

Chapitre XIII : Suites et séries de fonctions

PSI*

Décembre 2022

Lycée d'Arsonval

SUITES DE FONCTIONS

Convergence simple

Définition 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que cette suite converge simplement sur I (en abrégé : CVS) si et seulement si

pour tout $x \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ existe (dans $\mathbb{K}$).

Convergence simple

Définition 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que cette suite converge simplement sur I (en abrégé : CVS) si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe (dans } \mathbb{K}\text{).}$$

Dans ce cas, on peut définir une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

f s'appelle la limite simple de la suite (f_n) .

Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0 ; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n . \end{cases}$

Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

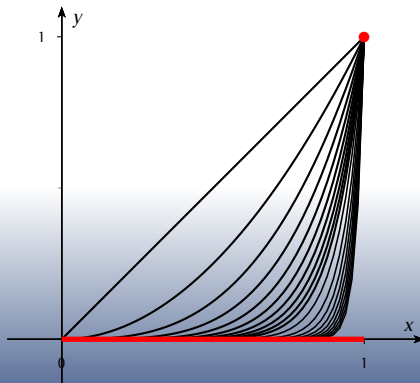
Pour déterminer la limite simple de cette suite de fonctions, il suffit de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ selon les valeurs de x .

Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

Pour déterminer la limite simple de cette suite de fonctions, il suffit de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n$ selon les valeurs de x . On obtient immédiatement que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction

$$f: x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

f_n est continue affine par morceaux sur $[0 ; 1]$, $f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

f_n est continue affine par morceaux sur $[0 ; 1]$, $f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$.

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction nulle.

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

$$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0 ; 1], \quad f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction nulle. En effet, soit $x \in [0 ; 1]$ fixé. Alors :

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

$$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0; 1], \quad f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle. En effet, soit $x \in [0; 1]$ fixé. Alors :

- soit $x = 0$ et alors $f_n(0) = 0$ pour tout n donc $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

$$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0; 1], \quad f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle. En effet, soit $x \in [0; 1]$ fixé. Alors :

- soit $x = 0$ et alors $f_n(0) = 0$ pour tout n donc $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- soit $x \in]0; 1]$, et alors on a $x > \frac{2}{n}$ pour n assez grand, d'où $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang et forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Exemple 2

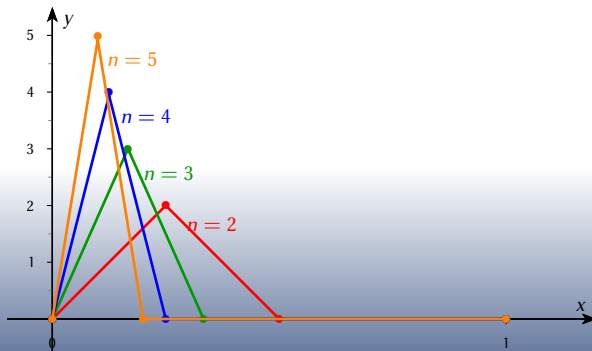
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n définie par :

$$f_n \text{ est continue affine par morceaux sur } [0; 1], \quad f_n(0) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n.$$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle. En effet, soit $x \in [0; 1]$ fixé. Alors :

- soit $x = 0$ et alors $f_n(0) = 0$ pour tout n donc $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- soit $x \in]0; 1]$, et alors on a $x > \frac{2}{n}$ pour n assez grand, d'où $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang et forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Ce résultat n'est pas très intuitif, si l'on regarde le graphique :



Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

ou encore, en réécrivant la définition de la limite :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{dépend de} \\ \varepsilon \text{ et de } x}} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

ou encore, en réécrivant la définition de la limite :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{dépend de} \\ \varepsilon \text{ et de } x}} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

S'il est normal que n_0 dépende de ε (plus on veut une approximation précise, plus il faut calculer de termes de la suite), il est parfois gênant qu'il dépende aussi de x (la suite ne converge pas partout vers f « à la même vitesse »).

Convergence uniforme

La convergence simple sur I d'une suite de fonctions (f_n) vers f s'écrit

$$\forall x \in I, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

ou encore, en réécrivant la définition de la limite :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{dépend de} \\ \varepsilon \text{ et de } x}} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

S'il est normal que n_0 dépende de ε (plus on veut une approximation précise, plus il faut calculer de termes de la suite), il est parfois gênant qu'il dépende aussi de x (la suite ne converge pas partout vers f « à la même vitesse »). Cela a conduit à la définition suivante :

Définition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

On dit que cette suite converge uniformément vers f sur I (en abrégé : CVU) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \underbrace{n_0}_{\substack{\text{ne dépend} \\ \text{que de } \varepsilon}} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Démonstration

En effet, dire que $\|f_n - f\|_{\infty}^I$ existe à partir d'un certain rang et tend vers 0 équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Démonstration

En effet, dire que $\|f_n - f\|_\infty^I$ existe à partir d'un certain rang et tend vers 0 équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire à : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

Proposition 1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , **alors** (f_n) converge simplement vers f .

Démonstration

Immédiat : il suffit de lire les deux définitions.

Théorème 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, et f une application de I dans $\mathbb{K}$.

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :

- les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang) ;
- et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0$, où on a posé : $\|f_n - f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

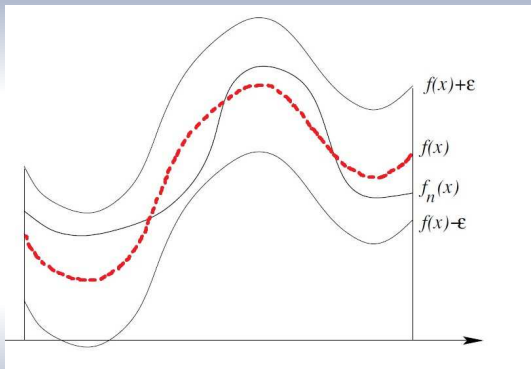
Démonstration

En effet, dire que $\|f_n - f\|_\infty^I$ existe à partir d'un certain rang et tend vers 0 équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire à : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq n_0 \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ce qui est exactement la définition de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I (et cette définition implique que $f_n - f$ est bornée pour $n \geq n_0$).

La figure suivante donne l'interprétation géométrique de cette définition. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f , alors pour n assez grand, le graphe de f_n reste dans un « tube » de largeur constante 2ε autour du graphe de f :



Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0 ; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n . \end{cases}$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 . \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0;1[} x^n = 1$, donc **la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0 ; 1]$.**

Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0;1]} x^n = 1$, donc **la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$.**

Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[0; a]$ avec $0 \leq a < 1$,

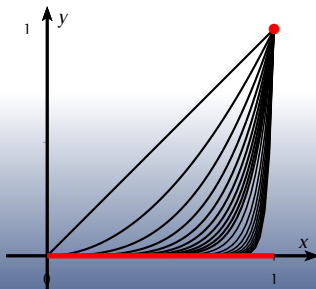
Exemple 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n. \end{cases}$

Alors la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0;1[} x^n = 1$, donc **la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$.**

Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[0; a]$ avec $0 \leq a < 1$, puisque $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0;a]} = \sup_{x \in [0;a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

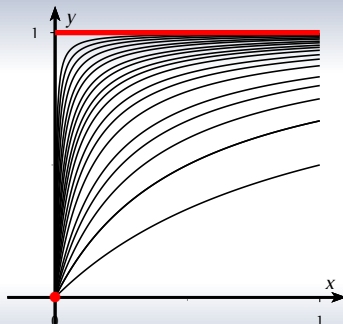


Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1+nx} \end{cases}$.

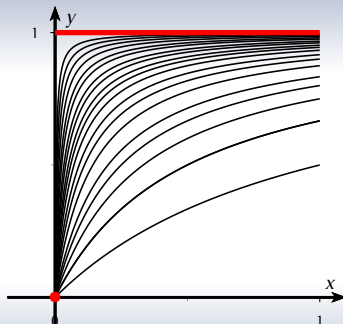
Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1+nx} \end{cases}$.



Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1 + nx} \end{cases}$.



Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1 + nx} \end{cases}$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exemple 2

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1 + nx} \end{cases}$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge

simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0;1]} \frac{1}{1 + nx} = 1$, donc **la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$.**

Exemple 2

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{nx}{1 + nx} \end{cases}.$$

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = 1$ donc la suite (f_n) converge

simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f: x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Or $\|f_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0;1]} \frac{1}{1 + nx} = 1$, donc **la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$.**

Cependant, il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a; 1]$ avec $0 < a \leq 1$, car

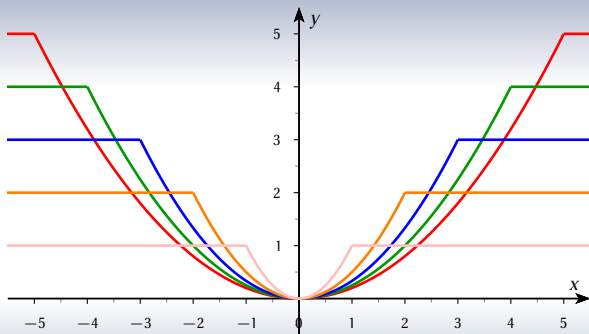
$$\|f_n - f\|_{\infty}^{[a;1]} = \sup_{x \in [a;1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + na} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Exemple 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min \left(n, \frac{x^2}{n} \right) . \end{cases}$

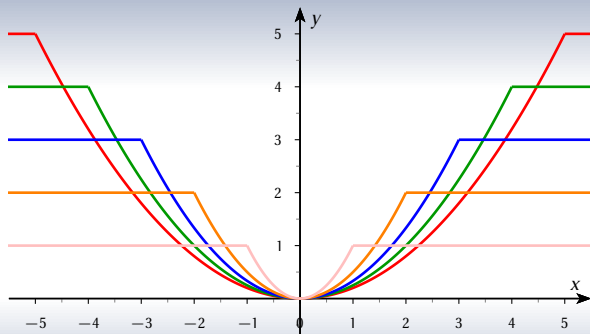
Exemple 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right) \end{cases}$.



Exemple 3

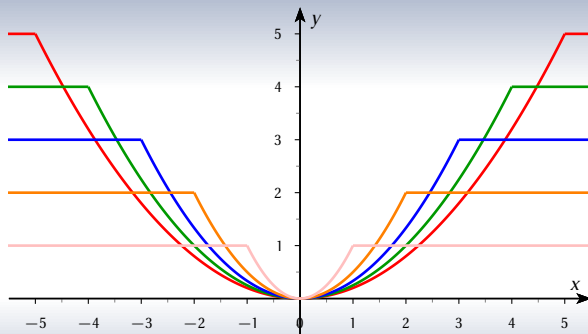
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right) \end{cases}.$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Exemple 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right) \end{cases}.$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Exemple 3

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right) . \end{cases}$$

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Exemple 3

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min \left(n, \frac{x^2}{n} \right) . \end{cases}$$

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Pendant, **il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$** , puisque $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = n$.

Exemple 3

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right) \end{cases}.$$

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Cependant, **il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$** , puisque $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = n$.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[-a; a]$ ($a > 0$).

Exemple 3

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \min \left(n, \frac{x^2}{n} \right) . \end{cases}$$

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. En effet :

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{x^2}{n} < n$ donc, pour $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Cependant, **il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$** , puisque $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = n$.

Il y a cependant convergence uniforme sur tout segment $[-a; a]$ ($a > 0$). En effet, à partir d'un certain rang n_0 , on a $\frac{a^2}{n} < n$, donc pour tout $x \in [-a; a]$, on aura, pour $n \geq n_0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ et

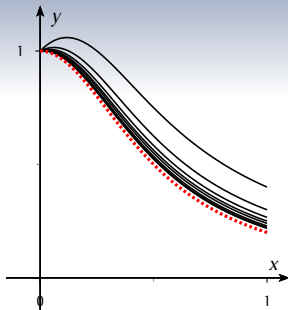
$$\sup_{x \in [-a; a]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{a^2}{n}, \text{ qui tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Exemple 4

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{cases}.$$

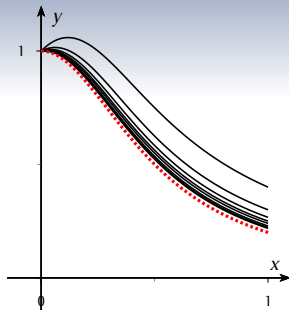
Exemple 4

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{cases}$.



Exemple 4

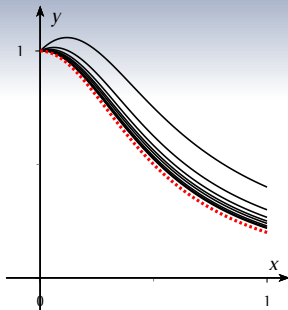
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{cases}$.



La suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$.

Exemple 4

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{cases}$.

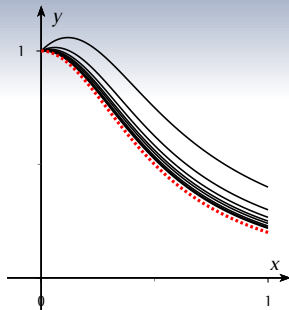


La suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$.

Il y a ici convergence uniforme sur $[0; 1]$ car :

Exemple 4

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x+n}{n+4nx^2} \end{cases}.$$



La suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{1+4x^2}$.

Il y a ici convergence uniforme sur $[0; 1]$ car :

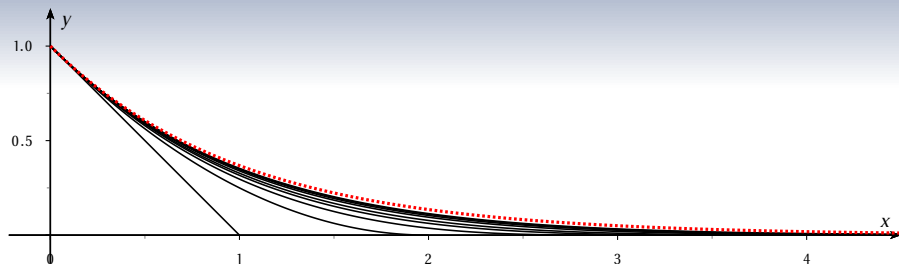
$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) - f(x) = \frac{x}{n(1+4x^2)} \text{ donc } \|f_n - f\|_{\infty}^{[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Exemple 5

$$\text{Soit, pour } n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$$

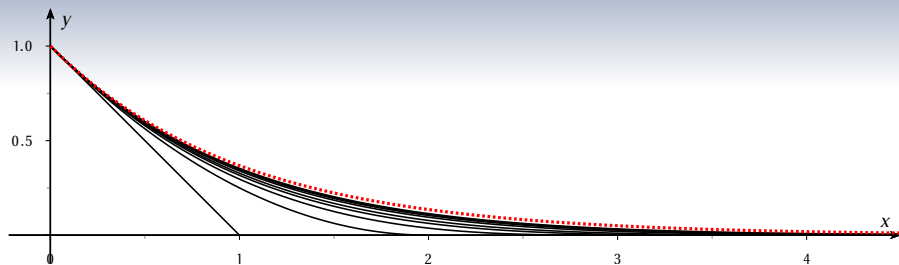
Exemple 5

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$



Exemple 5

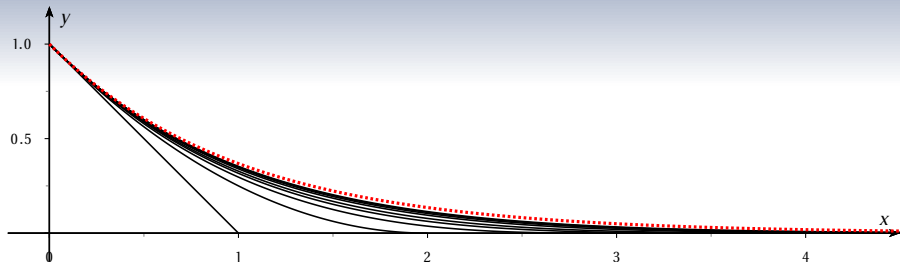
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f: x \mapsto e^{-x}$.

Exemple 5

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$

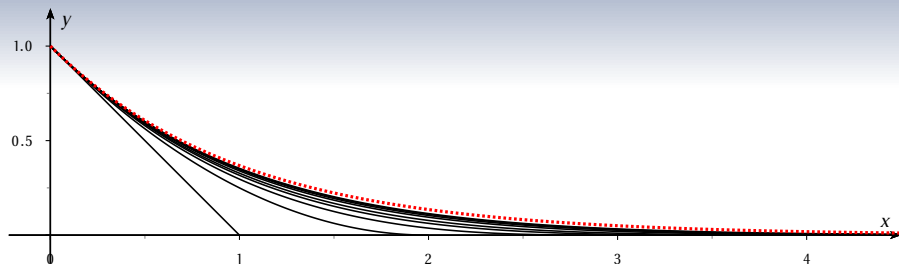


La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on aura $x \in [0 ; n[$ à partir d'un certain rang donc $f_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$,

Exemple 5

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$

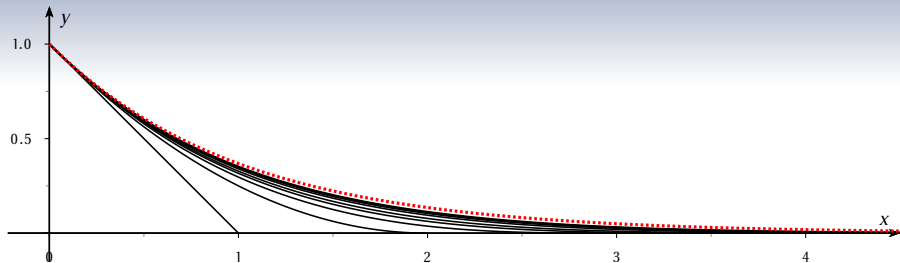


La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on aura $x \in [0 ; n[$ à partir d'un certain rang donc $f_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$, et puisque $\ln(1 - \frac{x}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - \frac{x}{n}) = -x$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

Exemple 5

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases} \end{cases}$



La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on aura $x \in [0 ; n[$ à partir d'un certain rang donc $f_n(x) = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$, et puisque $\ln(1 - \frac{x}{n}) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{x}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 - \frac{x}{n}) = -x$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

En étudiant la fonction $g_n : x \mapsto f(x) - f_n(x)$, nous allons montrer que $\|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{ne}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

- Pour $x \geqslant n$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant e^{-n}$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0 ; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant n. \end{cases}$$

- Pour $x \geqslant n$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant e^{-n}$.
- Pour $x \in [0 ; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que : $\forall x \in [0; n[$, $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geq e^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = g_n(\alpha_n)$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que : $\forall x \in [0; n[$, $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geq e^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = g_n(\alpha_n)$.

Il reste à estimer la valeur de $g_n(\alpha_n)$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que : $\forall x \in [0; n[$, $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geq e^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}^+} = g_n(\alpha_n)$.

Il reste à estimer la valeur de $g_n(\alpha_n)$. Sachant que α_n est tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, on a $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$ donc

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que : $\forall x \in [0; n[$, $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geq e^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = g_n(\alpha_n)$.

Il reste à estimer la valeur de $g_n(\alpha_n)$. Sachant que α_n est tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, on a $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$ donc

$$g_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) e^{-\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n} \leq \frac{1}{ne}$$

puisque une étude rapide montre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$.

Solution

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0; n[\\ e^{-x} & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

- Pour $x \geq n$, $0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$.
- Pour $x \in [0; n[$, on étudie les variations de g_n . $g'_n(x) = -\left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right)$ donc

$$g'_n(x) \geq 0 \iff e^{-x} \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \iff -x \leq (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \iff h_n(x) \geq 0$$

où l'on a posé $h_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$. On étudie alors rapidement h_n (toujours sur $[0; n[$).

$h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$, et l'étude des variations de h_n montre qu'il existe $\alpha_n \in]1; n[$ tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, et que $h_n(x) \geq 0$ pour $x \leq \alpha_n$ et $h_n(x) \leq 0$ pour $x \geq \alpha_n$.

On en déduit ainsi le tableau de variations de g_n (*non reproduit ici*), qui montre que : $\forall x \in [0; n[$, $0 \leq g_n(x) \leq g_n(\alpha_n)$. On a aussi sur ce tableau $g_n(\alpha_n) \geq e^{-n}$, de sorte que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = g_n(\alpha_n)$.

Il reste à estimer la valeur de $g_n(\alpha_n)$. Sachant que α_n est tel que $h_n(\alpha_n) = 0$, on a $e^{-\alpha_n} = \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^{n-1}$ donc

$$g_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = e^{-\alpha_n} - \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) e^{-\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n} \leq \frac{1}{ne}$$

puisque une étude rapide montre que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$. Cela démontre le résultat annoncé.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Démonstration

On applique la définition de la convergence uniforme, avec par exemple $\varepsilon = 1$; cela donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Démonstration

On applique la définition de la convergence uniforme, avec par exemple $\varepsilon = 1$; cela donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

On a alors, en particulier :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq 1$$

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Démonstration

On applique la définition de la convergence uniforme, avec par exemple $\varepsilon = 1$; cela donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

On a alors, en particulier :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq 1$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + 1 \leq \|f_{n_0}\|_{\infty} + 1$$

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Démonstration

On applique la définition de la convergence uniforme, avec par exemple $\varepsilon = 1$; cela donne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

On a alors, en particulier :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq 1$$

d'où, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + 1 \leq \|f_{n_0}\|_{\infty} + 1$$

ce qui montre que f est bornée sur I .

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Remarque : Le résultat ne subsiste pas si il y a seulement convergence simple : considérer par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \text{ si } x \in]0; 1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Remarque : Le résultat ne subsiste pas si il y a seulement convergence simple : considérer par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \text{ si } x \in]0 ; 1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

Proposition 3: et déf 3

L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

Proposition 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui converge **uniformément** sur I vers une application $f: I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Si les f_n sont bornées sur I , alors f est bornée sur I .

Remarque : Le résultat ne subsiste pas si il y a seulement convergence simple : considérer par exemple la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx+1} \text{ si } x \in]0; 1] \quad \text{et} \quad f_n(0) = 0.$$

Proposition 3: et déf 3

L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Cette norme s'appelle la norme de la convergence uniforme.

D'après la proposition 2, si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, alors $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, et la convergence uniforme de (f_n) vers f s'écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0,$$

c'est-à-dire que la suite (f_n) tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \| \cdot \|_{\infty})$ (au sens qui a été vu dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

CONTINUITÉ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang);
- il existe un voisinage V de a tel que **la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V .**

Alors f est continue en a .

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang);
- il existe un voisinage V de a tel que **la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V** .

Alors f est continue en a .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, on a en particulier :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in V, |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang);
- il existe un voisinage V de a tel que **la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V .**

Alors f est continue en a .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, on a en particulier :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in V, |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque f_N est continue en a on a :

$$\exists V' \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V', |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang);
- il existe un voisinage V de a tel que **la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V** .

Alors f est continue en a .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, on a en particulier :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in V, |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque f_N est continue en a on a :

$$\exists V' \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V', |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, pour tout $x \in V \cap V'$ on aura, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Théorème 2: Continuité de la limite

Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, qui converge simplement vers une application $f: I \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in I$. On suppose que :

- les f_n sont continues en a (au moins à partir d'un certain rang);
- il existe un voisinage V de a tel que **la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V .**

Alors f est continue en a .

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, on a en particulier :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in V, |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque f_N est continue en a on a :

$$\exists V' \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V', |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, pour tout $x \in V \cap V'$ on aura, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon$$

ce qui est la définition de la continuité de f en a .

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Démonstration

En effet, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur V . D'après le théorème précédent, f est continue en a , et puisque cela est vrai pour tout $a \in I$, f est continue sur I .

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Qui peut le plus peut le moins :

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Remarque : Ce théorème peut parfois servir à montrer qu'il n'y a **pas** convergence uniforme.

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Remarque : Ce théorème peut parfois servir à montrer qu'il n'y a **pas** convergence uniforme.

Reprenons le premier exemple du chapitre, avec $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0; 1]$. On a vu que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Définition 4

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et si, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la convergence de (f_n) vers f sur V soit uniforme, on dira qu'il y a convergence uniforme locale sur I .

Remarque : Il est clair que, s'il y a convergence uniforme sur I entier, il y a a fortiori convergence uniforme locale ; la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0 ; 1[$.

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I , **la convergence étant uniforme locale**, et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Qui peut le plus peut le moins :

Corollaire:

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si les f_n sont continues sur I , alors f est continue sur I .

Remarque : Ce théorème peut parfois servir à montrer qu'il n'y a **pas** convergence uniforme.

Reprenons le premier exemple du chapitre, avec $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0 ; 1]$. On a vu que la suite (f_n) converge simplement sur $[0 ; 1]$ vers la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Les f_n sont continues sur $[0 ; 1]$ mais pas f : il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $[0 ; 1]$.

INTÉGRATION D'UNE SUITE DE FONCTIONS SUR UN SEGMENT

Théorème 3: Intersion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2.

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors :

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt = (b - a) \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt = (b - a) \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

et le résultat découle de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$.

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt = (b - a) \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

et le résultat découle de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$.

Remarque : Le théorème s'applique également à une suite de fonctions f_n **continues par morceaux**, qui converge uniformément sur $[a; b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**.

Théorème 3: Intversion limite-intégrale sur un segment.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, et **convergeant uniformément sur $[a; b]$** vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a; b]$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration

La continuité de f est assurée par le théorème 2. La continuité des fonctions en présence assure aussi l'existence des intégrales considérées. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty} dt = (b - a) \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

et le résultat découle de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$.

Remarque : Le théorème s'applique également à une suite de fonctions f_n **continues par morceaux**, qui converge uniformément sur $[a; b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**. La démonstration est similaire, *mais il faut en plus vérifier la continuité par morceaux de f , celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.*



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0!

Exemple 2

Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } t \in \left[0; n - \frac{1}{n}\right] \quad ; \quad f_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0!

Exemple 2

Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } t \in \left[0; n - \frac{1}{n}\right] \quad ; \quad f_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

Alors $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n}$ donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.



Les deux hypothèses « convergence uniforme » et « l'intervalle d'intégration est un segment » sont indispensables, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

On a déjà montré que la suite (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers 0 !

Exemple 2

Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \quad \text{pour } t \in \left[0; n - \frac{1}{n}\right] \quad ; \quad f_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq n \quad \text{et} \quad f_n \text{ continue affine par morceaux.}$$

Alors $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n}$ donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Cependant, on vérifie facilement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = 1$.

DÉRIVATION D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Remarque :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Remarque :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Remarque :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Cependant, $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$, et la suite (f_n') n'a même pas de limite simple !

Remarque :

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

On n'a pas nécessairement $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, même s'il y a convergence uniforme !

Exemple

Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Cependant, $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$, et la suite (f_n') n'a même pas de limite simple !

Il faut donc des hypothèses supplémentaires pour pouvoir dériver la limite d'une suite de fonctions.

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Démonstration

- Puisque la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément localement vers g sur I , d'après le théorème 2 g est continue sur I .

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Démonstration

- Puisque la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément localement vers g sur I , d'après le théorème 2 g est continue sur I .
- Soit $a \in I$, et V un intervalle contenant a sur lequel il y a convergence uniforme de la suite (f'_n) vers g .

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Démonstration

- Puisque la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément localement vers g sur I , d'après le théorème 2 g est continue sur I .
- Soit $a \in I$, et V un intervalle contenant a sur lequel il y a convergence uniforme de la suite (f'_n) vers g . Pour tout $x \in V$ on a $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$.

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Démonstration

- Puisque la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément localement vers g sur I , d'après le théorème 2 g est continue sur I .
- Soit $a \in I$, et V un intervalle contenant a sur lequel il y a convergence uniforme de la suite (f'_n) vers g . Pour tout $x \in V$ on a $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$. Puisque la convergence de la suite (f'_n) vers g est uniforme sur le segment $[a; x]$ (ou $[x; a]$), le théorème 3 donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt.$$

Théorème 4: Dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f .
- b) La suite de fonctions (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale sur I** .

Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)$ (soit, en abrégé, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$).

De plus, la suite (f_n) converge uniformément localement vers f .

Démonstration

- Puisque la suite de fonctions continues (f'_n) converge uniformément localement vers g sur I , d'après le théorème 2 g est continue sur I .
- Soit $a \in I$, et V un intervalle contenant a sur lequel il y a convergence uniforme de la suite (f'_n) vers g . Pour tout $x \in V$ on a $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$. Puisque la convergence de la suite (f'_n) vers g est uniforme sur le segment $[a; x]$ (ou $[x; a]$), le théorème 3 donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt.$$
- De plus, la convergence simple de la suite (f_n) vers f donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = f(a)$.

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) \, dt$.

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$.

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f'_n) converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f'_n) converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \forall x \in J, \quad |f_n(x) - f(x)| &= \left| (f_n(a) - f(a)) + \left(\int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right) \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J \end{aligned}$$

en notant $\ell(J)$ la longueur de J .

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f'_n) converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \forall x \in J, |f_n(x) - f(x)| &= \left| (f_n(a) - f(a)) + \left(\int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right) \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J \end{aligned}$$

en notant $\ell(J)$ la longueur de J .

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_\infty^J \leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J,$$

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f'_n) converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \forall x \in J, |f_n(x) - f(x)| &= \left| (f_n(a) - f(a)) + \left(\int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right) \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J \end{aligned}$$

en notant $\ell(J)$ la longueur de J .

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_\infty^J \leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J,$$

et puisque la convergence de (f'_n) vers g est uniforme sur J , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - g\|_\infty^J = 0$ d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^J = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur J .

Démonstration (suite)

- On en déduit, pour tout $x \in V$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et $f' = g$. Cela étant vrai au voisinage de tout $a \in I$, c'est vrai sur I (les notions de continuité et de dérivabilité sont des notions locales).
- Enfin, si a est un élément de I et si J est un segment contenant a sur lequel la suite (f'_n) converge uniformément vers g (il en existe par hypothèse), on aura, grâce à l'inégalité triangulaire et à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned} \forall x \in J, |f_n(x) - f(x)| &= \left| (f_n(a) - f(a)) + \left(\int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right) \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J \end{aligned}$$

en notant $\ell(J)$ la longueur de J .

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_\infty^J \leq |f_n(a) - f(a)| + \ell(J) \|f'_n - g\|_\infty^J,$$

et puisque la convergence de (f'_n) vers g est uniforme sur J , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - g\|_\infty^J = 0$ d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^J = 0$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur J .

Il y a donc bien CVUL de (f_n) vers f .

Corollaire: Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que :

- a) Pour tout $j \in \llbracket 0 ; k - 1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- b) La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale**.

Alors, la fonction $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , on a $f^{(k)} = g$ et pour $j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

Corollaire: Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) Pour tout $j \in \llbracket 0 ; k - 1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- b) La suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I vers une fonction g , **la convergence étant uniforme locale**.

Alors, la fonction $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , on a $f^{(k)} = g$ et pour $j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

Corollaire: Suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ;
- b) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq p$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge simplement sur I , **la convergence étant uniforme locale**.

Alors, la fonction $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , et pour $j \in \mathbb{N}$, chaque suite $(f_n^{(j)})$ converge uniformément localement vers $f^{(j)}$.

SÉRIES DE FONCTIONS

Généralités

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Étudier la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n) .

Généralités

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Étudier la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n) .

Définition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S .

Généralités

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Étudier la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n) .

Définition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$

telle que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S .

Cela signifie donc que, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Généralités

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$. On peut alors considérer la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Étudier la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite de fonctions (S_n) .

Définition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$

telle que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I vers S .

Cela signifie donc que, pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, converge et que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

S s'appelle alors la somme de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. On définit également le reste d'ordre n

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k. \text{ La suite de fonctions } (R_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers la fonction nulle.}$$

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S: I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S: I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = 0$).

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S: I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = 0$).

Démonstration

En effet, si la série converge uniformément sur I , elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S: I \rightarrow E$.

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$).

Démonstration

En effet, si la série converge uniformément sur I , elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S : I \rightarrow E$. Par définition de la convergence uniforme de la suite (S_n) des sommes partielles vers S , la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = 0$).

Démonstration

En effet, si la série converge uniformément sur I , elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S : I \rightarrow E$. Par définition de la convergence uniforme de la suite (S_n) des sommes partielles vers S , la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_{\infty}^I = 0.$$

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$).

Démonstration

En effet, si la série converge uniformément sur I , elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S : I \rightarrow E$. Par définition de la convergence uniforme de la suite (S_n) des sommes partielles vers S , la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_\infty^I = 0.$$

La réciproque est identique.

Définition 6

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I s'il existe une application $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur I vers S .

Théorème 5

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et si la suite des restes (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle (autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$).

Démonstration

En effet, si la série converge uniformément sur I , elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S : I \rightarrow E$. Par définition de la convergence uniforme de la suite (S_n) des sommes partielles vers S , la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_\infty^I = 0.$$

La réciproque est identique.

Remarque : Comme pour les suites, on définit de la même manière la notion de **convergence uniforme locale** : lorsqu'il y a convergence uniforme au voisinage de tout point de I , c'est-à-dire si pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty^V = 0$.

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

- **Convergence simple :**

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

● Convergence uniforme :

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

● Convergence uniforme :

Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

● Convergence uniforme :

Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\text{donc } \|R_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$$

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

● Convergence uniforme :

Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

donc $\|R_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$ puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série numérique convergente.

Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

Solution

● Convergence simple :

Pour $|x| > 1$, $\frac{x^n}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement.

Si $|x| \leq 1$, $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison à la série convergente à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. En conclusion, la série converge simplement sur $[-1; 1]$ et on peut donc poser :

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

● Convergence uniforme :

Pour tout $x \in [-1; 1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

donc $\|R_n\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$ puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série numérique convergente.

En conclusion, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge uniformément vers f sur $[-1; 1]$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

- Convergence simple :

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

- **Convergence simple :**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

- **Convergence simple :**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Cependant : il y a convergence uniforme sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $A =]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Cependant : il y a convergence uniforme sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $A =]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$ avec $a > 0$. En effet, si $x \neq 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^k} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Cependant : il y a convergence uniforme sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $A =]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$ avec $a > 0$. En effet, si $x \neq 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^k} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

$$\text{donc } \|R_n\|_{\infty}^A = \frac{1}{(a^2 + 1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple 2 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n}$.

Solution

● Convergence simple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, donc elle converge, et sa somme S est telle que $S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

En conclusion, la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

● Convergence uniforme :

Les u_n étant continues, il en est de même des sommes partielles de la série ; la fonction limite S n'étant pas continue, il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Cependant : il y a convergence uniforme sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $A =]-\infty ; -a] \cup [a ; +\infty[$ avec $a > 0$. En effet, si $x \neq 0$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^k} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

donc $\|R_n\|_{\infty}^A = \frac{1}{(a^2 + 1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit qu'il y a CVUL sur $\mathbb{R}^*$.

Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 7

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)

Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 7

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- et la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$ est convergente (en notant comme d'habitude :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |u_n(x)|.$$

Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 7

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- et la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|'_\infty$ est convergente (en notant comme d'habitude :

$$\|u_n\|'_\infty = \sup_{x \in I} |u_n(x)|.$$

Remarque : Pour montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est normalement convergente, il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\|u_n\|'_\infty \leq \alpha_n$ (c'est-à-dire $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ pour tout $x \in I$), et telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ converge.

Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 7

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement sur I si :

- les fonctions u_n sont bornées sur I (au moins à partir d'un certain rang)
- et la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_{\infty}'$ est convergente (en notant comme d'habitude :

$$\|u_n\|_{\infty}' = \sup_{x \in I} |u_n(x)|.$$

Remarque : Pour montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est normalement convergente, il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\|u_n\|_{\infty}' \leq \alpha_n$ (c'est-à-dire $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ pour tout $x \in I$), et telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ converge.

Théorème 6

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge.

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{\infty}^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_{\infty}^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente.

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente. Elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I .

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente. Elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . On aura alors :

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente. Elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . On aura alors :

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty^I$$

Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **normalement convergente** sur I , alors :

- ❶ Pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$.
- ❷ La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est uniformément convergente sur I .

Démonstration

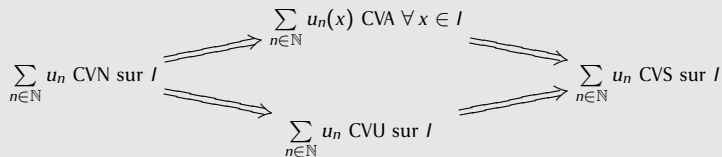
Supposons donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty^I$ convergente.

Puisque, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq \|u_n\|_\infty^I$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ est absolument convergente. Elle est donc convergente, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . On aura alors :

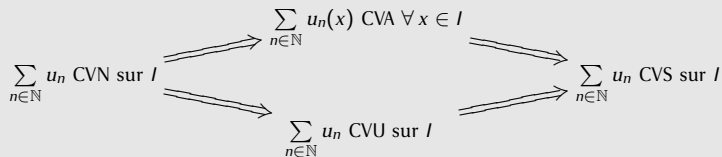
$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty^I$$

d'où $\|R_n\|_\infty^I \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty^I}_{\text{reste d'une série numérique convergente}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série.

En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :

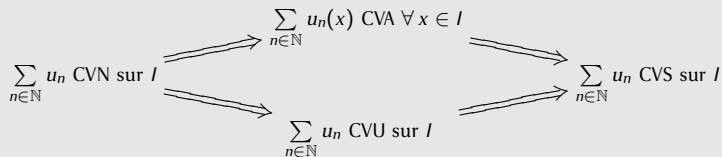


En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :



Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :

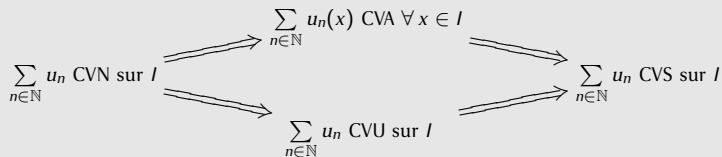


Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

Solution

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$.

En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :

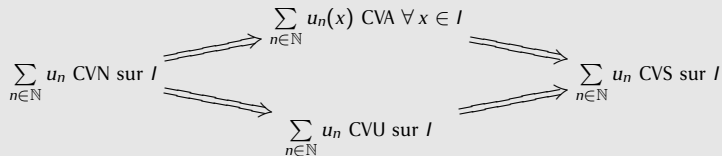


Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

Solution

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. On a $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout x , donc $\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$.

En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :



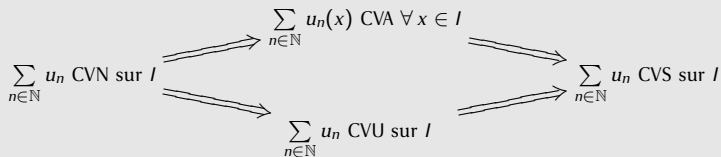
Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

Solution

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. On a $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout x , donc $\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$.

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ converge.

En utilisant les abréviations CVS, CVA, CVU et CVN pour convergence simple, absolue, uniforme et normale respectivement, on a donc la suite d'implications :



Exemple 1 : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

Solution

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. On a $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout x , donc $\|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$.

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, il résulte du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ converge.

Ainsi, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

- **Convergence simple :**

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

- **Convergence simple :**

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● **Convergence simple :**

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● **Convergence simple :**

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● Convergence simple :

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● Convergence simple :

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

En conclusion : la série converge simplement sur l'intervalle $] -1 ; 1]$.

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● Convergence simple :

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

En conclusion : la série converge simplement sur l'intervalle $] -1 ; 1]$.

● Convergence normale :

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● Convergence simple :

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

En conclusion : la série converge simplement sur l'intervalle $] -1 ; 1]$.

● Convergence normale :

Il n'y a pas convergence normale sur tout l'intervalle $] -1 ; 1]$. En effet, $\|u_n\|_{\infty}^{[1-1;1]} = \frac{1}{n}$, et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge !

Exemple 2 (important) : Étude de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Solution

On posera, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

● Convergence simple :

- Pour $|x| > 1$, $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Pour $x = 1$ la série converge (série harmonique alternée), et pour $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
- Pour $|x| < 1$, on a $|u_n(x)| \leq |x|^n$. Or la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| < 1$, donc convergente. Les théorèmes de comparaison usuels sur les séries à termes réels positifs assurent alors la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

En conclusion : la série converge simplement sur l'intervalle $] -1 ; 1]$.

● Convergence normale :

Il n'y a pas convergence normale sur tout l'intervalle $] -1 ; 1]$. En effet, $\|u_n\|_{\infty}^{[-1;1]} = \frac{1}{n}$, et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge !

Cependant, il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout intervalle de la forme $[-a ; a]$ avec $0 \leq a < 1$. En effet, $\|u_n\|_{\infty}^{[-a;a]} = \frac{a^n}{n}$, et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$ converge comme il a été vu plus haut.

Solution (suite)**• Convergence uniforme :**

Il n'y a pas convergence normale sur $[0 ; 1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0 ; 1]$.

Solution (suite)**• Convergence uniforme :**

Il n'y a pas convergence normale sur $[0 ; 1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0 ; 1]$.

En effet, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du CSSA (vérification immédiate).

Solution (suite)**• Convergence uniforme :**

Il n'y a pas convergence normale sur $[0 ; 1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0 ; 1]$.

En effet, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du CSSA (vérification immédiate).

On a donc, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$,

Solution (suite)● **Convergence uniforme :**

Il n'y a pas convergence normale sur $[0 ; 1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0 ; 1]$.

En effet, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du CSSA (vérification immédiate).

On a donc, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\|R_n\|_{\infty}^{[0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

Solution (suite)● **Convergence uniforme :**

Il n'y a pas convergence normale sur $[0; 1]$, mais montrons cependant qu'il y a convergence uniforme sur $[0; 1]$.

En effet, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du CSSA (vérification immédiate).

On a donc, pour tout $x \in [0; 1]$, $|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\|R_n\|_{\infty}^{[0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme sur $[0; 1]$ (on en déduit facilement qu'il y a alors convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a; 1]$ avec $-1 < a \leq 0$).

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Le théorème suivant, important, est admis.

Théorème 8: Interversion des limites (ou « théorème de la double limite »).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $a \in \bar{I}$ (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que, pour tout entier n , la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x) = \ell_n$ existe, et

que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **uniformément convergente dans un voisinage de a** . Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors :

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$ converge

- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire en abrégé : $\lim_a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a u_n$).

Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Le théorème suivant, important, est admis.

Théorème 8: Interversion des limites (ou « théorème de la double limite »).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $a \in \bar{I}$ (éventuellement $\pm\infty$). On suppose que, pour tout entier n , la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} u_n(x) = \ell_n$ existe, et

que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **uniformément convergente dans un voisinage de a** . Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors :

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$ converge
- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ (c'est-à-dire en abrégé : $\lim_a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_a u_n$).

Les théorèmes qui suivent découlent directement des théorèmes similaires concernant les suites de fonctions (on applique ces théorèmes aux sommes partielles de la série de fonctions).

Théorème 9: Continuité de la somme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur V .**

Alors S est continue en a .

Théorème 9: Continuité de la somme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur V .**

Alors S est continue en a .

Corollaire:

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si les u_n sont continues sur I et si la série **converge uniformément localement sur I** , alors sa somme S est continue sur I .

Théorème 9: Continuité de la somme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur V .**

Alors S est continue en a .

Corollaire:

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si les u_n sont continues sur I et si la série **converge uniformément localement sur I** , alors sa somme S est continue sur I .

Démonstration

En effet, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur V . D'après le théorème précédent appliqué sur V , S est continue en a .

Théorème 9: Continuité de la somme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I . Soit S sa somme. On suppose que :

- les u_n sont continues en a ;
- il existe un voisinage V de a tel que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur V .**

Alors S est continue en a .

Corollaire:

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si les u_n sont continues sur I et si la série **converge uniformément localement sur I** , alors sa somme S est continue sur I .

Démonstration

En effet, pour tout $a \in I$ il existe un voisinage V de a tel que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur V . D'après le théorème précédent appliqué sur V , S est continue en a .

Ainsi S est continue en tout point de I c'est-à-dire sur I .

Théorème 10: Intversion série-intégrale sur un segment.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur **un segment** $[a; b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que **les u_n sont continues sur $[a; b]$** , et que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur**

$[a; b]$. Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors S est continue sur $[a; b]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b u_n(t) dt$ converge, et $\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$.

Théorème 10: Intversion série-intégrale sur un segment.

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur **un segment** $[a; b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que **les u_n sont continues sur $[a; b]$** , et que **la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur $[a; b]$** . Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Alors S est continue sur $[a; b]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b u_n(t) dt$ converge, et $\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$.

Remarque : Le théorème s'applique également lorsque les u_n sont seulement **continues par morceaux**, mais il faut alors vérifier la continuité par morceaux de S , celle-ci n'étant plus assurée par la convergence uniforme.

Théorème II: Dérivation terme à terme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

- a) les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- b) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I ; on notera S sa somme ;
- c) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$ converge simplement sur I , **la convergence étant uniforme locale sur I .**

Théorème II: Dérivation terme à terme

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On suppose que :

- a) les u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- b) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement sur I ; on notera S sa somme ;
- c) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n$ converge simplement sur I , **la convergence étant uniforme locale sur I .**

Alors :

- ➊ La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- ➋ la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge uniformément localement sur I ;
- ➌ pour tout $x \in I$, on a : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

Corollaire: *Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.*

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) les u_n sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- b) chaque série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(j)}$ pour $j \in \llbracket 0 ; k - 1 \rrbracket$ converge simplement sur I ;
- c) la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I , **la convergence étant uniforme locale sur I .**

Alors la fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I , chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$, et :

$$\forall j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket, \forall x \in I, S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

Corollaire: *Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- a) les u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ;
- b) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- c) il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $k \geq p$ la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge simplement sur I , **la convergence étant uniforme locale sur I .**

Alors : la fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , chaque série $\sum u_n^{(j)}$ avec $j \in \mathbb{N}$ converge uniformément localement vers $S^{(j)}$ et :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I, S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

ÉTUDE COMPLÈTE D'EXEMPLES