

FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

On considère ici des applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et à valeurs dans un espace vectoriel normé E .

I. Définitions

I.1. Dérivée en un point

Déf 1:

Soit f une application de I dans E , et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\frac{df}{dt}(t_0)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0 .

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall t \in I, t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \implies \left\| \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0)) - \ell \right\| < \varepsilon$$

ou encore :

$$\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall t \in I, t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \implies \|f(t) - f(t_0) - (t - t_0) \cdot \ell\| < \varepsilon |t - t_0|$$

ou encore :

$$\exists \ell \in E \text{ tel que } f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot \ell + \vec{o}(t - t_0).$$

Cette dernière expression s'appelle un développement limité de f au voisinage de t_0 .

De la même façon que pour les fonctions à valeurs réelles, $\vec{o}(t - t_0)$ désigne une fonction à valeurs dans E de la forme $(t - t_0) \vec{\varepsilon}(t)$ où $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}(t) = 0_E$.

2. En posant $h = t - t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \cdot (f(t_0 + h) - f(t_0))$,

et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \vec{o}(h)$.

Déf 2:

Soit f une application de I dans E , et $t_0 \in I$.

– On dit que f est dérivable à droite en t_0 si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_d(t_0)$, et se nomme le vecteur dérivé à droite de f en t_0 .

– On dit que f est dérivable à gauche en t_0 si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_g(t_0)$, et se nomme le vecteur dérivé à gauche de f en t_0 .

Prop 1:

Soit f une application de I dans E , et $t_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit dérivable en t_0 , il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en ce point, et que $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ (et, dans ce cas, $f'(t_0) = f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$).

 Démonstration:

| Découle immédiatement du résultat correspondant sur les limites.

Prop 2:

| Si f est dérivable (resp. dérivable à gauche, resp. dérivable à droite) en t_0 , alors f est continue (resp. continue à gauche, resp. continue à droite) en t_0 .

 Démonstration:

| En effet, si f est dérivable en t_0 , elle y admet le développement limité $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \vec{o}(t - t_0)$. On en déduit immédiatement $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} f(t) = f(t_0)$, i.e la continuité de f en t_0 .



Rem : La réciproque de cette propriété est FAUSSE!

Il existe des fonctions continues et non dérivables (on peut même construire des applications continues partout, mais dérivables nulle part!).

Il suffit par exemple de considérer l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto |x| \end{cases}$.

f est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport 1), mais elle n'est pas dérivable en 0 (car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$).

I.2. Cas de la dimension finie**Théorème 1:**

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit f une application de I dans E . Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$$

où les $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f .

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_i est dérivable en t_0 , et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^n f'_i(t_0)e_i.$$

 Démonstration:

| Cela découle immédiatement d'un théorème similaire sur les limites, puisque, pour tout $t \neq t_0$,

$$\frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} e_i.$$

Exemples

1. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, et on a alors $f'(t_0) = (\operatorname{Re}(f))'(t_0) + i(\operatorname{Im}(f))'(t_0)$.

2. Une application $f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \end{cases}$ est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$ les fonctions coefficients $t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont, et dans ce cas la matrice $A'(t_0)$ est la matrice dont les coefficients sont les $a'_{i,j}(t_0)$.

I.3. Dérivabilité sur un intervalle

Déf 3:

- Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite dérivable sur I si pour tout $t_0 \in I$, f est dérivable en t_0 .
- Si tel est le cas, on peut définir l'application dérivée de $f : f' : \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto f'(t) \end{cases}$
- L'ensemble des applications dérivables sur I à valeurs dans E sera noté $\mathcal{D}(I, E)$.

Déf 4:

- Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est en plus continue sur I .
- On notera $\mathcal{C}^1(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans E .

II. Opérations sur les dérivées

Prop 3:

- Soient f et g deux applications de I dans E , dérivables en t_0 .
- Alors l'application $f + g$ est dérivable en t_0 , et $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

 *Démonstration:*

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0).f'(t_0) + (t - t_0).\vec{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad g(t) = g(t_0) + (t - t_0).g'(t_0) + (t - t_0).\vec{\varepsilon}_2(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}_i(t) = 0,$$

d'où en additionnant :

$$(f + g)(t) = (f + g)(t_0) + (t - t_0).[f'(t_0) + g'(t_0)] + (t - t_0).\vec{\varepsilon}(t)$$

avec $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$ qui tend vers 0 quand $t \rightarrow t_0$, ce qui démontre la proposition.

Prop 4:

- Soit f une application de I dans E , et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0 .
- Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.
- En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

 *Démonstration:*

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0).f'(t_0) + (t - t_0).\vec{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \lambda(t_0) + (t - t_0)\lambda'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t)$$

où $\vec{\varepsilon}_1$ (resp. ε_2) est une application à valeurs dans E (resp. dans $\mathbb{K}$) qui tend vers 0_E (resp. 0_K) quand t tend vers t_0 .

D'où, en effectuant la multiplication externe :

$$\lambda(t).f(t) = \lambda(t_0).f(t_0) + (t - t_0)[\lambda(t_0).f'(t_0) + \lambda'(t_0).f(t_0)] + (t - t_0).\vec{\varepsilon}_3(t)$$

où $\vec{\varepsilon}_3(t) = \dots$ tend vers 0 quand $t \rightarrow t_0$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 4.1:

- L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, E)$, et l'application $f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, E)$ dans $\mathcal{A}(I, E)$.

Théorème 2:

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E , et L une application linéaire continue de E dans F .

Si f est dérivable en t_0 , $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

 Démonstration:

Pour $t \in I$, $t \neq t_0$, on a $\frac{1}{t-t_0}(L[f(t)] - L[f(t_0)]) \underset{L \text{ linéaire}}{=} L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0}\right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} L[f'(t_0)]$ car L continue.

Exemple

Soit $t \mapsto A(t)$ une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors l'application $t \mapsto A^\top(t)$ est dérivable et : $\forall t \in I, (A^\top)'(t) = (A')^\top(t)$.

(on applique le théorème précédent avec $L: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie donc continue).

$$A \mapsto A^\top$$
Théorème 3:

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire *continue*. Soient $f: I \rightarrow E$ et $g: I \rightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi: \begin{cases} I & \rightarrow G \\ t & \mapsto B(f(t), g(t)) \end{cases}$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

 Démonstration:

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0)) = B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0))$$

d'où, toujours en utilisant la bilinéarité de B :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Puisque f est dérivable en t_0 , que g est continue (car dérivable) en t_0 et que B est continue, on a :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) = B(f'(t_0), g(t_0))$$

et de même

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right) = B(f(t_0), g'(t_0))$$

d'où le résultat.

Applications :

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t).$$

(En effet, l'application $B: \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$),
 $(M, N) \mapsto MN$
 et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.)

2. Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x | y \rangle \in \mathbb{R}$.
 Ce produit scalaire est une forme bilinéaire continue, car, $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. la caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire dans le chapitre précédent).

Donc, si f et g sont deux applications définies sur I , à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

$$\varphi: \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle \end{cases} \text{ est dérivable, et l'on a : } \langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle.$$

On en déduit ensuite que, si $f: I \rightarrow E$ est dérivable en t_0 et si $f(t_0) \neq 0$, l'application $t \mapsto \|f(t)\|$

est dérivable en t_0 , et $\|f\|'(t_0) = \frac{\langle f(t_0) | f'(t_0) \rangle}{\|f(t_0)\|}$.

3. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 ; l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto x \wedge y \in E$ est continue, puisqu'il s'agit d'une application bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

Donc, si f et g sont deux applications définies sur I , à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

$$\varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(t) \wedge g(t) \end{cases} \text{ est dérivable, et l'on a : } (f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'.$$

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

Théorème 4:

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, et $M: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n -linéaire continue.

Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soient $f_i: I \longrightarrow E_i$ n applications dérivables sur I .

Alors l'application $\varphi : \begin{cases} I & \longrightarrow F \\ t & \longmapsto M(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \end{cases}$ est dérivable sur I , et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n M(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f'_i(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t)).$$

Applications :

1. Si $f_1, \dots, f_n$ sont n applications dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, leur produit $g: t \mapsto f_1(t)f_2(t) \cdots f_n(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, g'(t) = f'_1(t)f_2(t) \cdots f_n(t) + f_1(t)f'_2(t)f_3(t) \cdots f_n(t) + \cdots + f_1(t)f_2(t) \cdots f_{n-1}(t)f'_n(t).$$

2. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathcal{B}$ est une base de E , l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est n -linéaire, donc continue (car E est de dimension finie).

Soit $A : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto A(t) \end{cases}$ une application dérivable sur I . Si on note $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de la matrice $A(t)$, alors les applications $t \mapsto C_i(t)$ sont dérivables sur I (car leurs fonctions coordonnées le sont). Par suite, l'application $\varphi: t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable sur I et :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \det(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C'_i(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t)).$$

Exercice d'application

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on pose : } D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D'_n(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

 **Solution:**

Puisque le déterminant d'une matrice est une somme de produits de termes de la matrice (un par ligne et par colonne), D_n est un polynôme en x , donc est dérivable.

En notant C_j les colonnes de la matrice, on a $C'_j = C_{j+1}$ pour $j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ donc en utilisant la formule précédente, il reste $D'_n = \det(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C'_n)$ et en développant selon la dernière colonne, on trouve $D'_n = D_{n-1}$.

On en déduit facilement par récurrence $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ (compte tenu de $D - n(0) = 0$).

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi: I \longrightarrow J$ et $f: J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0) \cdot f'[\varphi(t_0)]$$

 Démonstration:

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(t_0)$:

$$f(y) = f(\varphi(t_0)) + (y - \varphi(t_0)) \cdot f'[\varphi(t_0)] + (y - \varphi(t_0)) \cdot \vec{\varepsilon}_2(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y \rightarrow \varphi(t_0)} \vec{\varepsilon}_2(y) = 0_E.$$

On en déduit, en remplaçant y dans la 2ème équation par $\varphi(t)$ obtenue dans la 1ère :

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) \cdot f'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \cdot f'[\varphi(t_0)] + [(t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t)] \cdot \vec{\varepsilon}_2(\varphi(t))$$

soit une expression de la forme (calculs non détaillés)

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) \cdot f'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\vec{\varepsilon}_3(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varepsilon}_3(t) = 0_E$$

ce qui est bien un développement limité d'ordre 1 de $f \circ \varphi$ au voisinage de t_0 , et donne le résultat annoncé.

III. Dérivées successives

Déf 5:

Soit f une application de I dans E . On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathcal{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E .

On dira que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ; on note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans E .

Enfin on dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on notera $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I à valeurs dans E .

Prop 5:

$\mathcal{D}^n(I, E)$, $\mathcal{C}^n(I, E)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, E)$.

Si $f, g \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Prop 6:

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit f une application de I dans E . Pour tout $t \in I$, on peut écrire $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)e_i$, où les $f_i: I \rightarrow \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f .

Alors, f est k -fois dérivable [respectivement de classe $\mathcal{C}^k$] sur I si et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_i est k fois dérivable [respectivement de classe $\mathcal{C}^k$] sur I , et on a alors :

$$\forall t \in I, f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^n f_i^{(k)}(t)e_i.$$

Théorème 6: Formule de Leibniz

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient $f: I \rightarrow E$ et $g: I \rightarrow F$ deux applications n fois dérivables [resp. de classe $\mathcal{C}^n$] sur I .

Alors l'application $\varphi: \begin{cases} I & \rightarrow G \\ t & \mapsto B(f(t), g(t)) \end{cases}$ est n fois dérivable [resp. de classe $\mathcal{C}^n$] sur I , et on a :

$$\forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t))$$

Démonstration:

Avec les conventions habituelles, la formule de Leibniz peut aussi s'écrire : $\varphi^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$, en posant $B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Procédons par récurrence sur n :

- Le résultat est immédiat si $n = 0$, et, si $n = 1$, il s'agit du théorème 3
- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n - 1$, et soient f, g n fois dérivables. Elles sont alors $n - 1$ fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne :

$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-1-k)})$$

Toutes les fonctions qui interviennent dans la somme (de $f^{(0)}$ à $f^{(n-1)}$ et de $g^{(0)}$ à $g^{(n-1)}$) sont dérivables, donc $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable (c'est-à-dire que φ est n fois dérivable), et, en utilisant la linéarité de la dérivation ainsi que le théorème 3, on obtient :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} [B(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}) + B(f^{(k)}, g^{(n-k)})]$$

soit

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k-1} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \text{ changement d'indice } k = k' - 1 \text{ dans la 1ère somme} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}) \text{ d'après la formule du triangle de Pascal} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu à l'ordre n .

Corollaire 6.1:

$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire 6.2:

Soit $\varphi: I \rightarrow J$ et $f: J \rightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé. Si $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathcal{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(I, E)$

Démonstration:

On raisonne par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n , et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$. f' et φ étant de classe $\mathcal{C}^n$, $f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Puis φ' et $f' \circ \varphi$ étant de classe $\mathcal{C}^n$, leur produit externe $\varphi' \cdot f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ d'après la formule de Leibniz utilisée

avec l'application bilinéaire continue $B: \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \rightarrow E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}$

(la continuité de B résulte de la caractérisation d'une application multilinéaire continue, compte tenu de la relation $\|B(\lambda, x)\| = |\lambda| \|x\|$).

Ainsi $(f \circ \varphi)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

IV. Rappels indispensables du cours de Sup

On vient ici d'étudier la dérivabilité d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque.

Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

IV.1. Théorème des accroissements finis et applications

Théorème 7:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a intérieur à I un extrémum local.

Si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

 *Démonstration:*

Supposons que f admette en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leq f(a)$.

Alors, sur V , le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif pour $x \leq a$ et négatif pour $x \geq a$ (a étant intérieur à I , ces deux cas sont possibles).

En passant à la limite quand $x \rightarrow a$ (à gauche puis à droite), on obtient $f'_g(a) \geq 0$ et $f'_d(a) \leq 0$.

f étant dérivable en a , $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$, on en déduit $f'(a) = 0$.



Rem : Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !! Par exemple, la fonction $f : \begin{cases} [0;1] & \longrightarrow [0;1] \\ x & \longmapsto x \end{cases}$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ ($a < b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, à valeurs réelles, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

 *Démonstration:*

f , continue sur le segment $[a; b]$, est bornée et atteint ses bornes. Notons m son minimum et M son maximum.

- Si $m = M$, alors f est constante sur $[a; b]$ donc $f'(t) = 0$ pour tout $t \in]a; b[$.
- Sinon, l'un de ces extrema, par exemple M , est forcément distinct de $f(a) = f(b)$. Il est donc atteint en un point c de $]a; b[$, et l'on a $f'(c) = 0$ d'après le théorème précédent.

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, à valeurs réelles.

Alors, il existe c appartenant à $]a; b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

 *Démonstration:*

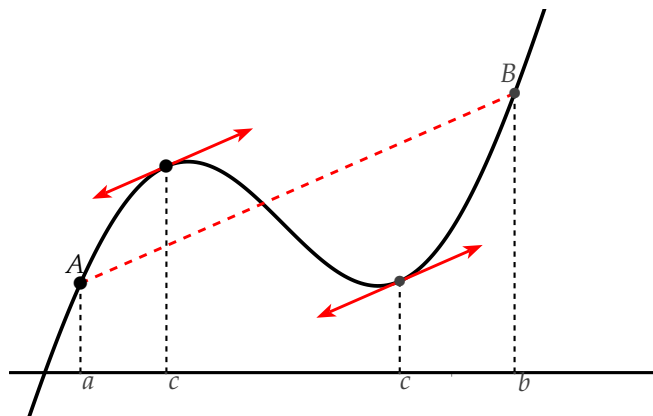
Soit φ définie sur $[a; b]$ par $\varphi(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$ (φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $(a, f(a))$ et B de coordonnées $(b, f(b))$), et soit g définie par $g(t) = f(t) - \varphi(t)$.

Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; il existe donc $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $f'(c) = \varphi'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis peut se traduire géométriquement par :

si f est une fonction numérique continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, il existe (au moins) un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la corde qui joint les points A de coordonnées $(a, f(a))$ et B de coordonnées $(b, f(b))$.



Rem : Le théorème des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension ≥ 2 !

Par exemple, l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$, mais il n'existe pas de c tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ ($a < b$), dérivable sur l'intervalle $]a; b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Démonstration:

Pour $x \in]a; b]$ on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in]a; b]$, d'après le théorème des accroissements finis.

Quand $x \rightarrow a$, on a aussi $c_x \rightarrow a$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = \ell$ d'où $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, ce qui est le résultat annoncé.

Remarques

1. Avec les mêmes notations, si l'on a $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \pm\infty$, la même démonstration permet de conclure que :

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, donc dans ce cas f n'est pas dérivable à droite en a et sa courbe représentative y admet une tangente parallèle à Oy .

2. Si l'on suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b]$, ce théorème montre en plus que f' est continue en a^+ (puisque $f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$), donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$.

Le théorème s'appelle alors **théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$** .

Exemples

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Solution:

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0 = f(0).$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

D'après le théorème précédent, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{6}$, ce qui prouve en même temps que f' est continue en 0.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $f: x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives en 0.

 **Solution:**

Déjà, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels (ici, quotient + composée).

En utilisant le théorème précédent, on montre ensuite par récurrence sur n la propriété :

$$(\mathcal{P}_n) : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R}, f^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ où } P_n \text{ est un polynôme de degré } 3n.$$

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit croissante [*resp.* décroissante] sur I , il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [*resp.* négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

 **Démonstration:**

- Supposons f croissante, et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Pour tout $x \neq a$, le rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif donc, en faisant $x \rightarrow a$, on obtient $f'(a) \geq 0$ d'après le principe de prolongement des inégalités.
- Supposons maintenant $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a; b[$ (donc $c \in \overset{\circ}{I}$) tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$; puisque $f'(c) \geq 0$, on en déduit $f(b) \geq f(a)$, donc f est croissante sur I .

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Prop 7:

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I , il *suffit* que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ [respectivement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$].



Rem : On notera que cette condition suffisante n'est pas nécessaire !

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule !

On a cependant le résultat suivant :

Théorème 12:

Soit f une fonction à valeurs réelles *continue* sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I , il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

 **Démonstration:**

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$. Et si par l'absurde Z était d'intérieur non vide, il existerait un intervalle ouvert J inclus dans Z . Sur cet intervalle, on a $f' = 0$, donc $f = \text{cste}$, ce qui contredit la stricte monotonie de f .
- Réciproquement, supposons $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, et $Z = \emptyset$. Alors f est croissante sur I d'après le théorème précédent. Et si f n'était pas strictement croissante, il existerait $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. On aurait alors $f = \text{cste}$ sur $[a; b]$, donc $]a; b[\subset Z$, contradiction.

Exemple

La fonction $x \mapsto x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f: I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J .

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

Démonstration:

Pour $y \neq y_0$ on a, en posant $x = f^{-1}(y)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

(puisque f est injective, la fonction $x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ est bien définie pour $x \neq x_0$).

Puisque $f'(x_0) \neq 0$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$. De plus, f^{-1} est continue donc quand $y \rightarrow y_0$ on a $x \rightarrow x_0$ et ainsi

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Théorème 13:

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que f' ne s'annule pas sur I .

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Démonstration:

Supposons f de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) de I sur J , telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I , donc f est strictement monotone. Elle est donc injective, donc bijective de I sur $J = f(I)$.

La proposition précédente montre alors que f^{-1} est dérivable sur J , de dérivée $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

f' et f^{-1} étant continues, on en déduit que $(f^{-1})'$ est continue, donc que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$, puis (si $k \geq 2$), f' de classe $\mathcal{C}^1$ et f^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$ impliquent $f' \circ f^{-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ donc $(f^{-1})'$ de classe $\mathcal{C}^1$ donc f^{-1} de classe $\mathcal{C}^2$ etc... (je vous laisse le soin de rédiger la récurrence)

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I . Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Démonstration:

Par récurrence sur n .

– Pour $n = 1$ la proposition est vraie, par définition de la dérivée.

– Supposons là démontrée à l'ordre $n - 1$ ($n \geq 2$), et soit f de classe $\mathcal{C}^n$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f' , ce qui donne :

$$\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^{n-1}).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En revenant à la définition du o , ce qui précède s'écrit :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[, \left| f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) \right| < \varepsilon |(x-a)^{n-1}|.$$

d'où en intégrant (ce qui est possible car f' est continue) et en utilisant l'inégalité $|\int \varphi| \leq \int |\varphi|$:

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[, \left| \int_a^x \left(f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) \right) dt \right| < \varepsilon \left| \int_a^x (t-a)^{n-1} dt \right|.$$

soit

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[, \left| f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) \right| < \varepsilon \frac{|(x-a)^n|}{n}$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^n)$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre n après un petit changement d'indice.

La formule de Taylor-Young donne donc l'existence d'un développement limité d'ordre n en a lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$.

Les développements limités des fonctions usuelles sont rappelés en Annexe, ils doivent être parfaitement sus.



Rem : Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n en un point a sans y être n fois dérivable (pour $n \geq 2$ bien sûr).

Exemple : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.

Alors f admet en 0 le développement limité d'ordre 2 : $f(x) = o(x^2)$.

Cependant, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$ (par le théorème de prolongement de la dérivée), donc le rapport $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, c'est-à-dire que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a; b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}.$$

(où $\|f^{(n+1)}\|_{\infty} = \sup \left\{ |f^{(n+1)}(x)|, x \in [a; b] \right\}$).

Démonstration:

Posons, pour tout $x \in [a; b]$:

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).
Compte tenu des hypothèses, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, et un calcul facile donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} (A - f^{(n+1)}(x)).$$

Puisque $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.
En écrivant $\varphi(a) = 0$, on obtient alors

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et l'inégalité cherchée s'en déduit puisque $|f^{(n+1)}(c)| \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty}$.

Corollaire 15.3:

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I . Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O((x-a)^{n+1}).$$

Rappelons que la notation $O((x-a)^{n+1})$ désigne une fonction de la forme $(x-a)^{n+1} \varphi(x)$ où φ est définie et bornée au voisinage de a .

IV.2. Fonctions convexes

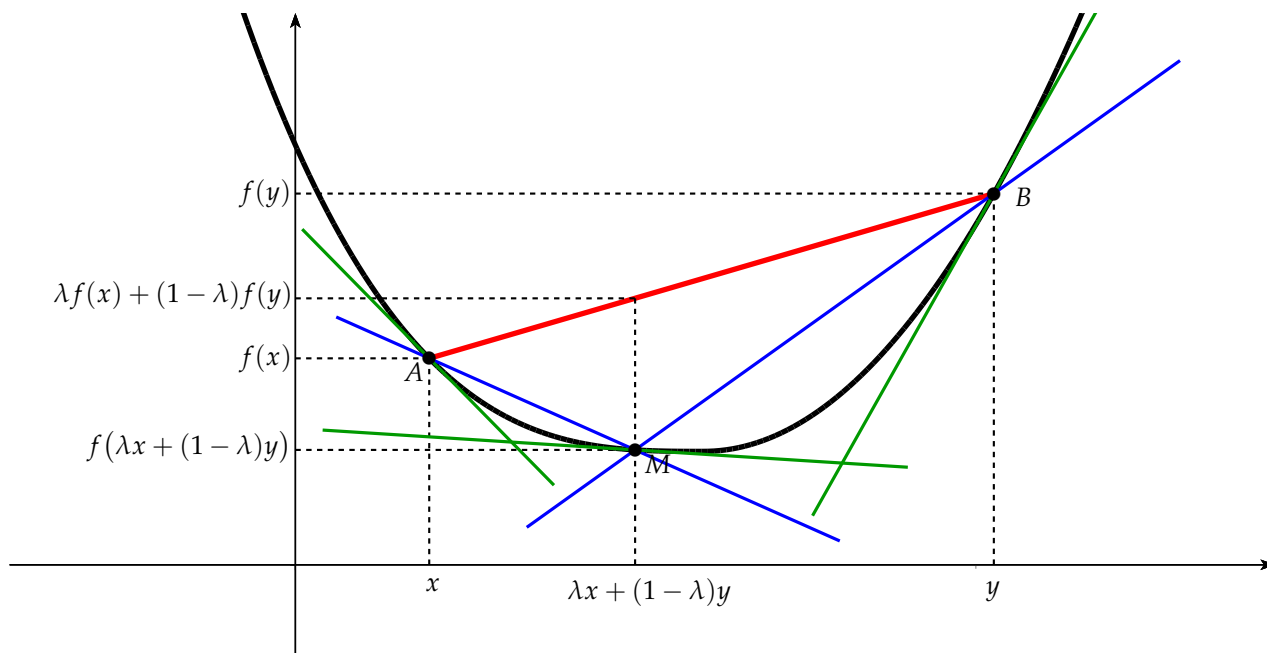
Déf 6:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Une fonction numérique $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Interprétation géométrique :

Dire que f est convexe équivaut à dire que le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x; y]$ de I est situé au-dessous de la corde joignant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.



On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que

$$\text{pente}((AM)) \leq \text{pente}((AB)) \leq \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

Lemme: *inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x; y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x; y] \subset I$ et tout $z \in]x; y[$, alors f est convexe sur I .

Démonstration:

On peut trouver $\lambda \in]0; 1[$ tel que $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$: il suffit de résoudre une équation du 1er degré, on trouve $\lambda = \frac{z-y}{x-y}$ (qui appartient bien à $]0; 1[$).

On a alors, par exemple :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) &\iff f(z) - f(x) \leq (1 - \lambda)(f(y) - f(x)) \\ &\iff f(z) - f(x) \leq \frac{x - z}{x - y}(f(y) - f(x)) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à la 1ère des inégalités proposées.

Théorème 16:

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I .

Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

 *Démonstration:*

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I , et soient $x, y \in I$ avec $x < y$.

On a vu que l'on a, pour tout $z \in]x; y[$:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

En faisant tendre z vers x à droite, on en déduit : $f'(x) = f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. On a aussi :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

donc en faisant tendre z vers y à gauche, on en déduit $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) = f'(y)$.

En particulier, on a $f'(x) \leq f'(y)$: f' est croissante.

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I . Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0; 1[$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

On a $z \in]x; y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x; z]$ et $[z; y]$ on obtient l'existence de $c \in]x; z[$ et de $d \in]z; y[$ tels que

$$f(z) - f(x) = (z - x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y - z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leq f'(d)$, d'où $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ ou encore, puisque $y - z = \lambda(y - x)$ et $z - x = (1 - \lambda)(y - x)$,

$$\frac{f(z) - f(x)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(y) - f(z)}{\lambda}$$

d'où l'on tire $f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, ce qui démontre la convexité de f .

Rem: En reprenant la figure ci-dessus, on a montré au passage (1ère partie de la démonstration) que la pente de la tangente en A est inférieure à celle de la droite (AB) , elle-même inférieure à celle de la tangente en B .

Corollaire 16.4:

Pour qu'une fonction numérique f , définie sur un intervalle ouvert I et deux fois dérivable sur I , soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité**Théorème 17:**

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

 *Démonstration:*

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :

$$y = (x - a)f'(a) + f(a)$$

et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x - a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.

- Réciproquement, supposons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes. Soient $a, b \in I$, avec $a < b$. La courbe étant située au-dessus de sa tangente en a on a :

$$\forall x \in I, f(x) \geq (x - a)f'(a) + f(a)$$

et en particulier pour $x = b$ on obtient (puisque $b > a$) : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq f'(a)$. La courbe étant située au-dessus de sa tangente en b on a :

$$\forall x \in I, f(x) \geq (x - b)f'(b) + f(b)$$

et en particulier pour $x = a$ on obtient (puisque $b > a$) : $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq f'(b)$.

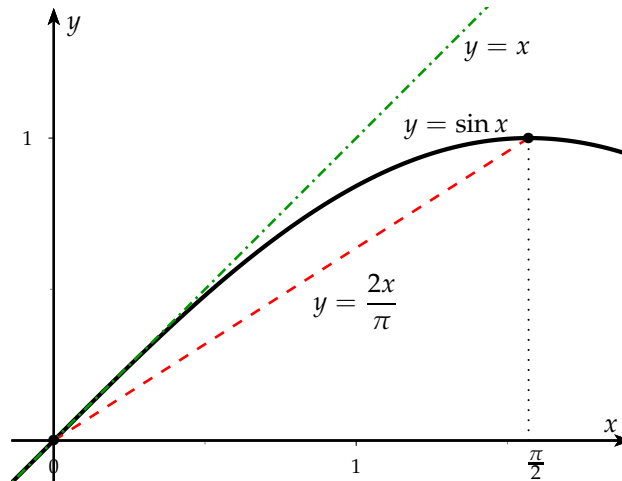
Avec les deux inégalités précédentes, on obtient $f'(a) \leq f'(b)$ donc f' est croissante et f est convexe.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement des inégalités célèbres :

1. $\forall x > -1, \ln x \leq x - 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$
3. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$

Ci-dessous, l'interprétation géométrique de la 3ème inégalité :



Pour terminer, donnons la définition suivante :

Déf 7:

➤ Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite concave si la fonction $-f$ est convexe.

Cela équivaut à dire que :

- $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$
- Pour f dérivable, f' est décroissante (et $f'' \leq 0$ pour f deux fois dérivable).
- le graphe de f est situé au-dessus de ses cordes et en-dessous de ses tangentes (pour f dérivable).

Annexe : développements limités usuels (au voisinage de 0)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n.n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n.n!}x^n + O(x^{n+1})$$

(Les développements limités de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ne sont évidemment pas à retenir par coeur : ils s'obtiennent facilement à partir du développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en prenant respectivement $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$).

