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est la base orthonormée de E obtenue par le procédé de Schmidt, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux positifs.

Remarques

- ① Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$ puis $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k , sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues.)
- ② Si l'on veut seulement construire une famille **orthogonale** à partir des a_k , il suffit de ne pas normer les b_k à la fin du calcul, donc d'utiliser la formule

$$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i | a_k \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

- ③ Si E est un espace euclidien, $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est la base orthonormée de E obtenue par le procédé de Schmidt, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux positifs.

En effet :

- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $\text{Vect}(a_1, \dots, a_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ donc la matrice est triangulaire supérieure ;

Remarques

- ① Les formules $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | a_k \rangle e_i$ puis $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$, qui permettent de construire la famille orthonormée (e_k) de proche en proche à partir des a_k , sont à retenir (mais il est tout aussi facile de retenir la façon dont elles ont été obtenues.)
- ② Si l'on veut seulement construire une famille **orthogonale** à partir des a_k , il suffit de ne pas normer les b_k à la fin du calcul, donc d'utiliser la formule

$$e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i | a_k \rangle}{\|e_i\|^2} e_i .$$

- ③ Si E est un espace euclidien, $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est la base orthonormée de E obtenue par le procédé de Schmidt, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure à éléments diagonaux positifs.

En effet :

- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a $\text{Vect}(a_1, \dots, a_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ donc la matrice est triangulaire supérieure ;
- si l'on considère la matrice inverse, c'est-à-dire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'}$, le i -ème coefficient diagonal est la i -ème coordonnée de a_i sur e_i , donc est égal à $\langle a_i | e_i \rangle$ puisque la base (e_i) est orthonormée, et ce coefficient est positif par construction. Les coefficients diagonaux de la matrice inverse sont donc aussi positifs.

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$,

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$, puis $e_1 = a_1 - \frac{\langle e_0 | a_1 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$. Or $\langle e_0 | a_1 \rangle = \int_{-1}^1 e_0(t)a_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc $e_1 = a_1 = X$.

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$, puis $e_1 = a_1 - \frac{\langle e_0 | a_1 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$. Or $\langle e_0 | a_1 \rangle = \int_{-1}^1 e_0(t)a_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc $e_1 = a_1 = X$.
- puis $e_2 = a_2 - \frac{\langle e_0 | a_2 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$. Or $\langle e_1 | a_2 \rangle = \langle a_1 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$ et $\langle e_0 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|e_0\|^2 = 2$ donc $e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$, puis $e_1 = a_1 - \frac{\langle e_0 | a_1 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$. Or $\langle e_0 | a_1 \rangle = \int_{-1}^1 e_0(t)a_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc $e_1 = a_1 = X$.
- puis $e_2 = a_2 - \frac{\langle e_0 | a_2 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$. Or $\langle e_1 | a_2 \rangle = \langle a_1 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$ et $\langle e_0 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|e_0\|^2 = 2$ donc $e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.
- enfin, $e_3 = a_3 - \frac{\langle e_0 | a_3 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_3 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle e_2 | a_3 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$. On a $\langle e_0 | a_3 \rangle = \langle e_2 | a_3 \rangle = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur $[-1; 1]$), et $\langle e_1 | a_3 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$ et $\|e_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$, donc $e_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$, puis $e_1 = a_1 - \frac{\langle e_0 | a_1 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$. Or $\langle e_0 | a_1 \rangle = \int_{-1}^1 e_0(t)a_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc $e_1 = a_1 = X$.
- puis $e_2 = a_2 - \frac{\langle e_0 | a_2 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$. Or $\langle e_1 | a_2 \rangle = \langle a_1 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$ et $\langle e_0 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|e_0\|^2 = 2$ donc $e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.
- enfin, $e_3 = a_3 - \frac{\langle e_0 | a_3 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_3 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle e_2 | a_3 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$. On a $\langle e_0 | a_3 \rangle = \langle e_2 | a_3 \rangle = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur $[-1; 1]$), et $\langle e_1 | a_3 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$ et $\|e_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$, donc $e_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.
- Il reste à normer la base orthogonale obtenue. Or $\|e_0\| = \sqrt{2}$, $\|e_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|e_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\|e_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$, et l'on a finalement la base orthonormée des $\frac{e_i}{\|e_i\|}$:

Exercice

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Déterminer la base orthonormée obtenue à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt.

Solution

Notons (a_0, a_1, a_2, a_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X] : a_k = X^k$. On déroule alors les calculs, pour déterminer d'abord une base **orthogonale** (e_0, e_1, e_2, e_3) .

- On prend $e_0 = a_0 = 1$, puis $e_1 = a_1 - \frac{\langle e_0 | a_1 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$. Or $\langle e_0 | a_1 \rangle = \int_{-1}^1 e_0(t)a_1(t) dt = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc $e_1 = a_1 = X$.
 - puis $e_2 = a_2 - \frac{\langle e_0 | a_2 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_2 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$. Or $\langle e_1 | a_2 \rangle = \langle a_1 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$ et $\langle e_0 | a_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|e_0\|^2 = 2$ donc $e_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.
 - enfin, $e_3 = a_3 - \frac{\langle e_0 | a_3 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 - \frac{\langle e_1 | a_3 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle e_2 | a_3 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$. On a $\langle e_0 | a_3 \rangle = \langle e_2 | a_3 \rangle = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur $[-1; 1]$), et $\langle e_1 | a_3 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$ et $\|e_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$, donc $e_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.
 - Il reste à normer la base orthogonale obtenue. Or $\|e_0\| = \sqrt{2}$, $\|e_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|e_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\|e_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{7}{2}}$, et l'on a finalement la base orthonormée des $\frac{e_i}{\|e_i\|}$:
- $$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}X, \quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right), \quad \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right).$$

Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème II

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E ; alors il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle .$$

Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème II

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E ; alors il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle .$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle$$

où a est le vecteur de coordonnées $a_i = \varphi(e_i)$ dans $\mathcal{B}$ (il s'agit de l'expression analytique de la forme linéaire φ).

Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème II

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E ; alors il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle .$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle$$

où a est le vecteur de coordonnées $a_i = \varphi(e_i)$ dans $\mathcal{B}$ (il s'agit de l'expression analytique de la forme linéaire φ).

Cela prouve l'existence de a . Enfin, a est unique car si l'on a $\langle a | x \rangle = \langle b | x \rangle$ pour tout $x \in E$, alors $a - b \in E^\perp$ donc $a = b$.

Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème II

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien E ; alors il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a | x \rangle$$

où a est le vecteur de coordonnées $a_i = \varphi(e_i)$ dans $\mathcal{B}$ (il s'agit de l'expression analytique de la forme linéaire φ).

Cela prouve l'existence de a . Enfin, a est unique car si l'on a $\langle a | x \rangle = \langle b | x \rangle$ pour tout $x \in E$, alors $a - b \in E^\perp$ donc $a = b$.

Remarque

Lorsque φ est non nulle, son noyau $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan H . D'après le théorème précédent, il existe donc $a \in E$ tel que

$$H = \{x \in E \text{ tq } \langle a | x \rangle = 0\} = \{a\}^\perp.$$

$\mathbb{R}.a$ est la droite orthogonale à H ; ses vecteurs sont les vecteurs normaux à H .

FIN DU CHAPITRE VI