ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *.*

I. Espaces vectoriels normés

I.1. Normes sur un espace vectoriel

Déf 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

a) $\forall\, x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (*positivité*).

b) $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ (*séparation*).

c) $\forall\, x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*).

d) $\forall\, (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Rem : dans la propriété c), $|\lambda|$ désigne la *valeur absolue* de λ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et le *module* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Rem: Le plus souvent, une norme sur E est notée $\|\cdot\|_E$ ou simplement $\|\cdot\|$.

Exemples

1. La valeur absolue dans $\mathbb{R}$, le module dans $\mathbb{C}$, sont des normes.
2. Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$, la norme associée à ce produit scalaire (c'est-à-dire définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}$) munit E d'une structure d'espace vectoriel normé.
(*Les propriétés ont toutes été démontrées dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels*)

Propriétés:

1. Si N est une norme sur E, on a en fait l'équivalence : $\forall\, x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. Si N est une norme sur E, il est facile de montrer par récurrence sur n que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \forall\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ N\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, N(x_i).$$

3. Si $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé, on a :

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ \Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leqslant \|x - y\|.$$

Démonstration:

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a : $\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$, donc $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$.
En échangeant les rôles de x et y, on obtient : $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = \|-(x - y)\| = \|x - y\|$.
En rassemblant les deux inégalités, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

Déf 2:

Un vecteur x d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est dit unitaire si $\|x\| = 1$.

Rem: À tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$, on peut toujours associer un vecteur unitaire : $\dfrac{x}{\|x\|}$.

I.2. Normes usuelles sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Lemme:

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel $k \geqslant 0$:

$$\sup(kA) = k \sup A.$$

(kA désigne l'ensemble $\{kx \mid x \in A\}$).

Démonstration:

- Notons $s = \sup A$.
  Pour tout $x \in A$ on a $x \leqslant s$ donc $kx \leqslant ks$ ($k \geqslant 0$). Ainsi ks est un majorant de kA d'où on déduit : $\sup(kA) \leqslant ks$.
- Pour $k > 0$, en remplaçant dans ce qui précède k par $\frac{1}{k}$ et A par kA, on obtient

$$\sup A = \sup\left(\frac{1}{k}.kA\right) \leqslant \frac{1}{k}\sup(kA)$$

ce qui donne l'inégalité dans l'autre sens (et le résultat est trivial pour $k = 0$).
Pour cette autre inégalité, on peut aussi écrire la caractérisation de la borne sup à l'aide des ε... exercice...

Rem: Ce résultat figure désormais explicitement au programme, et peut donc être utilisé directement.

Théorème 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on pose :

$$\textbf{a)}\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \textbf{b)}\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \textbf{c)}\ \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \ .$$

On définit ainsi trois normes sur E.

Démonstration:

a) Norme $\| \ \|_1$:
- Déjà, l'application $x \mapsto \|x\|_1$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- si $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = 0$ alors tous les x_i sont nuls donc $x = 0_E$;
- si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\|\lambda x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda|\,\|x\|_1$;
- Enfin, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a $x + y = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i$ donc en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i| \big) = \|x\|_1 + \|y\|_1 \ .$$

b) Norme $\| \ \|_\infty$:
- Déjà, l'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- Puisque pour tout i on a $0 \leqslant |x_i| \leqslant \|x\|_\infty$, si $\|x\|_\infty = 0$ alors tous les x_i sont nuls donc $x = 0_E$:
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$; il existe un indice $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. On a alors pour tout i, $|\lambda x_i| = |\lambda|\,|x_i| \leqslant |\lambda|\,|x_{i_0}|$ avec égalité pour $i = i_0$, donc $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\,|x_{i_0}| = |\lambda|\,\|x\|_\infty$;
- Enfin, si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a, en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$:

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ |x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

  donc $\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

c) Norme $\| \ \|_2$:
Seule l'inégalité triangulaire pose un peu problème (les autres propriétés sont quasi immédiates).
- Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, on peut munir E d'un produit scalaire par :

$$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E,\ \langle x \,|\, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,.$$

  L'inégalité triangulaire pour la norme $\| \ \|_2$ découle alors du cours sur les espaces préhilbertiens.
- Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, on a, toujours avec les mêmes notations :

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2$$

  et l'inégalité triangulaire découle alors de l'inégalité triangulaire précédente appliquée aux vecteurs de coordonnées réelles $|x_i|$ et $|y_i|$.

I.3. Normes usuelles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. Il est généralement rapporté à la base canonique (E_{ij}) : si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij}$, les a_{ij} sont les coordonnées de M dans la base canonique (E_{ij}).
On peut donc comme ci-dessus définir trois normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$:

$$\textbf{a) } \|A\|_1 = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right| \qquad \textbf{b) } \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|^2} \qquad \textbf{c) } \|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|.$$

Déf 3:

On dit qu'une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme d'algèbre si

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

La norme $\| \ \|_\infty$ n'est pas une norme d'algèbre : il suffit par exemple de considérer $A = B = J$ où $J = (1)$.

Prop 1:

La norme $\| \ \|_1$ est une norme d'algèbre.

Démonstration:

En notant $C = AB$ et avec les notations habituelles, on a en effet :

$$\|C\|_1 = \sum_{i,k} |c_{i,k}| = \sum_{i,k} \left|\sum_j a_{i,j}b_{j,k}\right| \leqslant \sum_{i,j,k} \left|a_{i,j}\right| \left|b_{j,k}\right| \leqslant \sum_{i,j,k,\ell} \left|a_{ij}\right| |b_{k\ell}| = \|A\|_1 \|B\|_1.$$

Rem: on peut démontrer que la norme $\| \ \|_2$ est aussi une norme d'algèbre, mais cela n'est pas immédiat.

Prop 2:

La norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N(A) = n\|A\|_\infty$$

est une norme d'algèbre.

Démonstration:

Déjà, il est facile de vérifier que N est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puisque $\| \ \|_\infty$ en est une.
Par la formule du produit matriciel et avec des notations classiques :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \left|(AB)_{i,j}\right| = \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \left|b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

donc $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty$ d'où l'on tire $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Prop 3:

L'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|\right)$$

est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration:

- Déjà il s'agit bien d'une norme car :
  - N est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs positives.

- Si $N(A)=0$ alors pour tout i, $\sum_j \left|a_{ij}\right| = 0$ donc tous les a_{ij} sont nuls c'est-à-dire $A = O_n$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N(\lambda A) = \max_{1\leqslant i \leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda a_{ij}\right|\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(|\lambda| \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) = |\lambda|\, N(A).$$

- Enfin, si A et B sont deux matrices carrées, on a

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ \left|a_{ij}+b_{ij}\right| \leqslant \left|a_{ij}\right| + \left|b_{ij}\right|$$

donc

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}+b_{ij}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right| \leqslant N(A)+N(B)$$

donc $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$.

- Il s'agit bien d'une norme d'algèbre car, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si l'on pose $C = AB$ on a, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}b_{kj}\right| = \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_{kj}\right|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\, N(B) \leqslant N(A)N(B)$$

donc $N(C) \leqslant N(A)N(B)$, cqfd.

I.4. Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$

Théorème 2:

Pour toute $f \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$ (avec $a<b$), on peut poser :

a) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ **b)** $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}$ **c)** $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|$.

On définit ainsi trois normes sur $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$.

Rem : $|f(t)|$ désigne la *valeur absolue* de $f(t)$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, et le *module* si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Démonstration:

a) Norme $\|\ \|_1$:
- Déjà, l'application $f \mapsto \|f\|_1$ est bien définie (puisque f est continue sur un segment, l'intégrale existe) et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- si $\|f\|_1 = 0$, il s'agit de l'intégrale d'une fonction *continue* positive qui est nulle, donc $f=0$;
- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$ on a, par linéarité de l'intégrale :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|\ \mathrm{d}t = \int_a^b |\lambda|\,|f(t)|\ \mathrm{d}t = |\lambda|\ \|f\|_1 .$$

- Enfin, si $f, g \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$, on a en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ et la positivité de l'intégrale :

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left(|f(t)|+|g(t)|\right)\ \mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

b) Norme $\|\ \|_\infty$:
- Déjà, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien définie : en effet, f étant continue sur le segment $[a\,;b]$ y est bornée (et atteint ses bornes), donc la borne supérieure de l'ensemble $\{|f(t)|\,,\ t\in[a\,;b]\}$ existe.
  De plus, il s'agit de la borne supérieure d'un ensemble de nombres positifs, elle est donc positive.
- Puisque pour tout $t \in [a\,;b]$ on a $|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$, si $\|f\|_\infty = 0$ alors $f=0$;
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $f \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$.
  L'égalité $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$ résulte directement du lemme préliminaire.
- Enfin, si $f, g \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$, on a :

$$\forall\, t \in [a\,;b],\ |f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

  donc $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

c) Norme $\|\ \|_2$:
Seule l'inégalité triangulaire pose un peu problème (les autres propriétés sont faciles).
- Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, on peut munir l'espace $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ d'un produit scalaire par :

$$\forall\, f,\, g \in \mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K}),\ \langle f\,|\,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

  L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\ \|_2$ découle alors des propriétés vues dans le cours sur les espaces préhilbertiens.
- Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, on a, toujours avec les mêmes notations et en utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:

$$\|f+g\|_2^2 = \int_a^b |f(t)+g(t)|^2\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left(|f(t)|+|g(t)|\right)^2\ \mathrm{d}t$$

  et l'inégalité triangulaire découle alors de l'inégalité triangulaire précédente appliquée aux fonctions à valeurs réelles $t\mapsto |f(t)|$ et $t \mapsto |g(t)|$.

Rem: Dans $\mathscr{C}([a\,;b],\mathbb{K})$, la norme $\| \ \|_\infty$ s'appelle la norme de la convergence uniforme.

I.5. Distance associée à une norme

Déf 4:

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Si $(x,y) \in E^2$, on appelle distance de x à y le réel :
$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Propriétés:

1. $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ d(x,y) \geqslant 0$.
2. $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ d(x,y) = d(y,x)$.
3. $\forall (x,y) \in E^2 \ , \ d(x,y) = 0 \iff x = y$.
4. $\forall (x,y,z) \in E^3 \ , \ \big|d(x,y) - d(y,z)\big| \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Déf 5:

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E non vide, et $x \in E$.
L'ensemble $\{\|x-a\| \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0 ; elle admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A, et notée $d(x,A)$:
$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Remarques

1. En général, le réel $d(x,A)$ n'est pas un *minimum*, c'est-à-dire que la borne inférieure n'est pas nécessairement atteinte.
   Exemple : Dans $\mathbb{R}$, prendre $x=0$ et $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2. La distance de x à A peut être nulle sans que x appartienne à A.
   Exemple : le même que ci-dessus.
3. Même si $d(x,A)$ est atteinte en un point, ce point n'est pas nécessairement unique.
   Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne usuelle, considérer un cercle et son centre.

I.6. Boules et sphères

Déf 6:

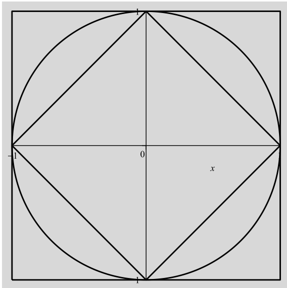
Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, a un vecteur de E et r un réel positif.
On appelle :

- boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E \ , \ d(a,x) < r\} \ = \ \{x \in E \ , \ \|x-a\| < r\}.$$
- boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \ , \ d(a,x) \leqslant r\} \ = \ \{x \in E \ , \ \|x-a\| \leqslant r\}.$$
- sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :
$$\mathcal{S}(a,r) = \{x \in E \ , \ d(a,x) = r\} \ = \ \{x \in E \ , \ \|x-a\| = r\}.$$

On parle de boule unité ou de sphère unité dans le cas $a = 0_E$ et $r = 1$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue : $\mathcal{B}(a,r) =]a-r\,;a+r[$, $\mathcal{B}_f(a,r) = [a-r\,;a+r]$, $\mathcal{S}(a,r) = \{a-r, a+r\}$.
2. Dessin des boules unités pour les trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$:



De l'intérieur vers l'extérieur : N_1, N_2, N_∞

Déf 7: *Voisinages*

Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset V$.
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Rem: Dans le cas particulier $E = \mathbb{R}$, on définit les voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme les parties de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ (resp $]-\infty\,;a[$).

Déf 8: *Parties convexes*

Une partie A d'un espace vectoriel est dite convexe si, pour tout $(x, y) \in A^2$, le segment $[x\,;y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0\,;1]\}$ est inclus dans A.

Prop 4:

Une boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

Démonstration:

Faisons la démonstration pour une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$. Soient $x, y \in \mathcal{B}(a, r)$ et $t \in [0\,;1]$. Il s'agit de démontrer que $z = tx + (1-t)y$ appartient à $\mathcal{B}(a, r)$. Cela découle simplement de la suite d'inégalités :

$$\|tx + (1-t)y - a\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \leqslant t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|y-a\| < tr + (1-t)r = r\,.$$

Déf 9: *Parties bornées*

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite bornée si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \ \forall\, x \in A\,,\ \|x\| \leqslant M$$

Cela équivaut à : $A \subset \mathcal{B}_f(0, M)$.

I.7. Comparaison de normes

Déf 10:

Soient (N_1, N_2) deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists\, \alpha > 0\,,\ \exists\, \beta > 0 \text{ tels que } \forall\, x \in E\,,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

(c'est-à-dire que les rapports $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont bornés sur $E \setminus \{0\}$.)

Prop 5:

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

Démonstration:

On vérifie facilement que cette relation est réflexive, symétrique et transitive :

– La relation est réflexive : si N_1 est une norme, N_1 est en relation avec N_1 : prendre $\alpha = \beta = 1$.

– La relation est symétrique : si une norme N_1 est en relation avec une norme N_2, il existe α, β strictement positifs tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$, d'où $\frac{1}{\beta}N_2 \leqslant N_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}N_2$, donc N_2 est en relation avec N_1.

– Enfin, la relation est transitive : si N_1 est en relation avec N_2 et N_2 en relation avec N_3, il existe des réels α, β, γ, δ strictement positifs tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$ et $\gamma N_2 \leqslant N_3 \leqslant \delta N_2$ donc $\alpha\gamma N_1 \leqslant N_3 \leqslant \beta\delta N_1$, c'est-à-dire que N_1 est en relation avec N_3.

Exemples

1. Comparaison des trois normes usuelles dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on a :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n \cdot \|x\|_\infty \quad , \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\, \|x\|_2 \, .$$

Ces trois normes sont donc deux à deux équivalentes.

☞ *Démonstration:*

- – On a facilement : $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n\, \|x\|_\infty$ en majorant chacun des $|x_i|$ par $\|x\|_\infty$.

  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car lorsque tous les x_i sont égaux à 1 (par exemple), il y a égalité.

  – Puisqu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, on a

  $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant \|x\|_\infty \, .$$

  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car il y a égalité, par exemple, lorsque $x = e_i$.

- – On a facilement : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leqslant \sqrt{n\, \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$ en majorant chacun des $|x_i|$ par $\|x\|_\infty$.

  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car lorsque tous les x_i sont égaux à 1 (par exemple), il y a égalité.

  – Puisqu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, on a

  $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \geqslant \sqrt{|x_{i_0}|^2} = \|x\|_\infty \, .$$

  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car il y a égalité, par exemple, lorsque $x = e_i$.

- – On a :

  $$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i,j} |x_i|\,|x_j| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\,|x_j| \geqslant \|x\|_2^2$$

  donc $\|x\|_1 \geqslant \|x\|_2$.
  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car il y a égalité, par exemple, lorsque $x = e_i$.

  – On peut considérer $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ comme le produit scalaire usuel, dans $\mathbb{R}^n$, du vecteur $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ par le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

  $$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \cdot \|(1, 1, \ldots, 1)\|_2 = \sqrt{n}\, \|x\|_2 \, .$$

  Notons que cette inégalité ne peut être améliorée car lorsque tous les x_i sont égaux à 1 (par exemple), il y a égalité.

2. Comparaison des trois normes usuelles dans $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$

Pour toute $f \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{K})$ (avec $a < b$), on a :

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_2 \quad , \quad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty \quad , \quad \|f\|_1 \leqslant (b-a)\, \|f\|_\infty \, .$$

☞ *Démonstration:*

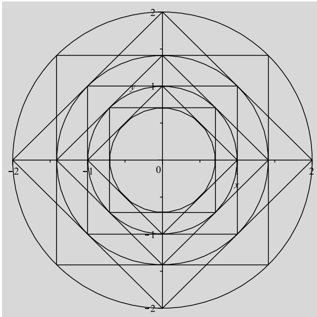
- La première inégalité résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle f \,|\, g\rangle = \int\limits_a^b fg$, appliquée aux fonctions $t \mapsto |f(t)|$ et $t \mapsto 1$.
- Les deux autres sont immédiates, en majorant dans les intégrales la quantité $|f(t)|$ par $\|f\|_\infty$.

Cependant, ces trois normes sont deux à deux **non équivalentes**, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $f_n : t \mapsto \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$: on vérifie que les suites de termes généraux $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}$, $\dfrac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1}$ et $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}$ tendent vers $+\infty$ avec n, donc les rapports $\dfrac{\|\ \|_\infty}{\|\ \|_2}$, $\dfrac{\|\ \|_2}{\|\ \|_1}$ et $\dfrac{\|\ \|_\infty}{\|\ \|_1}$ ne sont pas bornés.

Prop 6:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute boule ouverte pour l'une de ces deux normes contient une boule ouverte de même centre pour l'autre norme.

Illustration



Équivalence des normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$

Démonstration:

Par translation, on ne change pas le résultat si on se limite à des boules de centre 0_E.
On vérifie alors facilement que, si (N_1, N_2) sont deux normes sur E et si α et β sont deux réels strictement positifs, on a :

$$\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1 \implies B_1(0,r) \subset B_2(0,\beta r) \text{ et } B_2(0,r) \subset B_1(0,\frac{r}{\alpha})$$

en notant bien sûr $B_i(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r pour la norme N_i.

Corollaire 6.1:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1, N_2 deux normes sur E et $a \in E$.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors l'ensemble $\mathscr{V}(a)$ des voisinages de a est le même pour les deux normes.

Démonstration:

En effet, si V est un voisinage de a pour N_1 (par exemple), il existe $r > 0$ tel que $B_1(a,r) \subset V$; mais d'après la proposition précédente, il existe $r' > 0$ tel que $B_2(a,r') \subset B_1(a,r)$ donc V est aussi un voisinage de a pour N_2
(en notant bien sûr $B_i(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme N_i).

Prop 7:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute partie bornée pour l'une est bornée pour l'autre .

Démonstration:

C'est immédiat compte tenu de la prop. précédente, puisque dire qu'une partie est bornée équivaut à dire qu'elle est incluse dans une boule de centre 0.

Rem : Lorsque E est de dimension infinie, une partie peut être bornée pour une norme et non bornée pour une autre !
Considérer pour cela : $E = \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$, et $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $f_n : t \mapsto nt^n$. Alors A est bornée pour la norme N_1, mais ne l'est pas pour la norme N_∞.

On a cependant le résultat important suivant :

Théorème 3: (admis)

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

II. Suites dans un espace vectoriel normé

II.1. Suite d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Déf 11:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle suite d'éléments de E toute application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right.$, où I est une partie de $\mathbb{N}$. On la note : $(u_n)_{n\in I}$.

Remarques

1. Si I est une partie *finie* de $\mathbb{N}$, la suite est dite finie. Ce cas n'a aucun intérêt ici.
2. Si I est une partie *infinie* de $\mathbb{N}$, I est équipotent à $\mathbb{N}$ (*voir cours de probas*), et on peut donc se limiter au cas $I = \mathbb{N}$, ce que l'on fera par la suite.
3. Ne pas confondre : une suite peut être infinie et ne prendre qu'un nombre fini de valeurs (*ex :* $(-1)^n$).

Prop 8:

L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans E a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois (≪ usuelles ≫) : si $u, v \in E^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$u + v : n \longmapsto u_n + v_n$$
$$\lambda . u : n \longmapsto \lambda u_n \,.$$

↪ Par la suite, on supposera que E désigne un espace vectoriel normé, et on notera $\| \ \|_E$ sa norme (ou simplement $\| \ \|$ s'il n'y a pas de confusion possible).

II.2. Suite bornée

Déf 12:

Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si son ensemble image est une partie bornée de E, c'est-à-dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M\,.$$

Rem: La proposition 7 montre que, si une suite est bornée pour une norme, elle l'est aussi pour toute norme *équivalente* ; et l'exemple donné à la suite de cette proposition montre qu'une suite peut être bornée pour une norme sans l'être pour une autre !

Prop 9:

1. L'ensemble $\mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$ (noté plutôt $\ell^\infty(E)$) des suites bornées d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
2. $\ell^\infty(E)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel normé pour la norme $\| \ \|_\infty$ définie par :

$$\text{si } u \in \ell^\infty(E),\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_E \,.$$

II.3. Convergence d'une suite

Déf 13:

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Théorème 4:

Si (u_n) est une suite convergente, le vecteur ℓ précédent est unique.
On l'appelle limite de la suite u, et on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Démonstration:

Supposons qu'il existe $\ell_1 \neq \ell_2$ vérifiant la définition précédente. On a alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geqslant n_1 \Longrightarrow \|u_n - \ell_1\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geqslant n_2 \Longrightarrow \|u_n - \ell_2\| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{\|\ell_1 - \ell_2\|}{2}$ (c'est bien un réel strictement positif). On a alors, en choisissant $n \geqslant \max(n_1, n_2)$:

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|(\ell_1 - u_n) + (u_n - \ell_2)\| \leqslant \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\| < 2\varepsilon = \|\ell_1 - \ell_2\|$$

d'où la contradiction.

Remarques

1. Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ peut aussi s'écrire :
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$$
ou encore, puisque toute boule ouverte de centre ℓ est un voisinage de ℓ et que tout voisinage de ℓ contient une telle boule :
$$\forall\, V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in V$$
L'intérêt de cette écriture est qu'elle permet de généraliser la définition de la limite au cas d'une suite réelle (u_n) qui tend vers $\pm\infty$. En effet, un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ étant une partie qui contient un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$, dire que la suite rélle u tend vers $+\infty$ s'écrit donc :
$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A.$$
2. Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ signifie aussi que la suite réelle $\|u_n - \ell\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
3. **On ne change pas la nature d'une suite, ni, pour une suite convergente, sa limite, lorsqu'on remplace la norme par une norme équivalente.**
Cela découle directement du fait que les ensembles $\mathcal{V}(\ell)$ sont les mêmes pour les deux normes.
Cela n'est plus forcément le cas lorsqu'on considère deux normes non équivalentes : prendre l'exemple de la suite de fonctions $f_n : t \mapsto t^n$, dans $\mathscr{C}([0\,;1], \mathbb{R})$: cette suite converge vers la fonction nulle au sens de la norme $\|\ \|_1$, mais pas au sens de la norme $\|\ \|_\infty$ puisque, pour tout n, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

Théorème 5:

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. En appliquant la définition avec (par exemple) $\varepsilon = 1$, on obtient qu'à partir d'un certain rang n_0 on a $\|u_n - \ell\| < 1$, donc $\|u_n\| < \|\ell\| + 1$ (par l'inégalité triangulaire « de gauche »).
Donc, pour tout entier n, on aura $\|u_n\| \leqslant \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{n_0}\|, \|\ell\| + 1)$, ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Rem : Une suite bornée n'est pas forcément convergente ! Exemple : la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Théorème 6:

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E convergentes resp. vers ℓ et ℓ' dans E. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Soit (λ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et (u_n) une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$. Alors, la suite $(\lambda_n \cdot u_n)$ converge vers $\lambda \cdot \ell$.

Démonstration:

1) $\|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|v_n - \ell'\|$, donc, d'après les résultats sur les suites réelles vus en Sup, $\|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\|$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

2) On utilise ici une « astuce » classique :

$$\|\lambda_n \cdot u_n - \lambda \cdot \ell\| = \|\lambda_n \cdot (u_n - \ell) + (\lambda_n - \lambda) \cdot \ell\| \leqslant |\lambda_n|\, \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|\ell\|$$

puis on conclut en utilisant le fait que la suite (λ_n) est bornée (car convergente) et les résultats sur les limites des suites réelles vus en Sup.

Corollaire 6.1:

L'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

II.4. Suites extraites

Déf 14:

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 7:

Si u est une suite d'éléments de E qui converge vers ℓ, toute suite extraite de u converge, vers la même limite ℓ .

Démonstration:

Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une suite extraite de u. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Puisque φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n (démonstration facile par récurrence).Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant n_0$ d'où $\left\|u_{\varphi(n)} - \ell\right\| < \varepsilon$, ce qui prouve que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers ℓ.

Exemple

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge, puisque les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de limites différentes.

On a dans certains cas une sorte de réciproque au théorème précédent :

Prop 10:

Soit u une suite d'éléments de E. On suppose que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, vers la *même* limite ℓ.
Alors la suite u converge vers ℓ.

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$. On écrit les définitions des limites :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_{2n} - \ell\| < \varepsilon$$
$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Longrightarrow \|u_{2n+1} - \ell\| < \varepsilon$$

Il en résulte que, pour $n \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ on a $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu par définition de la limite.

II.5. Cas de la dimension finie

Théorème 8:

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et (u_n) une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire : $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{i,n} e_i$ (les $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont les suites coordonnées, à valeurs dans $\mathbb{K}$). Alors :

1. La suite (u_n) est convergente dans E si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, la suite $(u_{i,n})$ est convergente dans $\mathbb{K}$.
2. Et, dans ce cas, si $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i e_i = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, on a : $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $\ell_i = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{i,n}$.
(*de façon simplifiée, les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées*).

☞ *Démonstration:*

E étant de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes; on va donc utiliser la norme $\| \ \|_\infty$ relativement à la base $(e_1, \ldots, e_p)$.
Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. Alors, avec les notations de l'énoncé, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $|u_{i,n} - \ell_i| \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty$, donc $|u_{i,n} - \ell_i|$ tend vers 0, i.e que la suite $(u_{i,n})$ converge vers ℓ_i.

Réciproquement, si pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, la suite $(u_{i,n})$ converge vers ℓ_i, alors, puisque $\|u_n - \ell\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{p} |u_{i,n} - \ell_i|$, $\|u_n - \ell\|_\infty$ tend vers 0, i.e (u_n) tend vers ℓ.

Cas particulier : $\mathbb{C}$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $(1, \mathrm{i})$ (les coordonnées d'un complexe z dans cette base étant $\mathcal{Re}\,(z)$ et $\mathcal{Im}\,(z)$), on a le corollaire suivant :

Corollaire 8.2:

Pour qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes soit convergente, il faut et il suffit que les deux suites réelles $\left(\mathcal{Re}\,(z_n)\right)_n$ et $\left(\mathcal{Im}\,(z_n)\right)_n$ soient convergentes, et l'on a alors :

$$\mathcal{Re}\,(\lim z_n) = \lim(\mathcal{Re}\,(z_n)) \quad \text{et} \quad \mathcal{Im}\,(\lim z_n) = \lim(\mathcal{Im}\,(z_n))$$

III. Topologie d'un espace vectoriel normé

III.1. Ouverts

Déf 15:

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Une partie Ω de E s'appelle un ouvert si :
– soit : $\Omega = \varnothing$
– soit : pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.

Propriétés:

1. $\varnothing$ et E sont des ouverts .
2. Une boule ouverte est un ouvert.
3. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
4. L'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

☞ *Démonstration:*

2. Soit $\mathcal{B}(a, r)$ une boule ouverte, et $x \in \mathcal{B}(a, r)$. Soit $\rho = r - \|x - a\|$. Alors $B(x, \rho) \subset \mathcal{B}(a, r)$ car, si $y \in B(x, \rho)$ on a
$$\|y - a\| = \|(y - x) + (x - a)\| \leqslant \|y - x\| + \|x - a\| < \rho + \|x - a\| = r.$$
donc $y \in \mathcal{B}(a, r)$ et l'inclusion annoncée.
On a donc bien trouvé, pour tout $x \in \mathcal{B}(a, r)$ une boule ouverte $B(x, \rho)$ incluse dans $\mathcal{B}(a, r)$; cela signifie que $\mathcal{B}(a, r)$ est un ouvert.
3. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts, et soit $x \in \Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.
Par définition de la réunion, il existe i_0 tel que $x \in \Omega_{i_0}$; Ω_{i_0} étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega_{i_0}$, donc $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.
Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$: Ω est un ouvert.
4. Soit $(\Omega_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ouverts, et soit $x \in \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$.
Par définition de l'intersection, $x \in \Omega_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, donc, Ω_i étant un ouvert, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \Omega_i$.
En notant $r = \min(r_i)$ on a $r > 0$ et $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.
Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$: Ω est un ouvert.

Rem: La dernière propriété tombe en défaut lorsque la famille n'est pas finie.

Considérer par exemple $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$.

III.2. Intérieur

Déf 16:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in A$ est un point intérieur à A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A, et se note $\overset{\circ}{A}$.

Notons, que, par définition, on a toujours : $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Propriété: L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et de même rayon.

Démonstration:

En effet, si $x \in \mathcal{B}(a,r)$, puisque $\mathcal{B}(a,r)$ est un ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset \mathcal{B}(a,r)$ donc $B(x,\rho) \subset \mathcal{B}_f(a,r)$ donc x est intérieur à $\mathcal{B}_f(a,r)$.

Réciproquement, si x est intérieur à $\mathcal{B}_f(a,r)$ il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset \mathcal{B}_f(a,r)$.

En supposant $x \neq a$, considérons $y = x + \frac{\rho}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}$. Alors $\|y-x\| = \frac{\rho}{2}$ donc $y \in \mathcal{B}(x,\rho)$ donc $y \in \mathcal{B}_f(a,r)$ c'est-à-dire $\|y-a\| \leqslant r$ soit $\|x-a\| + \frac{\rho}{2} \leqslant r$ d'où $\|x-a\| < r$ et $x \in \mathcal{B}(a,r)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, puisque tout intervalle d'intérieur non vide contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels, on a :

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}} = \varnothing.$$

Prop 11:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Alors : A est un ouvert $\iff \overset{\circ}{A} = A$.

Démonstration:

- Si A est un ouvert, pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset A$ donc $a \in \overset{\circ}{A}$. On a donc $A \subset \overset{\circ}{A}$ et comme l'inclusion réciproque est immédiate par définition, on a l'égalité.
- Réciproque similaire.

III.3. Fermés

Déf 17:

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel normé est un fermé si son complémentaire est un ouvert.

Propriétés:

1. $\varnothing$ et E sont des fermés. (*Rem : on peut démontrer que ce sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de* E).
2. Une boule fermée est un fermé.
3. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
4. La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.

Démonstration:

2. Soit $\mathcal{B}_f(a,r)$ une boule fermée ; il s'agit de montrer que son complémentaire C est un ouvert.
Soit donc $x \in C$ c'est-à-dire $\|x-a\| > r$. Soit $\rho = \|x-a\| - r$. Montrons que $B(x,\rho) \subset C$.
Soit $y \in B(x,\rho)$. Alors

$$\|y-a\| = \|(y-x)-(a-x)\| \geqslant \big|\|y-x\| - \|a-x\|\big| = \|a-x\| - \|y-x\| > \|a-x\| - \rho = r$$

Donc $\|y-a\| > r$ c'est-à-dire $y \in C$, cqfd.

3. 4. Se déduisent des propriétés similaires pour les ouverts en passant au complémentaire puisque

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\complement_E F_i\right) \quad \text{et} \quad \complement_E\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\complement_E F_i\right)$$

III.4. Adhérence

Déf 18:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On dit que $a \in E$ est un point adhérent à A si et seulement si pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$.
L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$.
Notons, que, par définition, on a toujours : $A \subset \overline{A}$.

Rem: Par extension, si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à A si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}$, $]a\,;+\infty[\cap A \neq \emptyset$ (resp $]-\infty\,;a[\cap A \neq \emptyset$). Ainsi, $\pm\infty$ sont adhérents à $\mathbb{R}$.
On note alors $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Propriété: L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Démonstration:

- Par définition, tous les points de $\mathcal{B}(a,r)$ font partie de $\overline{\mathcal{B}(a,r)}$.
- Aucun point de $\complement_E \mathcal{B}_f(a,r)$ ne peut faire partie de $\overline{\mathcal{B}(a,r)}$ puisque, ce complémentaire étant un ouvert, pour tout $x \notin \mathcal{B}_f(a,r)$ il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset \complement_E \mathcal{B}_f(a,r)$ c'est-à-dire $B(x,\rho) \cap \mathcal{B}(a,r) = \emptyset$.
- Enfin, si $x \in \mathcal{S}(a,r)$, pour tout $\rho > 0$ on a $\mathcal{B}(a,r) \cap \mathcal{B}(x,\rho) \neq \emptyset$ puisque cette intersection contient des éléments de la forme $x + \frac{1}{n}\frac{a-x}{\|a-x\|}$ pour n assez grand (à vérifier proprement).

Les éléments de l'adhérence de $\mathcal{B}(a,r)$ sont donc exactement ceux de $\mathcal{B}(a,r) \cup \mathcal{S}(a,r) = \mathcal{B}_f(a,r)$.

Prop 12:

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. Alors : A est un fermé $\iff \overline{A} = A$.

Démonstration:

- Supposons $\overline{A} = A$. Alors si $x \in \complement_E A$, x n'est pas adhérent à A donc il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \cap A = \emptyset$ c'est-à-dire $\mathcal{B}(x,r) \subset \complement_E A$. Ainsi $\complement_E A$ est un ouvert, c'est-à-dire A est un fermé.
- On montre de la même façon que, si A est un fermé c'est-à-dire si $\complement_E A$ est ouvert, alors tout $x \in \complement_E A$ n'est pas adhérent à A. Donc $\overline{A} \subset A$ et puisque l'inclusion réciproque est immédiate par définition, on a l'égalité.

Déf 19:

Soit E un espace vectoriel normé, et $A \subset E$. On dit que A est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.
Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Prop 13:

Soit E un espace vectoriel normé, x un élément de E et A une partie non vide de E. Alors :

$$d(x,A) = 0 \iff x \text{ est adhérent à } A\,.$$

Démonstration:

Puisque $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|\,,\ a \in A\}$, on a, par définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } d(x,A) \leqslant \|x-a\| < d(x,A) + \varepsilon\,.$$

Donc si $d(x,A) = 0$ on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } \|x-a\| < \varepsilon \quad \text{c'est-à-dire } a \in \mathcal{B}(x,\varepsilon)\,.$$

Ainsi si $d(x,A) = 0$ on a $\mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$.
Réciproque similaire.

III.5. Effet d'un changement de norme

Prop 14:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur E.
Si les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute partie ouverte pour l'une est ouverte pour l'autre .

Démonstration:

Soient N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E, et soit U une partie de E qui est un ouvert non vide pour N_1.
On note comme d'habitude B_i les boules ouvertes pour la norme N_i ($i \in \{1,2\}$).
Par définition d'un ouvert, pour tout $a \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B_1(a,r) \subset U$ donc d'après la proposition 6 il existe $r' > 0$ tel que $B_2(a,r') \subset U$.
Donc par définition U est une partie ouverte pour N_2. Et c'est évidemment pareil dans l'autre sens.

Ainsi, si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E, les ouverts pour les deux normes sont les mêmes.

Il en résulte qu'il en est de même pour les notions de fermé, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence ; en particulier, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *de dimension finie*, toutes ces notions sont indépendantes de la norme considérée.

III.6. Lien avec les suites

Théorème 9: Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors :

$$a \in \overline{A} \iff \text{il existe une suite d'éléments } de\ A \text{ qui converge vers } a.$$

Démonstration:

- Par définition, toute boule de centre a rencontre A. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intersection de la boule ouverte de centre a et de rayon $\dfrac{1}{n}$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe $a_n \in A$ tel que $\|a_n - a\| < \dfrac{1}{n}$. La suite (a_n) est donc bien une suite d'éléments de A qui converge vers a.
- Réciproquement, supposons qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a. Alors, par définition de la limite, pour toute boule B de centre a, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que a_n appartienne à B pour $n \geqslant n_0$. En particulier, $B \cap A$ est non vide. Ainsi, toute boule de centre a rencontre A, ce qui signifie que $a \in \overline{A}$.

Théorème 10: Caractérisation séquentielle des fermés

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
A est un fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A.

Démonstration:

- Supposons A fermé, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$.
  Si par l'absurde ℓ n'appartenait pas à A, alors ℓ appartiendrait à $\complement_E A$, qui est un ouvert. Donc par définition d'un ouvert :
  $$\exists\, \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}(\ell,\varepsilon) \subset \complement_E A \quad \text{donc} \quad \mathcal{B}(\ell,\varepsilon) \cap A = \varnothing.$$
  Mais par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $a_n \in \mathcal{B}(\ell,\varepsilon)$, et $a_n \in A$: contradiction.
- Réciproquement, supposons que toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A.
  En utilisant le théorème précédent, on obtient alors que, si $a \in \overline{A}$ alors $a \in A$; ainsi $\overline{A} \subset A$ donc $\overline{A} = A$ et A est fermée.

Rem : Pour démontrer qu'une partie est fermée, il est bien plus commode d'utiliser la caractérisation séquentielle que la définition initiale (complémentaire d'un ouvert, puis utilisation de boules ouvertes incluses dans...).

Exercices

1. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F est un fermé.

   Solution:

   On peut déjà remarquer que, puisque E est de dimension finie, il n'est pas utile de préciser la norme considérée (elles sont toutes équivalentes).

   Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

   Soit alors une suite (u_n) d'éléments de F qui converge dans E. On peut écrire, pour tout n : $u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} u_{i,n}e_i$, et on sait alors que les p suites $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites ℓ_i.

   Puisque $u_n \in F$, on a $u_{i,n} = 0$ pour $i > q$ donc aussi $\ell_i = 0$ pour $i > q$. Ainsi la limite $\ell = \sum\limits_{i=1}^{p} \ell_i e_i$ de la suite u appartient-elle à F, ce qui démontre que F est fermé par caractérisation séquentielle.

2. Soit S le sous-ensemble de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ formé des matrices *stochastiques*, c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls et telles que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.
   Alors S est une partie fermée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

   Solution:

   Notons que, puisque $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il n'est pas utile de préciser la norme considérée, puisqu'elles sont toutes équivalentes.

   Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices stochastiques. On notera : $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.

   On suppose que la suite (A_n) converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vers une matrice $L = (\ell_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, c'est-à-dire que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$, la suite $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_{i,j}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. théorème 8).

   – Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}^{(n)} \geqslant 0$, donc par passage à la limite $\ell_{i,j} \geqslant 0$.

   – Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}^{(n)} = 1$ donc par passage à la limite $\sum\limits_{j=1}^{p} \ell_{i,j} = 1$.

   Cela prouve que L appartient à S, donc S est fermé par caractérisation séquentielle.

***Corollaire 10.1*:** Caractérisation séquentielle d'une partie dense

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Alors A est une partie dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration:

En effet, dire que A est une partie dense de E signifie que $\overline{A} = E$, et il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

Exercice Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Solution:

Notons que, puisque $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, il n'est pas utile de préciser la norme considérée, puisqu'elles sont toutes équivalentes.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. L'application $P : x \mapsto \det(A - xI_p)$ est polynômiale en x, de degré p, donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $\mathbb{K}$. Notons r le module minimum de ses racines non nulles (s'il en existe, sinon on peut choisir $r = 1$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $A_n = A - \frac{r}{n+1} I_p$ sont inversibles (car $\frac{r}{n+1}$ ne peut être une racine de P), et forment une suite de matrices de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ qui converge vers A.

Ainsi, toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles : $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Rem : Les 3 exercices précédents sont importants et sont à retenir.